Operatorenalgebra und Operatorprobleme

Prof. Dr. Gerhard Grau

Institut für Hochfrequenztechnik und Quantenelektronik

Universität Karlsruhe

Das ist die Vereinigung von 2 Vorlesungen, die zu verschiedenen Zeiten gehalten wurden. Die eigentlichen Manuskripte sind verloren gegangen, hier werden die handschriftlichen Notizen (erster Entwurf) gezeigt.

Erste Variante der Notizen zur Operatorenalgebra

Zweite Variante der Notizen zur Operatorenalgebra

56 Seiten Operator-Probleme

G. GRAU, UNIV. KARLSRUHE

Schrödingerbild

Zustand zur Zeit t gegeben durch $|\psi_s(t)\rangle$. Bewegung gemäß

$$H_s|\psi_s(t)\rangle = j\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi_s(t)\rangle$$

rücklos integrieren:

$$|\psi_s(t)\rangle = e^{-j\frac{H_s t}{\hbar}}|\psi_0\rangle \qquad \text{wobei für } t = t_0 = 0 \quad |\psi_s(0)\rangle = |\psi_0\rangle$$

oder $|\psi_s(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle$ $\qquad U(t) = e^{-j\frac{Ht}{\hbar}}$ unitärer Operator $U^+U = 1$

Wieder einsetzen:

$$H_s U(t)|\psi_0\rangle = j\hbar \frac{\partial U(t)}{\partial t}|\psi_0\rangle$$

$$\left(H_s U - j\hbar \frac{\partial U}{\partial t}\right)|\psi_0\rangle = \emptyset \qquad \text{Da } |\psi_0\rangle \text{ beliebig :} \quad H_s U - j\hbar\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Observable (eine Dimension) $\quad p_s, q_s. \qquad [q_s, p_s] = j\hbar$

$$[q_s, q_s] = [p_s, p_s] = 0$$

$f(q_s, p_s)$:

$$\langle f(q_s,p_s)\rangle = \langle\psi_s(t)|f(q_s,p_s)|\psi_s(t)\rangle$$

Operatoren im Schrödingerbild zeitunabhängig, Zustandsvektoren zeitabhängig.
Noch wichtig: Statistische Matrix.

$$\rho_0 = \rho_s(0) = \sum_\psi p_\psi |\psi_0\rangle\langle\psi_0| \qquad \langle A\rangle = tr\{\rho_s(0)\cdot A_s\}$$

$$\rho_s(t) = \sum_\psi p_\psi |\psi_s(t)\rangle\langle\psi_s(t)| \qquad \langle A\rangle = tr\{\rho_s(t) A_s\}$$

$$= \sum_\psi p_\psi U(t)|\psi_0\rangle\langle\psi_0|U^+(t) = U(t)\rho_s(0)U^+(t)$$

Wir sehen:
Statistischer Operator ist zeitabhängig im Schrödingerbild, muß also eine Bewegungsgleichung erfüllen.

$$\rho_s(t) = U(t)\rho_0 U^+(t)$$

$$\frac{d\rho_s(t)}{dt} = \frac{dU}{dt}\rho_0 U^+ + U\rho_0\frac{dU^+}{dt} \qquad \text{erinnern:} \quad \frac{dU}{dt} = \frac{1}{j\hbar}H_s U, \quad \frac{dU^+}{dt} = -\frac{1}{j\hbar}U^+H$$

$$= \frac{1}{j\hbar}H_s U\rho_0 U^+ - \frac{1}{j\hbar}U\rho_0 U^+ H_s = \frac{1}{j\hbar}\left[H_s\rho_s(t) - \rho_s(t)H_s\right]$$

d.h.:

$$\frac{d\varrho_s(t)}{dt} = \frac{1}{j\hbar}\left[H_s, \varrho_s(t)\right]$$

H_s nur zu zeigen, daß H im Schrödingerbild.

Erinnern: Observable A_s

Charakteristische Funktion

$$C_A(\xi) = \langle e^{j\xi A_s}\rangle = tr\left\{\varrho_s(t)\, e^{j\xi A_s}\right\}$$

Daraus

$$\langle A^n\rangle = \frac{\partial^n}{\partial(j\xi)^n} C_A(\xi)\Big/_{\xi=0}$$

Erinnern uns, daß die Verteilung, der die Meßwerte von A_s genügen, durch Inversion gegeben ist

$$P(A) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\xi A}\, C_A(\xi)\, d\xi$$

ist Wahrscheinlichkeit, Eigenwert A von A_s zu messen.

Heisenberg-Bild

Zustandsvektoren bleiben unverändert auf dem Wert, den sie zur Zeit $t=0$ haben.

$$|\psi_s(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle = U(t)|\psi_H\rangle$$

Nicht ungestraft, es muß sich etwas anderes ändern

$$\langle A\rangle = \langle\psi_s(t)|A_s|\psi_s(t)\rangle = \langle\psi_H|U^+(t)A_s U(t)|\psi_H\rangle = \langle\psi_H|A_H(t)|\psi_H\rangle$$

$A_H(t) = U^+(t)A_s U(t)$ Operator ändert sich, Bewegungsgleichung?

$$\frac{dA_H(t)}{dt} = \frac{dU^+}{dt}A_s U + U^+ A_s\frac{dU}{dt} + U^+\frac{\partial A_s}{\partial t}U$$

aus $H_s U = j\hbar\frac{\partial U}{dt}$

$$= -\frac{1}{j\hbar}U^+ H_s A_s U + \frac{1}{j\hbar}U^+ A_s H_s U + U^+\frac{\partial A_s}{\partial t}U$$

$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{j\hbar}H_s U$

$\frac{dU^+}{dt} = -\frac{1}{j\hbar}U^+ H_s$

$$= -\frac{1}{j\hbar}\left\{U^+ H_s U U^+ A_s U - U^+ A_s U U^+ H_s U\right\} + \left(\frac{\partial A_s}{\partial t}\right)_H$$

$$= -\frac{1}{j\hbar}\left\{H_H A_H - A_H H_H\right\} + \left(\frac{\partial A_s}{\partial t}\right)_H$$

$$= \frac{1}{j\hbar}\left[A_H, H_H\right] + \left(\frac{\partial A_s}{\partial t}\right)_H$$

Das heißt, im Heisenbergbild muß man eine Bewegungsgleichung für den Operator lösen.

Ist Schrödinger-Operator nicht explizit zeitabhängig, ist $\frac{\partial A_S}{\partial t} = 0$,

ergo: Jeder Heisenberg-Operator der mit H_H kommutiert ist eine Konstante der Bewegung, seine Verteilg bleibt erhalten.

Konservatives System: H_S nicht explizit zeitabhängig. (ist nämlich H_S explizit zeitabhängig, so ist $U(t) \neq e^{-j\frac{Ht}{\hbar}}$)

$$H_H = U^+(t) H_S U(t) = e^{+j\frac{H_S t}{\hbar}} H_S e^{-j\frac{H_S t}{\hbar}} = H_S$$

ergo: H ist Konstante der Bewegung, Energiespektrum ändert sich nicht.

Wenn man rechnet im Schrödingerbild, wählt man ein Koordinatensystem

$$A_S|a'\rangle_S = a'|a'\rangle_S$$

und hat Vorteil, daß Achsen bleiben, und sich $|\psi_S(t)\rangle$ bewegt.

Im Heisenbergbild bewegt sich Koordinatensystem.

$$A_S = U A_H(t) U^+$$

$$U A_H(t) U^+ |a'\rangle_S = a'|a'\rangle_S$$

$$A_H(t) \{U^+|a'\rangle_S\} = a' \{U^+|a'\rangle_S\}$$

$$A_H(t)|a,t\rangle_H = a'|a,t\rangle_H$$

$$\text{ergo} \qquad |a,t\rangle_H = U^+|a'\rangle_S$$

Was machen Vertauschungsrelationen? Haben selbe Form.

$$[A_S, B_S] = C_S$$

$$A_S B_S - B_S A_S = C_S$$

$$U^+ A_S U U^+ B_S U - U^+ B_S U U^+ A_S U = U^+ C_S U$$

$$A_H(t) B_H(t) - B_H(t) A_H(t) = C_H(t)$$

$$[A_H(t), B_H(t)] = C_H(t)$$

Noch statistische Matrix:

$$\varrho_0 = \varrho_S(0) = \sum_\psi p_\psi |\psi_0\rangle\langle\psi_0| = \varrho_H \qquad \text{da } |\psi_0\rangle = |\psi_H\rangle$$

ergo: Statistischer Operator bleibt konstant.

$$\langle A\rangle = \mathrm{tr}\,\{\varrho_S(t)\, A_S\} = \mathrm{tr}\,\{\varrho_H\, A_H(t)\}$$

$$\cancel{= \mathrm{tr} \sum}$$

Beweis: $\varrho_H = U^+ \varrho_S(t)\, U$

$A_H(t) = U^+ A_S\, U$

$$\langle A\rangle = \mathrm{tr}\,\{\varrho_H A_H(t)\} = \mathrm{tr}\,\{U^+\varrho_S(t)\, U U^+ A_S U\} = \mathrm{tr}\,\{U^+\varrho_S(t)\, A_S\, U\} =$$

Da invariant gegen zykl. Vert. $= \mathrm{tr}\,\{\varrho_S(t)\, A_S\, U U^+\} = \mathrm{tr}\,\{\varrho_S(t)\, A_S\}$.

Charakteristische Funktion:

$$C_A(\xi) = \mathrm{tr}\,\{\varrho_H\, e^{j\xi A_H(t)}\}$$

$\langle A^n\rangle = \dots$

$P(A) = \dots$ analog.

Nochmals ins Gedächtnis zurückrufen:

$[q,p] = j\hbar \qquad [p,q] = -j\hbar$

$[q, F(p,q)] = j\hbar \dfrac{\partial F}{\partial p} \qquad [p, F(p,q)] = -j\hbar \dfrac{\partial F}{\partial q}$

1. Schwierigkeit: Nichtkonservatives System. H explizit zeitabhängig

bisher: $|\psi_S(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle$ einsetzen in $H|\psi\rangle = j\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle$

$$H(t)U(t) = j\hbar \frac{\partial U(t)}{\partial t} \qquad \text{AB: } t=0 \quad U(t) = 1$$

kritiklos integriert: $U(t) = e^{-\frac{j}{\hbar}\int_0^t H(t')dt'}$

wiedereingesetzt:

$$H(t)\cdot e^{-\frac{j}{\hbar}\int_0^t H(t')dt'} = j\hbar\, e^{-\frac{j}{\hbar}\int_0^t H(t')dt'} \cdot \left(-\frac{j}{\hbar}\right) H(t)$$

D.h.: Lösg wäre es dann, wenn $H(t)$ mit $\int^t H(t')dt'$ kommutiert.
Das ist aber nicht der Fall. (z.B.: $H \hat{=} p\sin\omega t + q\cos\omega t$ nicht kommutiert.
$H = (p+q)f(t)$ aber schon!

formal integrieren: $-\frac{j}{\hbar} H|\psi\rangle dt = d|\psi\rangle \qquad \int_0^t$

$$|\psi(t)\rangle = |\psi_0\rangle - \frac{j}{\hbar}\int_0^t H(t')|\psi(t')\rangle dt' \quad \text{iterieren.}$$

$$|\psi(t')\rangle = |\psi_0\rangle - \frac{j}{\hbar}\int_0^{t'} H(t'')|\psi(t'')\rangle dt'' \quad \text{oben einsetzen}$$

$$|\psi(t)\rangle = |\psi_0\rangle - \frac{j}{\hbar}\int_0^t H(t')|\psi_0\rangle dt' + \left(-\frac{j}{\hbar}\right)^2 \int_0^t H(t')dt' \int_0^{t'} H(t'')|\psi(t'')\rangle dt''$$

wieder bei $t=t'$ nehmen, einsetzen, usw.:

$$|\psi(t)\rangle = \left\{1 + \left(-\frac{j}{\hbar}\right)\int_0^t H(t')dt' + \left(-\frac{j}{\hbar}\right)^2 \int_0^t H(t')dt' \int_0^{t'} H(t'')dt'' + \ldots\right\}|\psi_0\rangle = U(t)|\psi_0\rangle$$

macht man Entwicklung von $e^{-\frac{j}{\hbar}\int_0^t H(t')dt'}$ so sieht man, daß man Übereinstimmung nur in den ersten beiden Gliedern hat.
Berechnung der Reihe langweilig $\longrightarrow$ wie kann man es direkt tun?

2. Schwierigkeit durch Kommutieren von Operatoren.

am Beispiel (bei der Gelegenheit harmon. Oszillator wiederholt):

a) mit q, p als Variable:

$[q_s, p_s] = j\hbar$

$H_s = \frac{1}{2}(p_s^2 + \omega^2 q_s^2) = H_s^+$ (hermitisch)

zu lösen:

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_s(t)\rangle = H_s |\psi_s(t)\rangle$$

gibt:

$$|\psi_s(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle$$

mit $U(t) = e^{-j\frac{H_s t}{\hbar}} = \exp\left[-\frac{jt}{2\hbar}(p_s^2 + \omega^2 q_s^2)\right]$

Damit ist Problem gelöst; man muß wissen $|\psi_0\rangle$; kann ermitteln

$$|\psi_s(t)\rangle = \exp\left[-\frac{jt}{2\hbar}(p_s^2 + \omega^2 q_s^2)\right]|\psi_0\rangle \quad \text{gibt Reihe!}$$

und damit Erwartungswerte $\langle A\rangle = \langle\psi_s(t)|A_s|\psi_s(t)\rangle$

oder, wenn nicht pure state $\rho_s(0) = \sum_\psi p_\psi |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ muß man kennen,

damit

$$\rho_s(t) = U(t)\,\rho_s(0)\,U^+(t)$$

damit $\langle A\rangle = \mathrm{tr}\,\{\rho_s(t) A_s\}$ wieder alles bekannt.

aber: wie wirkt $U(t)$ auf $|\psi_0\rangle$? z. Bsp. $|\psi_0\rangle$ nach $|q_s\rangle$ entwickeln,
Schwierigkeit: gibt für $|\psi_s(t)\rangle$ eine wenig übersichtliche Reihe.

Abhilfe versuchen: Lösung im Heisenbergbild versuchen.

b) $[q_H(t), p_H(t)] = j\hbar$ Vertauschungsregel bleibt

$H_H(t) = U^+ H_s U = H_s$ da $U = e^{-j\frac{H_s t}{\hbar}}$

$= U^+ \frac{1}{2}(p_s^2 + \omega^2 q_s^2) U = \frac{1}{2}\{U^+ p_s U U^+ p_s U + \omega^2 U^+ q_s U U^+ q_s U\}$

$= \frac{1}{2}(p_H^2(t) + \omega^2 q_H^2(t))$

Damit Bewegungsgleichungen für die Operatoren aufstellen und lösen mit AB

$t=0$: Heisenberg = Schrödingerbild.

$$\frac{dq_H(t)}{dt} = \frac{1}{j\hbar}[q_H(t), H_H]$$

$$= \frac{1}{j\hbar}[q_H, \tfrac{1}{2}(p_H^2+\omega^2 q_H^2)] = \frac{1}{j\hbar}[q_H, \tfrac{1}{2}p_H^2] = \frac{1}{j\hbar}\cdot j\hbar \frac{\partial}{\partial p_H}\left(\tfrac{1}{2}p_H^2\right) = p_H$$

$$\frac{dp_H(t)}{dt} = \frac{1}{j\hbar}[p_H(t), H_H] =$$

$$= \frac{1}{j\hbar}[p_H(t), \tfrac{1}{2}(p_H^2+\omega^2 q_H^2)] = \frac{1}{j\hbar}[p_H, \tfrac{1}{2}\omega^2 q_H^2] = \frac{1}{j\hbar}\left[-j\hbar\frac{\partial}{\partial q_H}\left(\tfrac{1}{2}\omega^2 q_H^2\right)\right] = -\omega^2 q_H$$

Also:

$$\frac{dq_H(t)}{dt} = p_H \qquad \frac{dp_H(t)}{dt} = -\omega^2 q_H$$

Daraus:
$$\frac{d^2 q_H}{dt^2} + \omega^2 q_H = 0$$

$$\frac{d^2 p_H}{dt^2} + \omega^2 p_H = 0$$

Lsg. z. Bsp. für q_H:

$$q_H(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

A, B aus Anfangsbed.

1) $t=0$: $q_H(t) = q_S$

2) $t=0$ $\left.\frac{dq_H(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.p_H\right|_{t=0} = p_S$

Gibt:

$$q_H(t) = q_S\cos\omega t + \frac{p_S}{\omega}\sin\omega t$$

$$p_H(t) = -\omega q_S\sin\omega t + p_S\cos\omega t$$

Damit wieder Erwartungswerte zur Zeit t bekannt, da Zustand am Anfang, durch $|\psi_0\rangle$, oder statistischen Operator $\sum_\psi p_\psi |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ gegeben, bekannt.

Haben gelernt: $A_H(t) = U^+ A_S U$, also muß sein:

$$q_H(t) = \exp\left[\frac{jt}{2\hbar}[p_S^2+\omega^2 q_S^2]\right] q_S \exp\left[-\frac{jt}{2\hbar}(p_S^2+\omega^2 q_S^2)\right] = q_S\cos\omega t + \frac{p_S}{\omega}\sin\omega t$$

$$p_H(t) = \exp[+\ldots \quad] p_S \exp[-\ldots \quad] = -\omega q_S\sin\omega t + p_S\cos\omega t$$

Wieso? Manchesmal mögen Heisenberggl. schwer integrabel sein, man könnte A_H aus $U^+ A_S U$ berechnen → ja, wenn man es kann.

c) Oszillator im Fock-Space:

$$a_s = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q_s + j p_s) \qquad q_s = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a_s^+ + a_s)$$

$$a_s^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q_s - j p_s) \qquad p_s = j\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a_s^+ - a_s)$$

aus $[q_s, p_s] = j\hbar$ folgt

$$[a_s, a_s^+] = 1$$

$$H_s = \hbar\omega(a_s^+ a_s + \tfrac{1}{2})$$

$$|\psi_s(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle$$

mit $$U(t) = \exp\left(-\frac{jH_s t}{\hbar}\right) = \exp(-j\omega t\, a_s^+ a_s)\exp\left(-\frac{j\omega t}{2}\right)$$

Damit alles gelöst. $|\psi_0\rangle$ zweckmäßig nach Eigenkets von $a_s^+ a_s$ entwickeln. Gibt aber wieder ∞ Reihe (im allgemeinen).

Bemerken:

Eigenwertproblem $\quad a_s^+ a_s|n\rangle = n|n\rangle$

gibt $\quad n = 0, 1, 2, \dots \infty$

$a_s^+ a$: Photonenzahl ; Eigenwerte von H_s: $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$

Interpretation: Erzeugungs- u. Vernichtungsoperatoren für Photonen = Bosonen, da n im gleichen dynamischen Zustand möglich sind (bis ∞ viele)

$$a|0\rangle = 0$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

$$N\{a^+|n\rangle\} = a^+ a a^+|n\rangle = a^+(1 - a^+ a)|n\rangle$$
$$= a^+(1-n)|n\rangle = (1-n)\{a^+|n\rangle\}$$

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$$

$$\Sigma |n\rangle\langle n| = 1$$

Zusammenhang mit q-Sprache: $\quad q|q'\rangle = q'|q'\rangle$

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q-q')$$

$$\int |q\rangle dq \langle q| = 1$$

$$\langle q|n\rangle = u_n(q) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!}}\, H_n(\alpha q)\exp(-\tfrac{1}{2}\alpha^2 q^2) \qquad \alpha = \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}$$

d) Heisenberg-Bild:

$$[a_H(t), a_H^+(t)] = 1$$

$$H_H(t) = U^+ H_S U = \hbar\omega\,[a_H^+(t)\,a_H(t) + \tfrac{1}{2}]$$

$$\frac{da_H(t)}{dt} = \frac{1}{j\hbar}[a_H(t), H_H] = \frac{1}{j\hbar}[a_H(t), \hbar\omega a_H^+(t)a_H(t) + \hbar\omega\cdot\tfrac{1}{2}] =$$

$$= -j\omega\,[a_H, a_H^+ a_H] = -j\omega\,(a_H a_H^+ a_H - a_H^+ a_H a_H) = -j\omega\,[a_H, a_H^+]\,a_H = -j\omega a_H$$

Genau so:

$$\frac{da_H^+}{dt} = \frac{1}{j\hbar}[a_H^+, H_H] = j\omega a_H^+$$

Einfach zu integrieren, da entkoppelt. AB: $t = 0$ $a_H(t) = a_S$, ergo

$$a_H(t) = a_S\, e^{-j\omega t} = U^+ a_S U = e^{j\omega t a_S^+ a_S}\, a_S\, e^{-j\omega t a_S^+ a_S}$$

$$a_H^+(t) = a_S^+\, e^{j\omega t} = U^+ a_S^+ U = e^{j\omega t a_S^+ a_S}\, a_S^+\, e^{-j\omega t a_S^+ a_S}$$

Das wieder nicht direkt einzusehen. Hier nicht nötig, da Dgl. für a_H, a_H^+ leicht zu lösen (Zweck ihrer Einführung).

Fermionen

Können nicht durch obige Operatoren beschrieben werden, da zufolge Pauli-Verbot nicht zwei Elektronen im gleichen dynamischen Zustand sein können.
Also: wie optisch 1 Mode betrachtet = 1 dynamischer Zustand, so wird hier 1 dynamischer Zustand betrachtet, in dem aber nur 1 Teilchen sein kann.

$H = E b^+ b$ — E Energieeigenwert des betrachteten Zustands, b^+, b Erzeugungs- Vernichtungsop. für Fermionen in diesem Zustand.

Postulieren: $[b, b^+]_+ = 1$ $\quad [b, b]_+ = [b^+, b^+]_+ = 0$ $\quad$ d.h. $b^2 = b^{+2} = 0$

Was folgt?

$$N^2 = (b^+b)\,b^+b = b^+(1 - b^+b)\,b = b^+b - b^{+2}b^2 = b^+b = N$$

d.h.: $N(N-1) = 0$

Ergo: Gleichung $N|n\rangle = n|n\rangle$ hat nur zwei Eigenwerte: $n = 0$, $n = 1$ — Hilbertraum hat nur 2 Dimensionen.

$N|0\rangle = 0$
$N|1\rangle = 1\cdot|1\rangle$

Ferner: $\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$ $\quad n, n' = 0, 1$

$$\sum_{n=0}^{1} |n\rangle\langle n| = 1$$

Daraus leitet man ab:

$$N b|0\rangle = b^+ b \cdot b|0\rangle = b^+ b^2 |0\rangle = 0$$

d.h.: $N\{b|0\rangle\} = 0 \cdot \{b|0\rangle\}$ ergo $b|0\rangle = 0$

$$N b^+|0\rangle = b^+ b b^+ |0\rangle = b^+(1 - b^+ b)|0\rangle$$

$$= b^+|0\rangle + b^{+2} b|0\rangle = b^+|0\rangle$$

d.h.: $N\{b^+|0\rangle\} = 1 \cdot \{b^+|0\rangle\}$

ergo: $b^+|0\rangle = c_n|1\rangle$

Norm: $\langle 0|b b^+|0\rangle = |c_n|^2$

$= \langle 0|1 - b^+ b|0\rangle = 1$ ergo, bei richtiger Phasenwahl $b^+|0\rangle = |1\rangle$

Ähnlich: $b^+|1\rangle = 0$

$b|1\rangle = |0\rangle$

Spin-Operatoren.

Was ist QM? Postulat, daß jeder Observablen ein hermitischer Operator entspricht. Die Algebra dieser Operatoren wird in Form von Vertauschungsrelationen postuliert, sodaß man Übereinstimmung mit dem Experiment erhält.

<u>Kreisstrom:</u> $\vec{m} = -\frac{e}{2m}\vec{l}$ (Giorgi) $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\left.\begin{matrix} \vec{r} = (q_1, q_2, q_3) \\ \vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \\ \vec{l} = (l_1, l_2, l_3) \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \\ [q_i, p_j] = j\hbar\delta_{ij} \end{matrix}$$

Daraus leitet man ab:

$$[l_i, l_j] = j\hbar\varepsilon_{ijk} l_k$$

$$[\vec{l}^2, l_i] = 0$$

$\varepsilon_{ijk} = 0$ bei zwei oder 3 Indizes gleich
$\varepsilon_{ijk} = +1$ bei $\varepsilon_{123}, \varepsilon_{231}, \varepsilon_{312}$
$\varepsilon_{ijk} = -1$ sonst.

<u>Elektron</u>

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{m} \cdot \vec{s} \quad \text{(Giorgi)}$$

$\vec{s}$: Mechanischer Drehimpuls
$\vec{\mu}$: Magnetisches Moment.

Man beachte: Faktor 2 ist Spinmagnetismus höher als Bahnmagnetismus für gleichen mechanischen Drehimpuls. (Experiment: Alkalispektren im Magnetfeld 1925, Uhlenbeck u. Goudsmit.)

postuliert für Spin gleiche Beziehungen wie für Drehimpuls:

$$[s_i, s_j] = j\hbar\varepsilon_{ijk} s_k \qquad [\vec{s}^2, s_i] = 0$$

Hermitizität postulieren!

Ferner zeigt sich: Messung gibt für Komponenten von $\vec{S}$ nur 2 mögl. Werte $\pm \hbar/2$.

Zweckmäßig: $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ — $\vec{\sigma}$ kann dann nur Komp. ± 1 haben.

oben einsetzen: $\vec{\mu} = -\frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma} = -\beta\vec{\sigma}$ — β: Bohrsches Magneton.

$$[\tfrac{\hbar}{2}\sigma_i, \tfrac{\hbar}{2}\sigma_j] = j\hbar\,\varepsilon_{ijk}\tfrac{\hbar}{2}\sigma_k$$

$$\underline{\underline{\vec{\mu} = -\frac{\gamma\hbar}{2}\vec{\sigma} = -\gamma\vec{S}}}$$

$\gamma = \frac{e}{m}$ gyromagn. Verhältnis.

d.h.:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2j\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

postulieren: $[\sigma_i, \sigma_j]_+ = 2\delta_{ij}$ — wichtig!

gibt für $i=j$: $\sigma_i^2 = 1$, d.h. einzige Eigenwerte ± 1 für jede Komponente von $\vec{\sigma}$.

Addition gibt: $\underline{\sigma_i\sigma_j = j\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}}$

z.Bsp.: $\sigma_1\sigma_2 = j\cdot\varepsilon_{12k}\sigma_k + \delta_{12}$

$$= j\varepsilon_{123}\sigma_3 + 0 = j\cdot(+1)\sigma_3 = j\sigma_3$$

Daraus: $\underline{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} = j\sigma_3\cdot\sigma_3 = j\cdot[j\varepsilon_{33k}\sigma_k + \delta_{33}]$

$$= j\,[0+1] = \underline{j}$$

Neue Operatoren definieren:

$$\sigma_\pm = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 \pm j\sigma_2)$$

beachte: $\sigma_+ = \sigma_-^+$

Daraus neue Relationen:

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_3$$

$$[\sigma_+, \sigma_+] = [\sigma_-, \sigma_-] = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} [\sigma_+, \sigma_-]_+ = 1 \\ [\sigma_+, \sigma_+]_+ = [\sigma_-, \sigma_-]_+ = 0 \end{array}\right\}$$

Analogie $\sigma_+ \ldots b^+$! $\sigma_- \ldots b$!

$$[\sigma_\pm, \begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{matrix}] = \begin{cases} \pm\sigma_3 \\ j\sigma_3 \\ \mp 2\sigma_\pm \end{cases}$$

$$[\sigma_\pm, \begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{matrix}]_+ = \begin{cases} 1 \\ \pm j \\ 0 \end{cases}$$

Damit alle Relationen zusammengestellt.

Spinraum: Koordinatensystem wählen: Eigenkets von σ_3.

Da $\sigma_3^2 = 1$ nur 2 Eigenwerte: ± 1.

d.h.:
$$\sigma_3 |1\rangle = 1|1\rangle$$
$$\sigma_3 |-1\rangle = -1|-1\rangle$$

Basis: $|1\rangle, |-1\rangle$; orthonormiert: $\langle 1|1\rangle = \langle -1|-1\rangle = 1$
$\langle 1|-1\rangle = \langle -1|1\rangle = 0$

und vollständig:
$$|1\rangle\langle 1| + |-1\rangle\langle -1| = 1$$

Was noch? Nun, wie alle Operatoren im Spinraum, die wir definiert haben, auf diese Kets wirken.

Zuerst: $\sigma_+|1\rangle = ?$

Wie geht man vor? Man weiß, wie σ_3 auf $|1\rangle$ wirkt, ergo Relationen zwischen σ_3 und σ_+ heranziehen.

$$\sigma_+\sigma_3 - \sigma_3\sigma_+ = -2\sigma_+$$
$$\underline{\sigma_+\sigma_3 + \sigma_3\sigma_+ = 0}$$
$$\sigma_+\sigma_3 = -\sigma_+$$

$\sigma_+\sigma_3|1\rangle = -\sigma_+|1\rangle = \sigma_+|1\rangle$ Fazit: $\sigma_+|1\rangle = 0$

Beachte: Man hätte auch anders vorgehen können:

$$\sigma_+\sigma_3|1\rangle + \sigma_3\sigma_+|1\rangle = 0$$

$\sigma_+|1\rangle + \sigma_3\sigma_+|1\rangle = 0$ $\quad \sigma_3\{\sigma_+|1\rangle\} = -1\{\sigma_+|1\rangle\}$ d.h. $\sigma_+|1\rangle \sim |-1\rangle$
oder $\sigma_+|1\rangle = 0$

Was richtig?
Andere Gl:

$$\sigma_+\sigma_3|1\rangle - \sigma_3\sigma_+|1\rangle = -2\sigma_+|1\rangle$$
$$\sigma_+|1\rangle - \sigma_3\sigma_+|1\rangle = -2\sigma_+|1\rangle$$

$3\{\sigma_+|1\rangle\} = \sigma_3\{\sigma_+|1\rangle\}$ 1. Versuch: $\sigma_+|1\rangle \sim |-1\rangle$

$\sigma_3|-1\rangle = 3|-1\rangle$ Blödsinn

2. Versuch: $\sigma_+|1\rangle = 0$: löst Gleichung.

Jetzt: $\sigma_+|-1\rangle = ?$

$$\sigma_+\sigma_3|-1\rangle - \sigma_3\sigma_+|-1\rangle = -2\sigma_+|-1\rangle$$
$$-\sigma_+|-1\rangle - \sigma_3\sigma_+|-1\rangle = -2\sigma_+|-1\rangle$$

$\sigma_3\{\sigma_+|-1\rangle\} = \{\sigma_+|-1\rangle\}$ d.h.: $\sigma_+|-1\rangle \sim |1\rangle$
oder $\sigma_+|-1\rangle = 0$

andere Gl: $\sigma_+\sigma_3|-1\rangle + \sigma_3\sigma_+|-1\rangle = 0$
$-\sigma_+|-1\rangle + \sigma_3\sigma_+|-1\rangle = 0$
$\sigma_3\{\sigma_+|-1\rangle\} = \{\sigma_+|-1\rangle\}$ ergo nichttrivial $\sigma_+|-1\rangle \sim |1\rangle$ zulässig.

Normierungsfaktor:

$$\sigma_+|-1\rangle = c|1\rangle$$

$$\langle -1|\sigma_+^+\sigma_+|-1\rangle = cc^*\langle 1|1\rangle = cc^*$$

$$\langle -1|\sigma_-\sigma_+|-1\rangle = cc^*$$

Jetzt $\sigma_-\sigma_+$ auf σ_3 ~~oder~~ umarbeiten, weil dessen Wirkung bekannt:

$$\sigma_+\sigma_- - \sigma_-\sigma_+ = \sigma_3$$
$$\sigma_+\sigma_- + \sigma_-\sigma_+ = 1$$

$$\sigma_-\sigma_+ = \frac{1}{2}(1-\sigma_3)$$

$$\langle -1|\tfrac{1}{2}(1-\sigma_3)|-1\rangle = cc^* = \frac{1}{2}\langle -1|-1\rangle - \frac{1}{2}\langle -1|\sigma_3|-1\rangle$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)\langle -1|-1\rangle = 1$$

Wir wählen Phase von c mit Null. ergo: $\sigma_+|-1\rangle = |1\rangle$
Ähnlich bei σ_-.

Summiert: $\sigma_+|1\rangle = 0$ $\qquad$ $\sigma_-|1\rangle = |-1\rangle$
$\sigma_+|-1\rangle = |1\rangle$ $\qquad$ $\sigma_-|-1\rangle = 0$

Analog: $\sigma_1|1\rangle = |-1\rangle$ $\qquad$ $\sigma_2|1\rangle = j|-1\rangle$
$\sigma_1|-1\rangle = |1\rangle$ $\qquad$ $\sigma_2|-1\rangle = -j|1\rangle$

Darstellung der Operatoren in diesem Koordinatensystem:

Erinnern uns: Im System $A|a\rangle = a|a\rangle$ $\qquad$ $\langle a'|a''\rangle = \delta_{a'a''}$

$$\sum_a |a\rangle\langle a| = 1$$

Wird Operator B dargestellt durch

$$B = 1\cdot B\cdot 1 = \sum_{a'}\sum_{a''} |a'\rangle\langle a'|B|a''\rangle\langle a''|$$

d.h. kennt man Matrixelemente $\langle a'|B|a''\rangle$, so kennt man Operator.

Hier: Operator σ_1:

$$\sigma_1 = \sum\sum_{n,m=\pm1} |n\rangle\langle n|\sigma_1|m\rangle\langle m|$$

Matrixelemente: $\langle 1|\sigma_1|1\rangle = \langle 1|-1\rangle = 0$
$\langle 1|\sigma_1|-1\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$
$\langle -1|\sigma_1|1\rangle = \langle -1|-1\rangle = 1$
$\langle -1|\sigma_1|-1\rangle = \langle -1|1\rangle = 0$

d.h.: $\underset{\text{als Matrix}}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Eigentlich müsste man σ_1 als Operator und als Matrix unterscheiden.

d.h.:

$$\sigma_1 = |1\rangle 0 \langle 1| + |1\rangle 1 \langle -1| + |-1\rangle 1 \langle 1| + |-1\rangle 0 \langle -1|$$

$$= |1\rangle\langle -1| + |-1\rangle\langle 1|$$

Stimmt das?

z. Bsp. $\sigma_1 |1\rangle = |-1\rangle$ von früher.

d.h. $\{|1\rangle\langle -1| + |-1\rangle\langle 1|\}|1\rangle = |1\rangle\langle -1|1\rangle + |-1\rangle\langle 1|1\rangle$

$= |1\rangle \cdot 0 + |-1\rangle \cdot 1 = |-1\rangle$ stimmt.

Paulische Spinmatrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

im Koordinatensystem von σ_3 (ergo σ_3 diagonal)

Spin im Magnetfeld

$$\vec{\mu} = -\frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma} = -\beta\vec{\sigma}$$

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{H} = \beta\,\vec{\sigma}\cdot\vec{H}$$

Einfach: Magnetfeld nur Komponente in 3-Richtung: $\vec{H} = (0, 0, H_0)$

Dann ist Hamiltonian:

$$H = \beta H_0 \sigma_3$$

Energieeigenwerte? $\quad H|E\rangle = E|E\rangle$

d.h. $\quad \beta H_0 \sigma_3 |E\rangle = E|E\rangle$

Eigenwerte von σ_3 sind aber ± 1, ergo: $\quad E_1 = +\beta H_0$, Eigenket: $|1\rangle$
$E_2 = -\beta H_0$ Eigenket $|-1\rangle$

$\Rightarrow$ Spin antiparallel oder parallel zum Feld.

Beachte: $[\sigma_+, \sigma_-]_+ = 1$

$\sigma_+^2 = \sigma_-^2 = 0$

Früher: $[b^+, b]_+ = 1$

$b^{+2} = b^2 = 0$

Deutung: σ_+ = Erzeugungsoperator eines Fermions, und zwar eines Teilchens der Energie $2\beta H_0$ (eines einzigen dynamischen Zustands)

σ_- = Vernichtungsoperator

$\sigma_+\sigma_-$ (hat Eigenwerte 0 und 1): Anzahloperator. Zustand kann besetzt oder unbesetzt sein. (Stehen alle Spin parallel zum Magnetfeld, dann steckt ja keine potentielle Energie mehr drin!)

Spinoperatoren kommutieren mit q_i und p_i (klar: anderer Teil des Hilbertraumes!)

Zustand eines Elektrons: $|q_1, q_2, q_3, \sigma_3\rangle$ oder Mischung.

q_i von $-\infty$ bis $+\infty$, σ_3 aber nur ± 1.
Wenn q_i uninteressant: $|\sigma_3\rangle$ angeben.

Problem lösen:

$H = \beta H_0 \sigma_3$ $\qquad$ $2\beta H_0 = \hbar\omega$

$H = \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_3$

Könnte Heisenbergbild verwenden; hier Schrödingerbild.

$$|\psi_S(t)\rangle = e^{-j\frac{Ht}{\hbar}}|\psi_0\rangle = e^{-j\frac{\omega t\sigma_3}{2}}|\psi_0\rangle \quad \text{Gelöst.}$$

Anfangszustand:

$$|\psi_0\rangle = c_1|1\rangle + c_2|-1\rangle$$

wobei wegen Normierung $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1 = |c_1|^2 + |c_2|^2$ sein muß.

Erinnern: $A|a\rangle = a|a\rangle$ impliziert:
$f(A)|a\rangle = f(a)|a\rangle$

$$|\psi_S(t)\rangle = e^{-j\frac{\omega t\sigma_3}{2}}\{c_1|1\rangle + c_2|-1\rangle\} = c_1 e^{-j\frac{\omega t}{2}}|1\rangle + c_2 e^{j\frac{\omega t}{2}}|-1\rangle$$

Damit Erwartungswerte zu bilden:

$$\langle\sigma_3\rangle = \langle\psi_S(t)|\sigma_3|\psi_S(t)\rangle = |c_1|^2 - |c_2|^2 \quad \text{bleibt konstant!}$$

$$\langle\sigma_1\rangle = c_1^* c_2 e^{j\omega t} + c_1 c_2^* e^{-j\omega t} \text{ - reell!}$$

$$\langle\sigma_2\rangle = -jc_1^* c_2 e^{j\omega t} + jc_1 c_2^* e^{j\omega t} \text{ - reell!}$$

Statistischer Operator für Spin $\frac{1}{2}$

Problem: Kein reiner Zustand mehr, sondern Mischung. Man mißt $\langle\vec{\sigma}\rangle$. Statistischer Operator? Ansatz: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und Einheitsoperator beschreiben Spinraum vollständig. Jeder Operator muß Linearkomb. davon sein.

$$\rho = c_0 + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3$$

Bedingungen: 1) $\operatorname{tr}\rho = 1$, d.h.

$$\langle 1|\rho|1\rangle + \langle -1|\rho|-1\rangle = 1 = c_0\{\langle 1|1\rangle + \overset{c_0}{}\langle -1|-1\rangle\}$$ andere Glieder verschwinden. $c_0 = \frac{1}{2}$

2) $\operatorname{tr}\{\rho\sigma_1\} = \langle\sigma_1\rangle$

$$\langle\sigma_1\rangle = \langle 1|c_0\sigma_1|1\rangle + \langle -1|c_0\sigma_1|-1\rangle + \langle 1|c_1\sigma_1^2|1\rangle + \langle -1|c_1\sigma_1^2|-1\rangle + \langle 1|c_2\sigma_2\sigma_1|1\rangle + \langle -1|c_2\sigma_2\sigma_1|-1\rangle + \langle 1|c_3\sigma_3\sigma_1|1\rangle + \langle -1|c_3\sigma_3\sigma_1|-1\rangle$$

= mittels der Regeln Seite 13 = $2c_1$, d.h.: $c_1 = \frac{1}{2}\langle\sigma_1\rangle$

Analog: $\operatorname{tr}\{\rho\sigma_2\} = \langle\sigma_2\rangle \longrightarrow c_2 = \frac{1}{2}\langle\sigma_2\rangle$

$\operatorname{tr}\{\rho\sigma_3\} = \langle\sigma_3\rangle \longrightarrow c_3 = \frac{1}{2}\langle\sigma_3\rangle$.

Ergo: $$\rho = \frac{1}{2}\left(1 + \sigma_1\langle\sigma_1\rangle + \sigma_2\langle\sigma_2\rangle + \sigma_3\langle\sigma_3\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \vec{\sigma}\cdot\langle\vec{\sigma}\rangle\right)$$

Im Schrödingerbild ist $\langle\vec{\sigma}(t)\rangle$ eine Zeitfunktion.
Beachte: In Büchern wird meist $\langle\vec{\sigma}\rangle$ mit $\vec{s}$ bezeichnet (hat aber nichts zu tun mit dem mechanischen Drehimpuls $\vec{s}$ des Elektrons! Faktor kommt noch dazu – außerdem Erwartungswert!)

Ableitung der klassischen Gleichung:

Heisenbergsche Bewegungsgleichung des Operators = Gleichung für klassische Größen (Ehrenfestsches Theorem).

z. Bsp.: $\vec{\mu} = -\frac{\gamma\hbar}{2}\vec{\sigma} = -\frac{e}{m}\cdot\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ Hamiltonian: $H = -\vec{\mu}\cdot\vec{H} = \frac{\gamma\hbar}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{H}$

Bewegungsgl. (Heisenberg) für $\vec{\sigma}$:

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{1}{j\hbar}\left[\vec{\sigma}, \frac{\gamma\hbar}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{H}\right]$$

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = \frac{\gamma}{2j}\left[\sigma_i, \sigma_j H_j\right]$$

Summationsübereinkunft! $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$$= \frac{\gamma}{2j} H_j\left[\sigma_i, \sigma_j\right] = \frac{\gamma}{2j} H_i \cdot 2j\,\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

$$= \gamma\cdot\varepsilon_{ijk}H_j\sigma_k$$ d.h.: $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \gamma\,\vec{H}\times\vec{\sigma}$

Laut Ehrenfest, da $\vec{M}$ (klassische Magnetisierung) $\sim \langle \vec{\mu} \rangle \sim \langle \vec{\sigma} \rangle$, müsste gelten

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{H} \times \vec{M}.$$

Direkter Beweis: (Übung für Operatorenrechnung; hierzu Vereinfachung analytische Tensorschreibweise angewendet)

$$\vec{M} = \langle \vec{\mu} \rangle = -\frac{\gamma\hbar}{2} \langle \vec{\sigma} \rangle = -\frac{\gamma\hbar}{2}\, \mathrm{tr}\{\rho \vec{\sigma}\}$$

Schrödingerbild: $\rho(t)$!

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\frac{\gamma\hbar}{2}\, \mathrm{tr}\left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{\sigma}\right\}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{j\hbar}[H, \rho]$$

$$\begin{cases} H = \frac{\gamma\hbar}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{H} \\ \rho = \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle) \\ \quad = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\gamma\hbar} \vec{\sigma} \cdot \vec{M}\right) \end{cases}$$

$\partial \ell$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{j\hbar}\left[\frac{\gamma\hbar}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{H},\ \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma\hbar} \vec{\sigma} \cdot \vec{M}\right]$$

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\frac{\gamma\hbar}{2}\, \mathrm{tr}\left\{\frac{1}{j\hbar}\left[\frac{\gamma\hbar}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{H}, -\frac{1}{\gamma\hbar} \vec{\sigma} \cdot \vec{M}\right] \vec{\sigma}\right\} =$$

$$= \frac{\gamma}{4j}\, \mathrm{tr}\left\{[\vec{\sigma} \cdot \vec{H}, \vec{\sigma} \cdot \vec{M}] \vec{\sigma}\right\} = \frac{\gamma}{4j} \sum_{\pm 1} \langle n | [\vec{\sigma} \cdot \vec{H}, \vec{\sigma} \cdot \vec{M}] \vec{\sigma} | n \rangle$$

in Indexschreibweise:

$$\frac{\partial M_l}{\partial t} = \frac{\gamma}{4j} \sum_{\pm 1} \langle n | (\sigma_i H_i \sigma_j M_j - \sigma_j M_j \sigma_i H_i) \sigma_l | n \rangle = \frac{\gamma}{4j} \sum_{\pm 1} \langle n | H_i M_j [\sigma_i, \sigma_j] \sigma_l | n \rangle$$

$$= \frac{\gamma}{4j} \sum_{\pm 1} \langle n | H_i M_j\, 2j \varepsilon_{ijk} \sigma_k \sigma_l | n \rangle = \frac{\gamma}{2} \sum_{\pm 1} \langle n | H_i M_j \varepsilon_{ijk} (j \varepsilon_{klm} \sigma_m + \delta_{kl}) | n \rangle$$

$$= \frac{\gamma}{2} j H_i M_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \sum_{\pm 1} \langle n | \sigma_m | n \rangle + \frac{\gamma}{2} H_i M_j \varepsilon_{ijk} \delta_{kl} \sum_{\pm 1} \langle n | n \rangle$$

erster Ausdruck Null, da Spur jeder Spinmatrix Null.
Im zweiten Ausdruck gibt $\sum_{\pm 1} \langle n | n \rangle = 2$, ergo

$$\frac{\partial M_l}{\partial t} = \gamma \varepsilon_{lij} H_i M_j \quad \text{oder:}$$

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = \gamma \vec{H} \times \vec{M}$$

Damit Vorgeplänkel zum Eingewöhnen abgeschlossen.

Allgemeine Operator-Theoreme.

Voraussetzungen: $[A,B] \neq 0$.

$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ d.h.: Funktionen in Potenzreihe entwickelbar. Entwicklungskoeffizienten sind Konstanten (c-Zahlen).

Entwicklg sinnvoll, wenn $f(A)$ auf Eigenket von A angewendet, als Ergebnis

$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n$ hat, Reihe konvergiert, und (im allg. für nicht-hermitische Operatoren) für komplexe a definiert ist.

ξ.. Parameter.

1) $$e^{\xi A} B^n e^{-\xi A} = \left(e^{\xi A} B e^{-\xi A}\right)^n$$
$$e^{\xi A} F(B) e^{-\xi A} = F\left[e^{\xi A} B e^{-\xi A}\right]$$

Beweis:

$$e^{\xi A} B \underbrace{e^{-\xi A} e^{\xi A}}_{1} B \underbrace{e^{-\xi A} \ldots}_{1} \ldots n \text{ Faktoren} = e^{\xi A} B^n e^{-\xi A}$$

$$F(B) = \sum c_n B^n$$
$$e^{\xi A} F(B) e^{-\xi A} = \sum c_n e^{\xi A} B^n e^{-\xi A} = \sum c_n \left(e^{\xi A} B e^{-\xi A}\right)^n = F\left(e^{\xi A} B e^{-\xi A}\right)$$

2) $$A B^n A^{-1} = (ABA^{-1})^n$$
$$A F(B) A^{-1} = F(ABA^{-1})$$

Verallg. von oben, für beliebige Operatoren A, die ein Inverses A^{-1} besitzen.

Wichtigste Anwendung:
$$A e^{B} A^{-1} = e^{(ABA^{-1})}$$

3) $$e^{\xi A} B e^{-\xi A} = B + \xi [A,B] + \frac{\xi^2}{2!}[A,[A,B]] + \frac{\xi^3}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \ldots$$

Beweis: $$f(\xi) = e^{\xi A} B e^{-\xi A} = f(0) + \xi \left.\frac{df(\xi)}{d\xi}\right|_0 + \frac{\xi^2}{2!} \left.\frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2}\right|_0 + \ldots$$

$$\frac{df}{d\xi} = A e^{\xi A} B e^{-\xi A} - e^{\xi A} B A e^{-\xi A} \qquad \left.\frac{df}{d\xi}\right|_0 = AB - BA = [A,B]$$
$$= A f(\xi) - f(\xi) A = [A, f(\xi)] \qquad f(0) = B$$
$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = [A,[A,f(\xi)]] \qquad \left.\frac{d^2 f}{d\xi^2}\right|_0 = [A,[A,B]]$$

Dieses Theorem ist besonders wertvoll dann, wenn der Kommutator $[A,B]$ eine c-Zahl ist, weil dann die unendliche Reihe mit dem zweiten Glied abbricht.

z. Bsp.

$$\exp\left(j\frac{p\xi}{\hbar}\right) q \exp\left(-\frac{jp\xi}{\hbar}\right) = q + \xi\left[\frac{jp}{\hbar}, q\right] = q + \frac{j\xi}{\hbar}[p,q] =$$
$$= q + \frac{j\xi}{\hbar}\cdot(-j\hbar) = q + \xi$$

Damit zeigen, daß q kontinuierliches Spektrum hat.

Bezeichnung: $e^{-\frac{jp\xi}{\hbar}} = S$

$$S^+ q S = q + \xi$$

$$qS = Sq + \xi S$$

Da $q|q'\rangle = q'|q'\rangle$

ist $qS|q'\rangle = (Sq + \xi S)|q'\rangle = q'S|q'\rangle + \xi S|q'\rangle = (q'+\xi)S|q'\rangle$

d.h: $q\{S|q'\rangle\} = (q'+\xi)\{S|q'\rangle\}$

ergo: $S|q'\rangle \sim |q'+\xi\rangle$, wobei ξ beliebig von $-\infty$ bis ∞
d.h. q hat kontinuierliches Spektrum.

weitere Anwendung:

$$e^{j\alpha I_1} e^{I_3} e^{-j\alpha I_1} = ? \qquad [I_i, I_j] = j\varepsilon_{ijk} I_k$$

zuerst 1) anwenden

$$e^{j\alpha I_1} e^{I_3} e^{-j\alpha I_1} = \exp\left\{e^{j\alpha I_1} I_3 e^{-j\alpha I_1}\right\}$$

Auf Ausdruck in $\{\ \}$ 3) anwenden:

$$e^{j\alpha I_1} I_3 e^{-j\alpha I_1} = e^{\xi A} B e^{-\xi A} \qquad \begin{aligned} \xi &= j\alpha \\ A &= I_1 \\ B &= I_3 \end{aligned}$$

$$[A,B] = [I_1, I_3] = -jI_2$$
$$[A,[A,B]] = [I_1, -jI_2] = -j[I_1, I_2] = -j\cdot jI_3 = I_3$$
$$[A,[A,[A,B]]] = [I_1, I_3] = -jI_2$$

weitere Glieder abwechselnd $I_3, -jI_2$.

d.h. $B + \xi[A,B] + \frac{\xi^2}{2!}[A,[A,B]] + \dots =$

$$= I_3 \left[1 + \frac{(j\alpha)^2}{2!} + \frac{(j\alpha)^4}{4!} + \dots\right] -$$

$$- jI_2 \left[(j\alpha) + \frac{(j\alpha)^3}{3!} + \frac{(j\alpha)^5}{5!} + \dots\right] =$$

$$= I_3 \cosh j\alpha - jI_2 \sinh j\alpha = I_3 \cos\alpha + I_2 \sin\alpha$$

Endergebnis:

$$e^{j\alpha I_1} e^{I_3} e^{-j\alpha I_1} = e^{I_3\cos\alpha + I_2 \sin\alpha}$$

(Das ist sofort geometrisch einzusehen, da $e^{j\alpha I_1}$ Generator einer Drehung um den endlichen Winkel α um die x-Achse ist. Drehimpuls ist ein Vektoroperator, Transformation ergo so wie bei der Drehung von Vektoren).

Von früher:

$$q_H(t) = q_S \cos\omega t + \frac{p_S}{\omega}\sin\omega t = U^+(t)\, q_S\, U(t)$$

$$\text{mit} \quad U(t) = e^{-j\frac{Ht}{\hbar}}, \quad H = \tfrac{1}{2}(p_S^2 + \omega^2 q_S^2)$$

Hat Form: $e^{\xi A} B e^{-\xi A} = B + \xi[A,B] + \dots$

Die Reihen geben $\cos\omega t$, bzw. $\sin\omega t$ (Übung!)

Weitere Anwendung: Die Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators $\psi_n(q)$ konnten durch wiederholte Anwendung des Operators

$$\frac{d}{dq} - \xi q$$

erhalten werden. Frage: kann man $\left(\frac{d}{dq} - \xi q\right)^n$ so umformen, daß in der Potenz keine Summe mehr vorkommt? (angenehmer!)

Man setze versuchsweise

$$\left(\frac{d}{dq}-\xi q\right)^n = \left(e^{\xi A} B e^{-\xi A}\right)^n$$

d.h.: $$e^{\xi A} B e^{-\xi A} = \frac{d}{dq} - \xi q = B + \xi [A,B]$$ (Reihe soll abbrechen)

Man setzt: $B = \frac{d}{dq}$

Dann ist: $-q = \left[A(q), \frac{d}{dq}\right]$

also auf Funktion $f(q)$ angewendet

$$\underline{-qf} = A\frac{df}{dq} - \frac{d}{dq}(Af) = \underline{-f\frac{dA}{dq}}$$

ergo: $q = \frac{dA}{dq} \longrightarrow A = \frac{q^2}{2}$

Damit verschwinden tatsächlich höhere Glieder der Reihe, da q mit Funktionen von q kommutiert.

d.h.:
$$e^{\frac{\xi q^2}{2}} \frac{d}{dq} e^{-\frac{\xi q^2}{2}} = \frac{d}{dq} - \xi q$$

also
$$\left(\frac{d}{dq} - \xi q\right)^n = \left(e^{\frac{\xi q^2}{2}} \frac{d}{dq} e^{-\frac{\xi q^2}{2}}\right)^n = e^{\frac{\xi q^2}{2}} \frac{d^n}{dq^n} e^{-\frac{\xi q^2}{2}}$$ q.e.d.

4) Ist $[A,B] \neq 0$, aber
$$[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$$
so gilt:
$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} = e^B e^A e^{\frac{1}{2}[A,B]}$$

Besonders wichtig, wenn $[A,B]$ eine c-Zahl ist, weil dann sicher anwendbar. Das ist oft der Fall, z. Bsp. bei $[q,p]$, oder $[a,a^+]$.

Beweis:
$$f(\xi) = e^{\xi A} e^{\xi B}$$

$$\frac{df}{d\xi} = Ae^{\xi A}e^{\xi B} + e^{\xi A}Be^{\xi B} = Ae^{\xi A}e^{\xi B} + e^{\xi A}Be^{-\xi A}e^{\xi A}e^{\xi B}$$
$$= \left(A + e^{\xi A}Be^{-\xi A}\right) f(\xi)$$
$$= \left(A + B + \xi[A,B]\right) f(\xi)$$

Integriert: (jene Lösung suchen, für die $f(0) = 1$ ist)

$$f(\xi) = e^{(A+B)\xi + \frac{\xi^2}{2}[A,B]} = e^{(A+B)\xi}\, e^{\frac{\xi^2}{2}[A,B]}$$

Weil ja $(A+B)$ mit $[A,B]$ kommutiert, kann man in Produkt zweier e-Potenzen trennen. Also:

$$e^{\xi A}\, e^{\xi B} = e^{(A+B)\xi}\, e^{\frac{\xi^2}{2}[A,B]}$$ für $\xi = 1$ daraus

$$e^{A+B} = e^{A}\, e^{B}\, e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

Oft braucht man (Berechnung charakteristischer Funktionen)

$$e^{\lambda p + \mu q} = ?$$

$$A = \lambda p$$
$$B = \mu q$$

$$-\tfrac{1}{2}[A,B] = -\tfrac{1}{2}\lambda\mu\,[p,q] = \tfrac{1}{2}\lambda\mu\,[q,p] = \tfrac{1}{2}\lambda\mu\, j\hbar$$

Ergo:

$$e^{\lambda p + \mu q} = e^{\lambda p}\, e^{\mu q}\, e^{\frac{j\hbar\lambda\mu}{2}}$$

Zeitgeordnete Produkte (Dyson-scher P-Operator)

Der Vollständigkeit halber erwähnt; wichtig in Feldtheorie, wo Kausalität eine Rolle spielt.

Definition:

$$P\{H(t_1)H(t_2)\ldots H(t_n)\} = \sum_P \sigma(t_{\alpha_1}-t_{\alpha_2})\,\sigma(t_{\alpha_2}-t_{\alpha_3})\ldots\sigma(t_{\alpha_{n-1}}-t_{\alpha_n})\cdot$$
$$\cdot H(t_{\alpha_1})H(t_{\alpha_2})\ldots H(t_{\alpha_n})$$

Dabei bedeutet:

$\sum_P$: Summe über alle Permutationen der Zahlen $1,2,3\ldots n$ (d.h. $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n$ nehmen die Werte der Permutationen von $1,2\ldots n$ an.)

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

$\sigma(x)$ Sprungfunktion. (nicht gewöhnliche, als $\int\delta(x)\,dx$, sondern für $x=0$ undefiniert)

Beispiel: $P\{H(t_1)H(t_2)\} = \sigma(t_1-t_2)H(t_1)H(t_2) + \sigma(t_2-t_1)H(t_2)H(t_1)$

Definition: $P\{H(t)H(t)\} = H(t)H(t)$

Bedeutung:

$$P\{H(t_1)H(t_2)\ldots H(t_n)\} = H(t_{\alpha_1})H(t_{\alpha_2})H(t_{\alpha_3})\ldots H(t_{\alpha_n})$$

mit $t_{\alpha_1} > t_{\alpha_2} > t_{\alpha_3} > t_{\alpha_4} \ldots > t_{\alpha_n}$

Deshalb Bezeichnung „zeitgeordnet", weil früheste Zeit ganz rechts, späteste Zeit ganz links steht.

Umformung von

$$I_n = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-2}} dt_{n-1} \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, H(t_1)H(t_2)\ldots\ldots H(t_n)$$

Wurde gezeigt (werden später überlegen für $n=2$) von Dyson 1948 (Phys. Rev. 75, Seite 486 bzw. 1736) daß ebenfalls

$$I_n = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \ldots\ldots \int_{t_0}^{t} dt_n\, \sigma(t_1-t_2)\,\sigma(t_2-t_3)\ldots\,\sigma(t_{n-1}-t_n)\,H(t_1)H(t_2)\ldots H(t_n)$$

Sind die Integrationen vertauschbar (praktisch immer der Fall), dann gilt sicher

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t} dt_n\, f(t_1, t_2, \ldots t_n) = \frac{1}{n!} \sum_P \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t} dt_n\, f(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2} \ldots t_{\alpha_n})$$

Wobei wie oben $\sum_P$ bedeutet, daß $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ in allen Permutationen von $1, 2 \ldots n$ (also $n!$ Glieder, die gleich sind zufolge Vertauschbarkeit der Integrationen) anzuschreiben ist.

Wendet man diese Beziehung an, so gilt also

$$\underset{n}{I} = \frac{1}{n!} \sum_P \int_{t_0}^{t} dt_1 \ldots \int_{t_0}^{t} dt_n\, \sigma(t_{\alpha_1} - t_{\alpha_2})\sigma(t_{\alpha_2} - t_{\alpha_3}) \ldots \sigma(t_{\alpha_{n-1}} - t_{\alpha_n}) H(t_{\alpha_1}) H(t_{\alpha_2}) \ldots H(t_{\alpha_n})$$

$$= \frac{1}{n!}\, P\left\{ \int_{t_0}^{t} dt_1 \ldots \int_{t_0}^{t} dt_n\, H(t_1) H(t_2) \ldots H(t_n) \right\}$$

$$= \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \ldots \int_{t_0}^{t} dt_n\, P\{ H(t_1) H(t_2) \ldots H(t_n) \}$$

Es gilt also:

$$\underline{\underline{I_n = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, H(t_1) H(t_2) \ldots H(t_n) =}}$$

$$= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t} dt_n\, \sigma(t_1 - t_2)\sigma(t_2 - t_3) \ldots \sigma(t_{n-1} - t_n) H(t_1) H(t_2) \ldots H(t_n) =$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t} dt_n\, P\{ H(t_1) H(t_2) \ldots H(t_n) \}}}$$

Beispiel für $n = 2$: (Beachte: $H(t_1)$ kommutiert <u>nicht</u> mit $H(t_2)$!)

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2\, P\{H(t_1) H(t_2)\} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2\, \sigma(t_1 - t_2) H(t_1) H(t_2) + \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2\, \sigma(t_2 - t_1) H(t_2) H(t_1)$$

$$= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, H(t_1) H(t_2) + \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t} dt_1\, \sigma(t_2 - t_1) H(t_2) H(t_1) =$$

Dabei wurde im ersten $\int$ berücksichtigt, daß $\sigma(t_1 - t_2)$ nur für $t_2 \leq t_1$ nicht verschwindet, also von t_0 bis t_1 zu integrieren ist über t_2. Im zweiten Integral wurden die Integrationen vertauscht.

Das zweite Integral gibt aber einen Beitrag nur für $t_1 \leq t_2$, also wird man über t_1 nur bis t_2 integrieren. Somit ist

$$= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \, H(t_1)H(t_2) + \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \, H(t_2)H(t_1) =$$

Da man ja im 2. Integral $t_1 \longleftrightarrow t_2$ vertauschen kann (Bezeichnungsänderung)

$$= 2 \cdot \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \, H(t_1)H(t_2) \qquad \text{q.e.d.}$$

Jetzt von früher: $|\psi_t\rangle = U(t,t_0)|\psi_{t_0}\rangle$

Größen zur Zeit t werden aus Größen zur Zeit t_0 durch unitäre Transformation gewonnen. Für den Fall, daß H eine explizite Funktion der Zeit ist, mußte die Lösung von

$$j\hbar \frac{dU}{dt} = HU \quad , \quad AB: \; U(t_0,t_0) = 1$$

durch Iteration gewonnen werden, und sie lautete:

$$U(t,t_0) = 1 + \left(-\frac{j}{\hbar}\right) \int_{t_0}^{t} dt_1 \, H(t_1) + \left(-\frac{j}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \, H(t_1)H(t_2) +$$
$$+ \left(-\frac{j}{\hbar}\right)^3 \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \, H(t_1)H(t_2)H(t_3) + \dots$$

Kann man jetzt kompakt schreiben:

$$U(t,t_0) = P\left\{ \exp\left(-\frac{j}{\hbar} \int_{t_0}^{t} H(t')\,dt' \right) \right\}$$

Beweis:

$$U(t,t_0) = P\left\{ 1 + \left(-\frac{j}{\hbar}\right) \int_{t_0}^{t} dt_1 \, H(t_1) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{j}{\hbar}\right) \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \, H(t_1)H(t_2) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3!}\left(-\frac{j}{\hbar}\right) \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t} dt_3 \, H(t_1)H(t_2)H(t_3) + \dots \right\}$$

Das ist identisch mit obigem Ausdruck.

Für den Fall, daß H nicht von der Zeit abhängt, ist

$$U(t,t_0) = \exp\left(-\frac{j}{\hbar} H(t-t_0) \right) \quad \text{wie früher}$$

Wechselwirkungsdarstellung (Dirac-Bild)

Bisher: Schrödingerbild: Zustandsvektor bewegt sich, Operatoren (mit Ausnahmen) bleiben konstant.

Heisenbergbild: Zustandsvektoren bleiben erhalten, ~~und~~ die Operatoren (mit Ausnahmen) ändern sich.

Neu: Dirac-Bild: Sowohl Zustandsvektoren als auch Operatoren ändern sich.

Gehen aus von einem Erwartungswert.

$$\langle \psi_s(t) | A_s | \psi_s(t) \rangle = \langle \psi_0 | U^+ A_s U | \psi_0 \rangle \qquad \text{mit: } U = e^{-j\frac{H_s t}{\hbar}}$$

$$j\hbar \frac{dU}{dt} = H_s U$$

Jetzt sei: $H_s = H_{0s} + H_{1s}$ Hamiltonian im Schrödingerbild ist Summe aus einer „ungestörten" Funktion H_{0s} und der Störung H_{1s}.

Wir schreiben:

$$\langle \psi_0 | U^+ A_s U | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | U^+ V V^+ A_s V V^+ U | \psi_0 \rangle$$

und bezeichnen mit dem Index W die „Wechselwirkungsdarstellg"

$$\left.\begin{aligned} |\psi_W(t)\rangle &= V^+ U |\psi_0\rangle \\ A_W(t) &= V^+ A_s V \end{aligned}\right\} \qquad \langle A \rangle = \langle \psi_W(t) | A_W(t) | \psi_W(t) \rangle$$

wobei man über V noch verfügen kann (muß nur unitär sein).

Man wählt:

$$V(t) = e^{-j\frac{H_{0s} t}{\hbar}}, \quad \text{d.h. Lösg von} \quad j\hbar \frac{dV}{dt} = H_{0s} V$$

Bewegungsgl. für $A_W(t)$:

$$\underline{\frac{dA_W}{dt}} = \frac{dV^+}{dt} A_s V + V^+ A_s \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{j\hbar} V^+ H_{0s} A_s V + \frac{1}{j\hbar} V^+ A_s H_{0s} V$$

$$= \frac{1}{j\hbar} \left\{ (V^+ A_s V)(V^+ H_{0s} V) - (V^+ H_{0s} V)(V^+ A_s V) \right\}$$

$$= \underline{\frac{1}{j\hbar} \left[A_W(t), H_{0W}(t) \right]} = \frac{1}{j\hbar} \left[A_W(t), H_{0s} \right]$$

d.h. für W-Operator gilt eine „Heisenberggleichung", wobei ($H_{0W} = H_{0s}$!)

die W-Größen aus den Schrödingergrößen folgen:

$$B_W = V^+ B_s V, \quad \text{ergo: } H_{0W} = V^+ H_{0s} V = H_{0s}$$

Welche Gleichung genügt $|\psi_W(t)\rangle$?

$$|\psi_W(t)\rangle = V^+ U |\psi_0\rangle$$

$$\frac{d|\psi_W(t)\rangle}{dt} = \frac{dV^+}{dt} U|\psi_0\rangle + V^+ \frac{dU}{dt}|\psi_0\rangle =$$

$$= -\frac{1}{j\hbar} V^+ H_{0S} U|\psi_0\rangle + \frac{1}{j\hbar} V^+ (H_{0S} + H_{1S}) U|\psi_0\rangle =$$

$$= \frac{1}{j\hbar} V^+ H_{1S} U|\psi_0\rangle =$$

$$= \frac{1}{j\hbar}(V^+ H_{1S} V)(V^+ U|\psi_0\rangle)$$

$$= \frac{1}{j\hbar} H_{1W} |\psi_W(t)\rangle$$

ergo: $$j\hbar \frac{d}{dt}|\psi_W(t)\rangle = H_{1W}|\psi_W(t)\rangle$$

mit: $$H_{1W} = V^+ H_{1S} V$$

es gilt somit eine „Schrödingergleichung" für den Zustandsvektor.

Also: W-Operatoren bewegen sich gemäß einer „Heisenberggleichung", in der die ungestörte Hamiltonian vorkommt

W-Zustände bewegen sich gemäß einer Schrödingergleichg, in der die Hamiltonian $H_{1W} = V^+ H_{1S} V$ vorkommt.

Nachtrag zur Dirac-Darstellung: (für uns später gebraucht)

$H_S = H_{0S} + H_{1S}$ Schrödinger-Hamiltonian aufgespalten in zeitunabhängigen Teil H_{0S} und zeitabhängigen Teil H_{1S}.

Wir leiteten ab:

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_W(t)\rangle = H_{1W} |\psi_W(t)\rangle \qquad \text{mit } H_{1W} = e^{j\frac{H_{0S}t}{\hbar}} H_{1S}\, e^{-j\frac{H_{0S}t}{\hbar}} = V^+ H_{1S} V$$

Ansatz: $|\psi_W(t)\rangle = W(t)\,|\psi_W(0)\rangle$

gibt dgl:

$$j\hbar \frac{\partial W(t)}{\partial t} = H_{1W}\, W(t) \qquad AB:\ W(0) = 1$$

Diese Gleichung werden wir mittels T-Transformation lösen.

Da $|\psi_W(t)\rangle = V^+ U\,|\psi_W(0)\rangle = W(t)\,|\psi_W(0)\rangle$ $\qquad V = e^{-j\frac{H_{0S}t}{\hbar}}$

$|\psi_S(t)\rangle = U\,|\psi_S(0)\rangle = U\,|\psi_H\rangle = U\,|\psi_W(0)\rangle$ $\qquad U = P\left\{e^{-\frac{j}{\hbar}\int_0^t (H_{0S}+H_{1S})\,dt}\right\}$

folgt: $V^+ U = W(t)$

d.h.: $U = V\,W(t) = e^{-j\frac{H_{0S}t}{\hbar}}\, W(t)$

Ergo $\quad |\psi_S(t)\rangle = e^{-j\frac{H_{0S}t}{\hbar}}\, W(t)\, |\psi(0)\rangle$

$\left.\begin{matrix} S \\ H \\ W \end{matrix}\right\}$ alles gleich!

Damit Problem gelöst, Erwartungswerte mit $|\psi_S(t)\rangle$ und Schrödinger-Operatoren zu berechnen.

(Seite 28 fehlt wegen Irrtum in der Numerierung — Zählen ist halt doch nicht so leicht!)

Normalgeordnete Produkte; T-Transformation von Heffner & Louisell (J. Math. Phys. 6, 3, 474, März 65)

Bosonenoperatoren $[a_i, a_j^+] = \delta_{ij}$ $\qquad [a_i, a_j] = [a_i^+, a_j^+] = 0$

Normalordnungsoperator $\mathcal{N}$ oder : : bedeutet: Die Funktion wird so umgestellt, daß alle Erzeugungsoperatoren ~~links von den~~ links von den Vernichtungsoperatoren stehen, wobei auf die Vertauschungsrelationen nicht geachtet wird.

z. Bsp:

$$\mathcal{N}\{a_1 a_1^+ a_2^+ a_2\} = a_1^+ a_2^+ a_1 a_2$$

(Reihenfolge der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren untereinander belanglos, da sie kommutieren).

Beachte: im allg. ist

$$\mathcal{N}\{f(a, a^+)\} \neq f(a, a^+)$$

Definition der Normalform:

ist $\qquad \mathcal{N}\{f(a, a^+)\} = f(a, a^+)$

dann sagt man, die Funktion f ist in Normalform, und deutet das dadurch an, daß man $f^{(n)}(a, a^+)$ schreibt.

z. Bsp.

$$f(a, a^+) = aa^+ = a^+a + 1$$

$\mathcal{N}\{aa^+\} = a^+a$ $\quad$ ergo: aa^+ ist keine Normalform.

Aber: $\quad \mathcal{N}\{a^+a + 1\} = a^+a + 1$ $\quad$ ergo: $a^+a + 1$ ist Normalform.

Man schreibt:

$$(aa^+)^{(n)} = a^+a + 1 = f^{(n)}(a, a^+) = aa^+ = f(a, a^+)$$

Das heißt: Als Operator ist natürlich aa^+ gleichbedeutend mit $a^+a + 1$.

d.h.:

$$f(a, a^+) = f^{(n)}(a, a^+)$$

aber die beiden Funktionen sind nicht identisch in ihrer Form.

(Beachte: eine Gleichung kann falsch werden, wenn auf beiden Seiten der Normalordnungsoperator angewendet wird. Es ist ja

$$aa^+ = a^+a + 1$$

aber

$$\mathcal{N}\{aa^+\} \neq \mathcal{N}\{a^+a + 1\}$$

Gleichung bleibt bei Anwendung von $\mathcal{N}$ richtig, wenn beide Seiten in N-Form sind.

T-Transformation

Sinn: Jeder Operatorfunktion eineindeutig eine Funktion kommutierender Variablen zuordnen (damit Lösung von Dgl und Dgl von Operatoren ermöglicht).

$$T\{f(a^+,a)\} = \bar{f}(\bar{a}^+,\bar{a}) \qquad \bar{a}^+, \bar{a} \text{ kommutieren, dabei ist}$$

$$\bar{f}(\bar{a}^+,\bar{a}) = f^{(n)}(\bar{a}^+,\bar{a})$$

Ferner sei $\quad T\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\{Tf\}$

Definition der inversen Transformation:

$$T^{-1}\{\bar{f}(\bar{a}^+,\bar{a})\} = n\{\bar{f}^{(n)}(a^+,a)\}.$$

Ist Umkehrung wirklich eindeutig?

$$T^{-1}T\{f(a^+,a)\} = T^{-1}\{\bar{f}(\bar{a}^+,\bar{a})\} = T^{-1}\{f^{(n)}(\bar{a}^+,\bar{a})\}$$

$$= n\{f^{(n)}(a^+,a)\} = \underbrace{f^{(n)}(a^+,a) = f(a^+,a)}$$

Gleichheit als Operator, nicht natürlich in der Form.

ergo: $\quad T^{-1}T\{f(a^+,a)\} = f(a^+,a)$

oder $\quad T^{-1}T = 1$

genauso $\quad TT^{-1} = 1 \quad$ zu beweisen.

Was braucht man für:

Operatorgleichung $\rightarrow$ T-Transformation $\rightarrow$ Gleichung kommutierender Variablen $\rightarrow$ lösen $\rightarrow$ Funktion mit T^{-1} transformieren $\rightarrow$ man erhält Lösung der Operatorgleichung.

Man muß dazu beherrschen: Funktionen in Normalform bringen. Braucht dazu einige Beziehungen.

z. Bsp: Was ist $\quad \left(e^{a^+a}\right)^{(n)}$?

$e^{a^+a} = 1 + a^+a + \frac{1}{2!}a^+aa^+a + \frac{1}{3!}a^+aa^+aa^+a + \ldots$ man müßte so lange Kommutationsregeln benutzen, bis alle a^+ links stehen.

Man sieht:

Zu $f = e^{a^+a}$ $f^{(n)}$ finden ist schwer. Trivial ist natürlich, $n\{f\}$ zu finden.

$$n\{e^{a^+a}\} = n\{\Sigma \frac{(a^+a)^n}{n!}\} = \Sigma \frac{(a^+)^n(a)^n}{n!}$$

<u>Formeln über Bosonenoperatoren.</u>

$$\left\| \begin{aligned} e^{xa} f(a^+,a) e^{-xa} &= f(a^+ + x, a) \\ e^{-xa^+} f(a^+,a) e^{xa^+} &= f(a^+, a+x) \end{aligned} \right\|$$

Beweis: $e^{\xi A} f(B) e^{-\xi A} = f(e^{\xi A} B e^{-\xi A})$

$$e^{xa} f(a^+,a) e^{-xa} = f(e^{xa} a^+ e^{-xa}, e^{xa} a e^{-xa}) =$$
$$= f(e^{xa} a^+ e^{-xa}, a)$$

Ferner: $e^{\xi A} B e^{-\xi A} = B + \xi [A,B] + \frac{\xi^2}{2!} [A,[A,B]] + \ldots$

$$e^{xa} a^+ e^{-xa} = a^+ + x[a,a^+] + \frac{x^2}{2!}[a,[a,a^+]] + \ldots$$
$$= a^+ + x \cdot 1 + \frac{x^2}{2!}[a,1] + \ldots$$
$$= a^+ + x$$ einsetzen zeigt Richtigkeit.

$$\left\| e^{x a^+ a} f(a^+,a) e^{-x a^+ a} = f(a^+ e^{+x}, a e^{-x}) \right\|$$

kann nach der gleichen Methode bewiesen werden.

Definition der Ableitung nach einem Operator:

$$\left\| \frac{\partial f(a^+,a)}{\partial a^+} = \lim_{x \to 0} \frac{\partial f(a^+ + x, a)}{\partial x} \right\|$$

Damit 2 wichtige Sätze:

$$\left\| \begin{aligned} [a, f(a^+,a)] &= \frac{\partial f}{\partial a^+} \\ [a^+, f(a^+,a)] &= -\frac{\partial f}{\partial a} \end{aligned} \right\|$$

Beweis:

$$e^{xa} f(a^+, a)\, e^{-xa} = f(a^+ + x, a)$$ $\frac{\partial}{\partial x}$ auf beiden Seiten:

$$a\, e^{xa} f(a^+, a)\, e^{-xa} - e^{xa} f(a^+, a)\, e^{-xa} a = \frac{\partial}{\partial x} f(a^+ + x, a)$$

$\lim_{x\to 0}$ auf beiden Seiten:

$$a f(a^+, a) - f(a^+, a)\, a = [a, f] = \lim_{x\to 0} \frac{\partial}{\partial x} f(a^+ + x, a) = \frac{\partial f}{\partial a^+}$$

Andere Gl. analog zu beweisen. Diese Gl. werden verwendet, um andere Gl. in Normalform zu bringen.

Annahme: Funktion in Normalform $f^{(n)}$ gegeben. $a f^{(n)}$ ist nicht in Normalform. Es ist aber:

$$\Big\| \; \{a f^{(n)}(a^+, a)\}^{(n)} = \mathcal{N}\{(a + \tfrac{\partial}{\partial a^+}) f^{(n)}(a^+, a)\} \; \Big\|$$

Beweis:

$$[a, f^{(n)}] = \frac{\partial f^{(n)}}{\partial a^+}$$

$$a f^{(n)} = f^{(n)} a + \frac{\partial f^{(n)}}{\partial a^+}$$ rechte Seite ist in Normalform! kompakter schreiben

$$= \mathcal{N}\{(a + \tfrac{\partial}{\partial a^+}) f^{(n)}\}$$

Diese Formel kann verallgemeinert werden (da jede Operatorfunktion in Potenzreihe zu entwickeln ist)

$$\Big\| \; \{g(a) f^{(n)}(a^+, a)\}^{(n)} = \mathcal{N}\{g(a + \tfrac{\partial}{\partial a^+})\, f^{(n)}(a^+, a)\} \; \Big\|$$

oder, wenn $g^{(n)}(a^+, a)$ eine andere Funktion in Normalform ist,

$$\Big\| \; \{g^{(n)}(a^+, a) f^{(n)}(a^+, a)\}^{(n)} = \mathcal{N}\{g^{(n)}(a^+, a + \tfrac{\partial}{\partial a^+})\, f^{(n)}(a^+, a)\} \; \Big\|$$

z. Bsp:

$$\{\underbrace{a^+ a}_{g^{(n)}} \underbrace{(a^+ + a)}_{f^{(n)}}\}^{(n)} = \mathcal{N}\{a^+ (a + \tfrac{\partial}{\partial a^+})(a^+ + a)\}$$

$$= \mathcal{N}\{a^+ a a^+ + a^+ a^2 + a^+\}$$

$$= a^{+2} a + a^+ a^2 + a^+$$

Weiteres Beispiel:

$$\{e^{xa} f^{(n)}(a^+,a)\}^{(n)} = ?$$

Wendet man Formel Seite 32 an, folgt:

$$e^{xa} f^{(n)}(a^+,a)\, e^{-xa} = f^{(n)}(a^+ + x, a)$$

$$\left\| \; e^{xa} f^{(n)}(a^+,a) = \underbrace{f^{(n)}(a^+ + x, a)\, e^{xa}} = \{e^{xa} f^{(n)}(a^+,a)\}^{(n)} \; \right\|$$

Da dieser Ausdruck ja in N-Form ist.

Wendet man Formel Seite 33 an, folgt:

$$\{e^{xa} f^{(n)}(a^+,a)\}^{(n)} = \mathcal{N}\left\{ e^{xa + x\frac{\partial}{\partial a^+}} f^{(n)}(a^+,a) \right\}$$

Da $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$ und $[a, \frac{\partial}{\partial a^+}] = 0$

$$= \mathcal{N}\left\{ e^{xa} e^{x\frac{\partial}{\partial a^+}} f^{(n)}(a^+,a) \right\} = \text{wegen Vergleich mit oben} =$$

$$= f^{(n)}(a^+ + x, a)\, e^{xa}$$

Man müßte beweisen können, daß die Ausdrücke gleich sind.

$$\mathcal{N}\left\{ e^{xa} e^{x\frac{\partial}{\partial a^+}} f^{(n)}(a^+,a) \right\} = \underbrace{e^{x\frac{\partial}{\partial a^+}} f^{(n)}(a^+,a)}_{\text{Was ist das?}}\, e^{xa}$$

$$f^{(n)}(a^+,a) = \sum c_{mn} (a^+)^m (a)^n$$

$$e^{x\frac{\partial}{\partial a^+}} f^{(n)}(a^+,a) = \sum c_{mn} \left(1 + x\frac{\partial}{\partial a^+} + \frac{x^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial a^{+2}} + \ldots \right)(a^+)^m (a)^n =$$

$$= \sum c_{mn} \Big[a^{+m} + m x\, a^{+(m-1)} + \frac{1}{2!} x^2 m(m-1)\, a^{+(m-2)} + \ldots$$

$$+ \ldots \frac{1}{m!} x^m m(m-1)(m-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 (a^+)^0 \Big] a^n =$$

$$= \sum c_{mn} (a^+ + x)^m a^n = f^{(n)}(a^+ + x, a)$$

Damit obige Identität bewiesen.

$f^{(n)}(a^+a)\,a^+$ ist sicher nicht in N-Form. Aber mit Hilfe der Vertauschungsrelation Seite 32 unten erhält man

$$\{f^{(n)}(a^+,a)\,a^+\}^{(n)} = \mathcal{N}\{f^{(n)}(a^+,a)\,(a^+ + \overleftarrow{\tfrac{\partial}{\partial a}})\}$$

Der Pfeil bedeutet dabei, daß die Differentiation auf alle a anzuwenden ist, die in der linken Funktion $f^{(n)}$ stehen. Man könnte auch schreiben

$$= \mathcal{N}\{(a^+ + \tfrac{\partial}{\partial a})\,f^{(n)}(a^+,a)\}$$

Verallgemeinerung:

$$\{f^{(n)}(a^+,a)\,g(a^+)\}^{(n)} = \mathcal{N}\{f^{(n)}(a^+,a)\,g(a^+ + \overleftarrow{\tfrac{\partial}{\partial a}})\} = \\ = \mathcal{N}\{g(a^+ + \tfrac{\partial}{\partial a})\,f^{(n)}(a^+,a)\}$$

Weitere Verallgemeinerung:

$$\{f^{(n)}(a^+,a)\,g^{(n)}(a^+,a)\}^{(n)} = \mathcal{N}\{f^{(n)}(a^+,a)\,g^{(n)}(a^+ + \overleftarrow{\tfrac{\partial}{\partial a}}, a)\} \\ = \mathcal{N}\{g^{(n)}(a^+ + \tfrac{\partial}{\partial a}, a)\,f^{(n)}(a^+,a)\}$$

Man sieht: hier müßte man bei der zweiten Schreibweise dazusagen, daß $\partial/\partial a$ nicht auf die a's in $g^{(n)}$, sondern nur auf die in $f^{(n)}$ anzuwenden ist. Daher Schreibweise $\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial a}}$ besser, man sieht, daß nur $f^{(n)}$ zu differenzieren ist.

Aus diesen Relationen leitet man folgende Beziehungen für die T-Transformation ab:

$$T\{g(a^+,a)\,f(a^+,a)\} = g^{(n)}(\bar{a}^+, \bar{a} + \tfrac{\partial}{\partial \bar{a}^+})\,f^{(n)}(\bar{a}^+,\bar{a}) = \\ = f^{(n)}(\bar{a}^+ + \tfrac{\partial}{\partial \bar{a}}, \bar{a})\,g^{(n)}(\bar{a}^+,\bar{a})$$

Beachte: $\frac{\partial}{\partial a}$ bezieht sich auf andere Funktion!

$$T\{g(a^+,a)\,f(a^+,a)\} = g^{(n)}(\bar{a}^+, \bar{a} + \tfrac{\partial}{\partial \bar{a}^+})\;T\{f(a^+,a)\} = \\ = f^{(n)}(\bar{a}^+ + \tfrac{\partial}{\partial \bar{a}}, \bar{a})\;T\{g(a^+,a)\}$$

$\frac{\partial}{\partial a}$ bezieht sich wieder auf nächste Funktion.

Zur Erläuterung der verschiedenen Formeln auf Seite 33 u. 35:

$$\{(a^+a)(a^+a^2)\}^{(n)} = ?$$

a) Mit Vertauschungsrelationen

$$a^+a\,a^+a^2 = a^+(1+a^+a)a^2 = a^+a^2 + a^{+2}a^3 = N\text{-Form}$$

b) Seite 33:

$$\{(a^+a)(a^+a^2)\}^{(n)} = \mathcal{N}\left\{a^+\left(a+\frac{\partial}{\partial a^+}\right)a^+a^2\right\}$$

$$= \mathcal{N}\{a^+(aa^+a^2 + a^2)\} = \mathcal{N}\{a^+aa^+a^2 + a^+a^2\} =$$

$$= a^{+2}a^3 + a^+a^2$$

c) Seite 35, erste Schreibweise

$$\{(a^+a)(a^+a^2)\}^{(n)} = \mathcal{N}\left\{a^+a\left(a^+ + \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial a}}\right)a^2\right\} = \mathcal{N}\{(a^+aa^+ + a^+)a^2\} =$$

$$= \mathcal{N}\{a^+aa^+a^2 + a^+a^2\} =$$

$$= a^{+2}a^3 + a^+a^2$$

d) Seite 35, zweite Schreibweise.

$$\{(a^+a)(a^+a^2)\}^{(n)} = \mathcal{N}\left\{\left(a^+ + \frac{\partial}{\partial a}\right)a^2(a^+a)\right\} = \mathcal{N}\left\{a^+a^2a^+a + \frac{\partial}{\partial a}a^2a^+a\right\}$$

$$= \mathcal{N}\{a^+a^2a^+a + a^2a^+\} = a^{+2}a^3 + a^+a^2$$

Beispiel:

$$\{f^{(n)}(a^+,a)\,e^{xa^+}\}^{(n)} = ?$$

1) Leicht zu beweisen mit Formel auf S. 32

$$e^{-xa^+}f^{(n)}(a^+,a)\,e^{xa^+} = f^{(n)}(a^+,a+x)$$

ergo: $$\left\|\ \{f^{(n)}(a^+,a)\,e^{xa^+}\}^{(n)} = e^{xa^+}f^{(n)}(a^+,a+x)\ \right\|$$

2) Anwendung der Formel S. 35

$$\{f^{(n)}(a^+,a)\,e^{xa^+}\}^{(n)} = \mathcal{N}\left\{e^{xa^+ + x\frac{\partial}{\partial a}}f^{(n)}(a^+,a)\right\} = \quad \text{Da } \left[a^+,\frac{\partial}{\partial a}\right] = \emptyset =$$

$$= \mathcal{N}\left\{e^{xa^+}e^{x\frac{\partial}{\partial a}}f^{(n)}(a^+,a)\right\} \quad \text{Wirkung von } e^{x\frac{\partial}{\partial a}} \text{ beweisen analog Seite 34 unten}$$

$$= e^{xa^+}f^{(n)}(a^+,a+x) \qquad \text{q.e.d.}$$

Weiterer wichtiger Satz: Normalform von Funktionen vom Produkt a^+a.

$$\{f(a^+a)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k f(0)}{k!}(a^+)^k a^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{k} \frac{(-1)^s f(k-s)}{(k-s)!\,s!}(a^+)^k a^k$$

Dabei ist:

$$\Delta^0 f(0) = f(0)$$

$$\Delta^1 f(0) = f(1) - f(0)$$

$$\Delta^2 f(0) = \Delta^1 f(1) - \Delta^1 f(0) = f(2) - f(1) - f(1) + f(0) =$$

$$= f(2) - 2f(1) + f(0)$$

$$\vdots$$

$$\Delta^k f(0) = \sum_{s=0}^{k} \frac{k!\,(-1)^s}{(k-s)!\,s!} f(k-s)$$

Beweis (skizziert) $\quad f^{(n)}(a^+a) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (a^+)^k a^k \quad$ N-Form.

Durch wiederholte Anwendung der Vertauschungsrelationen sieht man

$$a^{+k}a^k = a^+a\,(a^+a-1)(a^+a-2)\ldots\ldots(a^+a-k+1)$$

ergo: $\quad f^{(n)}(a^+a) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, a^+a\,(a^+a-1)\ldots\ldots(a^+a-k+1)$

ist nun $a^+a|n\rangle = n|n\rangle$, so folgt

$$f^{(n)}(a^+a)|n\rangle = f(n)|n\rangle = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda\, n(n-1)\ldots(n-\lambda+1)|n\rangle$$

d.h. $\quad f(n)|n\rangle = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda \frac{n!}{(n-\lambda)!}|n\rangle$

Daraus durch Vergleich Koeff. ermitteln.

$$f(0) = c_0$$

$$f(1) = c_0 + c_1 \qquad \text{usw. obige Formel folgt.}$$

Beispiel $\quad f(a^+a) = e^{xa^+a}$

$$\{e^{xa^+a}\}^{(n)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\lambda} \frac{(-1)^s e^{x(\lambda-s)}}{(\lambda-s)!\,s!}(a^+)^\lambda a^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda!}e^{x\lambda}\sum_{s=0}^{\lambda} \frac{\lambda!\,(-e^{-x})^s}{(\lambda-s)!\,s!}a^{+\lambda}a^\lambda$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda!}e^{x\lambda}\cdot(1-e^{-x})^\lambda a^{+\lambda}a^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(e^x-1)^\lambda}{\lambda!}a^{+\lambda}a^\lambda =$$

$$= \mathcal{N}\left\{\exp[(e^x-1)a^+a]\right\}$$

Daraus folgt also $\{e^{xa^+a}\}^{(n)} = n\{e^{(e^x-1)a^+a}\}$

Damit können Ausdrücke wie $\frac{\partial}{\partial a^+} e^{xa^+a}$ berechnet werden. (Übung: es muss herauskommen:

$$\frac{\partial e^{xa^+a}}{\partial a^+} = e^{xa^+a} a(e^x-1) = a(1-e^{-x})e^{xa^+a}$$ zur Übung rechnen)

Ableitung von $\{e^{xa^+a}\}^{(n)} = n\{e^{(e^x-1)a^+a}\}$ mittels T-Trafo:

$$f = e^{xa^+a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a^+af$$

$$T\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\} = T\{a^+af\}$$ gemäß Seite 35

$$\frac{\partial}{\partial x}T\{f\} = \bar{a}^+\left(\bar{a}+\frac{\partial}{\partial\bar{a}^+}\right)T\{f\} \qquad T\{f\} = \bar{f}(\bar{a}^+,\bar{a})$$

ergo Dgl:

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial x} = \bar{a}^+\bar{a}\bar{f} + \bar{a}^+\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{a}^+}$$ ist zu lösen.

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial x} - \bar{a}^+\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{a}^+} = \bar{a}^+\bar{a}\bar{f}$$

$$dx : d\bar{a}^+ : d\bar{f} = 1 : -\bar{a}^+ : \bar{a}^+\bar{a}\bar{f}$$ gibt Charakteristiken

$$\frac{dx}{d\bar{a}^+} = -\frac{1}{\bar{a}^+} \longrightarrow \text{Lösg: } c_1 = \frac{e^{-x}}{\bar{a}^+}$$

$$\frac{d\bar{a}^+}{d\bar{f}} = -\frac{1}{\bar{a}\bar{f}} \longrightarrow \text{Lösg: } c_2 = \frac{e^{-\bar{a}\bar{a}^+}}{\bar{f}}$$

Allgemeine Lösung: $\varphi\left\{\frac{e^{-x}}{\bar{a}^+}, \frac{e^{-\bar{a}^+\bar{a}}}{\bar{f}}\right\} = \emptyset$

oder: $$\frac{e^{-\bar{a}^+\bar{a}}}{\bar{f}} = g\left(\frac{e^{-x}}{\bar{a}^+}\right)$$

oder: $$\bar{f} = e^{-\bar{a}^+\bar{a}}\cdot\frac{1}{g\left(\frac{e^{-x}}{\bar{a}^+}\right)}$$ Lösung.

Jetzt muß noch die Funktion g bestimmt werden.

AB: $f(x=0)=1$

$$1 = e^{-\bar{a}^+\bar{a}} \cdot \frac{1}{g\left(\frac{1}{\bar{a}^+}\right)} \longrightarrow g\left(\frac{1}{\bar{a}^+}\right) = e^{-\bar{a}/\left(\frac{1}{\bar{a}^+}\right)}$$

damit: $$\bar{f} = e^{-\bar{a}^+\bar{a}} \cdot \frac{1}{e^{-\bar{a}/\left(\frac{e^{-x}}{\bar{a}^+}\right)}} = e^{-\bar{a}^+\bar{a}} \cdot e^{e^x\bar{a}^+\bar{a}} = e^{(e^x-1)\bar{a}^+\bar{a}}$$

Rücktransformation: $$T^{-1}\{\bar{f}(\bar{a}^+,\bar{a})\} = \mathcal{N}\{\bar{f}(\bar{a}^+,\bar{a})\}$$

Folge Lösg: $$e^{xa^+a} = \mathcal{N}\left\{e^{(e^x-1)a^+a}\right\} = \left\{e^{xa^+a}\right\}^{(n)}$$

Beispiel

Die erzwungene, quantisierte Schwingung.

Die Nullpunktsenergie wird unterdrückt.

frei: $H = \frac{1}{2}(p^2+\omega^2q^2)$ $\longrightarrow$ $$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} = p \\ \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} = \omega^2 q \end{array}\right\} \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

erzwungen: $H = \frac{1}{2}(p^2+\omega^2q^2) + qf(t)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} = p \\ \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} = \omega^2 q + f(t) \end{array}\right\} \ddot{q} + \omega^2 q = -f(t)$$

Da q proportional $a^+ + a$ (Konstante werden in den Normierungsfaktor von $f(t)$ gezogen) haben wir

$$H = \hbar\omega\left(a^+a + \tfrac{1}{2}\right) + \hbar f(t)(a + a^+)$$

Mit Unterdrücken der Nullpunktsenergie

$$H = \hbar\omega a^+a + \hbar f(t)(a+a^+) = H_{0S} + H_{1S}$$

Gesucht:

$$|\psi_S(t)\rangle = e^{-j\frac{H_{0S}(t-t_0)}{\hbar}} W(t,t_0)\,|\psi(t=t_0)\rangle$$

mit

$$j\hbar \frac{\partial W(t,t_0)}{\partial t} = H_{1W}\, W(t,t_0)$$

$$H_{1W} = e^{j\frac{H_{0S}(t-t_0)}{\hbar}} H_{1S}\, e^{-j\frac{H_{0S}(t-t_0)}{\hbar}}$$

Damit: $V = e^{-j\frac{H_{0S}(t-t_0)}{\hbar}} = e^{-j\omega(t-t_0)a^+a}$

$$H_{1W} = e^{j\omega(t-t_0)a^+a}\,\hbar f(t)\,(a+a^+)\,e^{-j\omega(t-t_0)a^+a} =$$

$$= \hbar f(t)\cdot\left[a e^{-j\omega(t-t_0)} + a^+ e^{j\omega(t-t_0)}\right]$$

weil $e^{\kappa a^+a} f(a^+,a)\, e^{-\kappa a^+a} = f(a^+e^{\kappa}, a e^{-\kappa})$

Bezeichnung:

$$g(t) = f(t)\, e^{-j\omega(t-t_0)}$$

Damit

$$H_{1W} = \hbar\,(a g(t) + a^+ g^*(t))$$

Lösung gesucht von:

$$j\hbar \frac{\partial W(t,t_0)}{\partial t} = \hbar\left[a g(t) + a^+ g^*(t)\right] W(t,t_0) \qquad AB:\ W(t_0,t_0) = 1$$

d.h.:

$$j\frac{\partial W}{\partial t} = \left\{a g(t) + a^+ g^*(t)\right\} W(t,t_0)$$

T-Transformation anwenden, mit $T\{W\} = \overline{W}$ gilt:

$$j\frac{\partial \overline{W}}{\partial t} = \left\{\left(\bar{a} + \frac{\partial}{\partial \bar{a}^+}\right) g(t) + \bar{a}^+ g^*(t)\right\}\overline{W}$$

Ansatz: $\overline{W} = e^{\bar{S}(t,\bar{a},\bar{a}^+)}$ einsetzen

$$j\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = \bar{a} g(t) + g(t)\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{a}^+} + \bar{a}^+ g^*(t)$$

Ansatz:

$$\bar{S}(t,\bar{a},\bar{a}^+) = A(t) + B(t)\,\bar{a} + C(t)\,\bar{a}^+$$

$$jA'(t) + jB'(t)\,\bar{a} + jC'(t)\,\bar{a}^+ = \bar{a} g(t) + g(t) C(t) + \bar{a}^+ g^*(t)$$

Vergleich der Koeffizienten:

$$\left.\begin{aligned} jA'(t) &= g(t)\,C(t) \\ jB'(t) &= g(t) \\ jC'(t) &= g^*(t) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} B(t) &= -j\int_{t_0}^{t} g(t')\,dt' \\ C(t) &= -j\int_{t_0}^{t} g^*(t')\,dt' = -B^*(t) \\ A(t) &= -\int_{t_0}^{t} g(t')\,dt' \int_{t_0}^{t'} g^*(t'')\,dt'' \end{aligned}\right\}$$

Integrationsgrenzen daher: für $t=t_0$ muß $\bar S(t,\bar a,\bar a^+)=0$ sein, da ja $\overline{W}(t_0,t_0)=e^{\bar S}=1$ sein muß.

Beachte: $A(t)+A^*(t) = -C(t)C^*(t)$!
(Beweis: wie bei zeitgeordneten Produkten)

Lösung daher:

$$\overline{W}(t,\bar a,\bar a^+) = e^{A(t)+B(t)\bar a + C(t)\bar a^+} = e^{A(t)}\,e^{B(t)\bar a}\,e^{C(t)\bar a^+}$$

(da keine Operatoren)

Rücktransformation:

$$W(t,t_0) = T^{-1}\{\overline{W}(t,\bar a,\bar a^+)\} = \mathcal{N}\{\overline{W}(t,a,a^+)\}$$

$$= \mathcal{N}\{e^{A(t)}\,e^{B(t)a}\,e^{C(t)a^+}\} = e^{A(t)}\,e^{C(t)a^+}\,e^{B(t)a}$$

Die gesuchte Transformation

$$|\psi_S(t)\rangle = U(t,t_0)\,|\psi(t=t_0)\rangle$$

ist aber

$$U(t,t_0) = V\,W(t,t_0)$$

$$U(t,t_0) = e^{-j\omega(t-t_0)a^+a}\,e^{C(t)a^+}\,e^{B(t)a}\,e^{A(t)}$$

Man könnte (wenn es Spaß macht) diesen Operator noch in Normalform bringen.

$$e^{xa^+a} f(a^+,a)\,e^{-xa^+a} = f(a^+e^x, a e^{-x})$$

$$e^{xa^+a} f(a^+) = f(a^+e^x)\,e^{xa^+a}$$

$$U(t,t_0) = \exp\left[a^+C(t)\,e^{-j\omega(t-t_0)}\right] e^{-j\omega(t-t_0)a^+a}\,e^{B(t)a}\,e^{A(t)}$$

$$= e^{A(t)}\exp\left[a^+C(t)\,e^{-j\omega(t-t_0)}\right]\mathcal{N}\left\{\exp\left[\left(e^{-j\omega(t-t_0)}-1\right)a^+a\right]\right\} e^{B(t)a}$$

Problem: Erzwungene Schwingung des Oszillators, der zur Zeit $t_0 = 0$ im Vakuumzustand $|0\rangle$ sei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß zur Zeit $t > 0$ m Photonen (= Quanten) im Oszillator vorhanden sind?

m Photonen: Die Komponente von $|\psi_S(t)\rangle$ in Richtung $|m\rangle$ interessant.

Statistischer Operator: $\rho_S(t) = |\psi_S(t)\rangle\langle\psi_S(t)|$

Projektionsoperator auf $|m\rangle$: $|m\rangle\langle m| = P_m$

Wahrscheinlichkeit = Erwartungswert von P_m

$$w(m) = \mathrm{tr}\{\rho_S(t) P_m\} = \mathrm{tr}\{|\psi_S(t)\rangle\langle\psi_S(t)|m\rangle\langle m|\}$$

$$= |\langle\psi_S(t)|m\rangle|^2 = |\langle m|\psi_S(t)\rangle|^2$$

$$|\psi_S(t)\rangle = U(t)|0\rangle = e^{-j\omega t a^+ a} e^{C(t)a^+} e^{B(t)a} e^{A(t)} |0\rangle$$

Beachte: $e^{xa}|0\rangle = |0\rangle$ da ja $a|0\rangle = 0$ ist.

Ergo:
$$|\psi_S(t)\rangle = e^{-j\omega t a^+ a} e^{C(t)a^+} e^{A(t)} |0\rangle$$

$$\langle m|\psi_S(t)\rangle = \langle m| e^{-j\omega t a^+ a} e^{C(t)a^+} e^{A(t)} |0\rangle =$$

$$= e^{A(t)} e^{-j\omega t m} \langle m| e^{C(t)a^+} |0\rangle =$$

$$= e^{A(t)} e^{-j\omega t m} \langle m| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C(t)^n a^{+n}}{n!} |0\rangle =$$

nun ist ja $|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$, ergo gilt weiter

$$= e^{A(t)} e^{-j\omega t m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C(t)^n}{\sqrt{n!}} \langle m|n\rangle =$$

$$= e^{A(t)} \frac{[C(t) e^{-j\omega t}]^m}{\sqrt{m!}}$$

$$w(n) = |\langle n|\psi_s(t)\rangle|^2 = e^{A(t)+A^*(t)} \frac{[|C(t)|^2]^n}{n!}$$

$$= \frac{[|C(t)|^2]^n}{n!} e^{-|C(t)|^2}$$

Wichtiges Ergebnis: Poissonverteilung $\frac{(\bar{n})^n}{n!} e^{-\bar{n}}$, wobei die zu erwartende Anzahl von Quanten im Oszillator zur Zeit t durch $|C(t)|^2$ gegeben ist.
(Wellenpaket minimaler Ausdehnung, sog. kohärenter Zustand des Feldes, korrespondiert dem klassischen idealen Sinus!)

Behandlung von Drehimpuls und Spin.

Die T-Transformation ist in bisheriger Form nur dann anwendbar, wenn die Hamiltonian durch Bosonen-Operatoren ausgedrückt werden kann. Man kann nun Drehimpulsoperatoren durch Bosonenoperatoren ausdrücken, und damit auch Spin mit bisherigem Formalismus behandeln.

Wir definieren für das i-te Teilchen Bosonenoperatoren b_i, b_i^+, c_i, c_i^+:

$$[b_i, b_j^+] = [c_i, c_j^+] = \delta_{ij}$$

$$[b_i, b_j] = [b_i^+, b_j^+] = [b_i, c_j] = [b_i, c_j^+] = [c_i, c_j] = [c_i^+, c_j^+] = 0$$

Dann ist der Drehimpuls des i-ten Teilchens in Richtung 1, 2, 3 (Index i wieder fallen, wir betrachten der Einfachheit halber nur 1 Teilchen)

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \tfrac{1}{2}(c^+b + b^+c) \\ J_2 &= \tfrac{1}{2}j(c^+b - b^+c) \\ J_3 &= \tfrac{1}{2}(b^+b - c^+c) \end{aligned}\right\}$$

Man überzeuge sich, daß tatsächlich gilt $[J_i, J_j] = j\varepsilon_{ijk}J_k$, also richtige Vertauschungsrelationen des Drehimpulses. (unser J ist tatsächlicher Drehimpuls dividiert durch $\hbar$!)

Quadrat des Drehimpulses wird

$$(J)^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = S(S+1) \quad \text{mit}$$

$$S = \tfrac{1}{2}(b^+b + c^+c)$$

Damit alles schon gelöst.
Da b^+b und c^+c als Bosonen-Anzahloperatoren die Eigenwerte $0, 1, 2, 3 \ldots n$ haben, hat der Operator S die Eigenwerte

Eigenwerte von S: $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2 \ldots \frac{1}{2}n = j$

Eigenwerte von $\vec{J}^2 = S(S+1)$: $j(j+1)$, mit $j = 0, \frac{1}{2}, 1 \dots \frac{1}{2}n$

Eigenwerte von $J_3 = \frac{1}{2}(b^+b - c^+c)$: $m = -j, -j+1, \dots, j-2, j-1, j$

$(2j+1)$ Werte von m für 1 j.

Wieso? Beispiel:

$j = 1$; d.h. Eigenwert von S ist 1, d.h. es gibt folgende Kombinationen der Eigenwerte (EW)

a) EW von b^+b ist 0, EW von c^+c ist 2
b) EW von b^+b ist 1, EW von c^+c ist 1
c) EW von b^+b ist 2, EW von c^+c ist 0

in allen 3 Fällen ist EW von S 1, EW von $\vec{J}^2$ ist 2.

Welche EW hat $J_3 = \frac{1}{2}(b^+b - c^+c)$?

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a) EW von } J_3 \text{ ist } \frac{1}{2}(0-2) = -1 \\ \text{b) EW von } J_3 \text{ ist } \frac{1}{2}(1-1) = 0 \\ \text{c) EW von } J_3 \text{ ist } \frac{1}{2}(2-0) = +1 \end{array}\right\} \text{ 2j+1 Werte, von } -j \text{ bis } +j.$$

Für Spin ist: $j = \frac{1}{2}$. $m = \pm\frac{1}{2}$.

Der Zustand des i-ten Teilchens ist gegeben durch Angabe von j und von m (d.h. des Betrages des Drehimpulses und der 3-Komponente des Impulses)

$|j, m\rangle$.

Angegeben werden diese Zustände aber nicht in der Form $|j, m\rangle$, sondern folgendermaßen:

Hilbertraum aufgebaut durch Zustände von b^+b: $b^+b|n_b\rangle = n_b|n_b\rangle$
und durch Zustände von c^+c: $c^+c|n_c\rangle = n_c|n_c\rangle$

Jetzt ist aber:

$$\left.\begin{array}{l} j = \frac{1}{2}(n_b + n_c) \\ m = \frac{1}{2}(n_b - n_c) \end{array}\right\} \text{ Daraus: } \begin{array}{l} n_b = j+m \\ n_c = j-m \end{array}$$

Man gibt den Zustand im Hilbertraum $|n_b, n_c\rangle$ an, also durch die Zustände

$$|j+m, j-m\rangle = |n_b, n_c\rangle$$

Wir erinnern uns, daß für Bosonen $|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$

Ergo:

$$|j+m, j-m\rangle = \frac{(b^+)^{j+m}(c^+)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}|0,0\rangle$$

wobei $|0,0\rangle$ der Vakuumzustand ist.

Diese Darstellung ist sehr praktisch: bildet man

$b^k c^l |j+m, j-m\rangle$ so erhält man Θ für $k+l > 2j$ (sicher)

weil ja b^k auf $|j+m, ..\rangle$ Θ gibt für $k > j+m$
und c^l auf $|j+\cdot, j-m\rangle$ Θ gibt für $\underline{l > j-m}$

$k+l > 2j$.

D.h.: jedes normalgeordnete Produkt, welches mehr als $k+l \geq 2j$ Vernichtungsoperatoren für 1 Teilchen besitzt, gibt in seiner Wirkung auf die Zustandsfunktion $|j+m, j-m\rangle$ als Ergebnis Θ.

Das ist klar: Drehimpulsraum ist nur ein kleiner Unterraum des gesamten Hilbertraums der Bosonenzustände $|n_b, n_c\rangle$.

z.B. Spin: $j = \frac{1}{2}$, $m = \pm\frac{1}{2}$.

Zustände: $|j+m, j-m\rangle$: $\left.\begin{array}{l} |1,0\rangle \to |+\rangle \\ |0,1\rangle \quad\;\; |-\rangle \end{array}\right\}$ in früherer Bedeutung.

<u>Beispiel: Spin im HF-Magnetfeld.</u>

Hamiltonian: $\mathcal{H} = +\frac{1}{2}\gamma\hbar \vec{H}\cdot\vec{\sigma}$

wobei $[\sigma_i, \sigma_j] = 2j\varepsilon_{ijk}\sigma_k$; mit $\sigma_i = 2J_i$

folgt $[J_i, J_j] = j\varepsilon_{ijk}J_k$ (unsere Vertauschungsrelationen).

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\gamma\hbar\vec{H}\cdot 2\vec{J} = \gamma\hbar\vec{H}\cdot\vec{J}$$

$$\vec{H} = (H_1\cos\omega t, H_1\sin\omega t, H_0)$$

$$\mathcal{H} = \gamma\hbar[H_0 J_3 + H_1\cos\omega t\, J_1 + H_1\sin\omega t\, J_2] \quad \text{mit } \gamma H_0 = \omega_0$$

mit Trafo auf Seite 43 folgt:

$\frac{1}{2}\gamma\hbar$ $\quad \frac{1}{2}\gamma H_1 = \varkappa$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\gamma\hbar H_1 (c^+ b e^{j\omega t} + b^+ c e^{-j\omega t}) + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 (b^+ b - c^+ c)$$

$$|\psi_s(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle \qquad j\hbar\frac{\partial U}{\partial t} = \mathcal{H}U \quad \text{lösen.}$$

T-Transformation: Da $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(n)}$, und $T\{g(a^+, a) f(a^+, a)\} = g^{(n)}(\bar{a}^+, \bar{a} + \frac{\partial}{\partial \bar{a}^+})\, T\{f(a^+, a)\}$
$T\{U\} = \bar{U}$, folgt:

$$\hbar j\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \Big\{\frac{1}{2}\gamma\hbar H_1\Big[\bar{c}^+\Big(\bar{b} + \frac{\partial}{\partial\bar{b}^+}\Big)e^{j\omega t} + \bar{b}^+\Big(\bar{c} + \frac{\partial}{\partial\bar{c}^+}\Big)e^{-j\omega t}\Big] + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\Big[\bar{b}^+\Big(\bar{b} + \frac{\partial}{\partial\bar{b}^+}\Big) -$$
$$- \bar{c}^+\Big(\bar{c} + \frac{\partial}{\partial\bar{c}^+}\Big)\Big]\Big\}\bar{U}$$

Ansatz: $\bar{U} = e^{S}$ gibt Dgl:

$$j\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2}\gamma H_1\left(\bar{b}^+\bar{c}\,e^{-j\omega t} + \bar{b}^+\frac{\partial S}{\partial \bar{c}^+}e^{-j\omega t} + \bar{c}^+\bar{b}\,e^{j\omega t} + \bar{c}^+\frac{\partial S}{\partial \bar{b}^+}e^{j\omega t}\right) +$$

$\frac{\varkappa}{2}$

$$+\frac{\omega_0}{2}\left(\bar{b}^+\bar{b} + \bar{b}^+\frac{\partial S}{\partial \bar{b}^+} - \bar{c}^+\bar{c} - \bar{c}^+\frac{\partial S}{\partial \bar{c}^+}\right)$$

Lösungsansatz: (klar, es können nur Produkte der Variablen vorkommen, wobei mindestens eine ein Vernichtungs- oder Erzeugungsoperator sein muß):

$$S = [A(t)-1]\,\bar{b}^+\bar{b} + [B(t)-1]\,\bar{c}^+\bar{c} + D\,\bar{b}^+\bar{c} + E\,\bar{c}^+\bar{b}$$

Vergleich der Koeffizienten gibt 4 Dgln für die Größen A, B, D, E, welche mit den Anfangsbedingungen

$$S = 0 \text{ bei } t = 0 \quad : \quad \begin{array}{l} A(0) = B(0) = 1 \\ D(0) = E(0) = 0 \end{array}$$

zu lösen sind. Sie lauten:

$$A = B^* = \frac{\gamma H_1}{W}e^{-\frac{1}{2}j\omega t}\sin\left(\tfrac{1}{2}Wt + \phi\right)$$

$$D = -E^* = \frac{j\gamma H_1}{W}e^{-\frac{1}{2}j\omega t}\sin\left(\tfrac{1}{2}Wt\right)$$

wobei:
$$W = \sqrt{(\gamma H_1)^2 + (\omega-\omega_0)^2}$$
$$\tan\phi = -\frac{jW}{\omega-\omega_0}$$

Lösung:

$$U = \mathcal{N}\left\{e^{(A-1)b^+b}\,e^{(B-1)c^+c}\,e^{Db^+c}\,e^{Ec^+b}\right\}$$

Jetzt spezialisieren auf Spin: $j = \frac{1}{2}$ bedeutet, daß alle Zustände $|j+m, j-m\rangle$, auf die mehr als 1 Vernichtungsoperator wirkt, Null geben. Es gibt ja nur die 2 Zustände $|\underset{b}{0}\,\underset{c}{1}\rangle$ und $|\underset{b}{1}\,\underset{c}{0}\rangle$
(b, c wird hier daruntergeschrieben, da man sofort daran sieht, ob die Quantenzahl von b^+b oder c^+c gemeint ist.)

Entwickeln von $U(t)$ gibt für Spin:

$$U(t) = 1 + (A-1)b^+b + (B-1)c^+c + Db^+c + Ec^+b$$

<u>Beispiel</u>: Spin ist zur Zeit $t=0$ im oberen Zustand ($j=\frac{1}{2}$, $m=-\frac{1}{2}$, also antiparallel zum Feld.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er zur Zeit t im unteren Zustand ($j=\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{2}$, parallel zum Feld H_0) steht?

Anfangszustand: $|j+m, j-m\rangle = |0_b\, 1_c\rangle$

Zustand zur Zeit t: $U(t)|0_b\, 1_c\rangle$

Statist. Operator zur Zeit t: $\rho(t) = U(t)|0_b\, 1_c\rangle\langle 0_b\, 1_c| U^+(t)$

Endzustand $|j+m, j-m\rangle = |1_b\, 0_c\rangle$

Projektionsoperator auf den Endzustand: $|1_b\, 0_c\rangle\langle 0_c\, 1_b| = P$

Wahrscheinlichkeit: $tr\{\rho P\} = |\langle 1_b 0_c | U(t) | 0_b 1_c\rangle|^2$

$$U(t)|0_b 1_c\rangle = |0_b 1_c\rangle + (A-1) b^+b|0_b 1_c\rangle + (B-1)c^+c|0_b 1_c\rangle +$$
$$+ D b^+c|0_b 1_c\rangle + Ec^+b|0_b 1_c\rangle =$$
$$= |0_b 1_c\rangle + (B-1)|0_b 1_c\rangle + D|1_b 0_c\rangle =$$
$$= B|0_b 1_c\rangle + D|1_b 0_c\rangle$$

Jetzt:
$$\langle 1_b 0_c | U(t) | 0_b 1_c\rangle = B\langle 1_b 0_c | 0_b 1_c\rangle + D\langle 1_b 0_c | 1_b 0_c\rangle = D$$

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = DD^* = \frac{(\gamma H_1)^2}{(\gamma H_1)^2 + (\omega-\omega_0)^2} \sin^2 \frac{1}{2} t \sqrt{(\gamma H_1)^2 + (\omega-\omega_0)^2}$$

<u>Bemerkung</u>: Das ist <u>halbklassisch</u>, weil Feld $\vec{H}$ klassisch angenommen. Man kann das Magnetfeld quantisieren, gibt im Wesentlichen ein Glied $a+a^+$ in der Hamiltonian und das Ergebnis

$$\frac{\varkappa^2(n+1)}{\varkappa^2(n+1) + (\omega-\omega_0)^2} \sin^2 \frac{1}{2} t \sqrt{\varkappa^2(n+1) + (\omega-\omega_0)^2}$$

wobei n die Anzahl der Quanten im Hochfrequenzfeld ist. Man sieht: Sogar für $n=0$ gibt es Übergangswahrscheinlichkeit (spontane Übergänge), die in der klassischen und halbklassischen Theorie nicht enthalten waren $\longrightarrow$ Nullpunktsfeld! Sonst (für hohe Quantenzahlen) identische Ergebnisse.

Verschobene Operatoren:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$[a, a^+] = 1$$

$$a^+a\,|n\rangle = n\,|n\rangle$$

Man definiert neue Zustände: $|n_\alpha\rangle = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a)\,|n\rangle$

analog: $|(n-1)_\alpha\rangle = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a)\,|n-1\rangle$

Damit folgt

aus $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$: $(a-\alpha)\,|n_\alpha\rangle = \sqrt{n}\,|(n-1)_\alpha\rangle$

$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$: $(a^+-\alpha^*)\,|n_\alpha\rangle = \sqrt{n+1}\,|(n+1)_\alpha\rangle$

$a^+a|n\rangle = n|n\rangle$ $\qquad (a^+-\alpha^*)(a-\alpha)\,|n_\alpha\rangle = n\,|n_\alpha\rangle$

bezeichnet man also

$$c = a-\alpha$$
$$c^+ = a^+-\alpha^*$$

so gilt

$$c\,|n_\alpha\rangle = \sqrt{n}\,|(n-1)_\alpha\rangle$$

$$c^+|n_\alpha\rangle = \sqrt{n+1}\,|(n+1)_\alpha\rangle$$

$$c^+c\,|n_\alpha\rangle = n\,|n_\alpha\rangle$$

beachte dabei:

$$e^{\alpha a^+ - \alpha^* a}\, a\, e^{-(\alpha a^+ - \alpha^* a)} = a-\alpha$$

$$e^{\alpha a^+ - \alpha^* a}\, a^+\, e^{-(\alpha a^+ - \alpha^* a)} = a^+-\alpha^*$$

$$e^{\alpha a^+ - \alpha^* a}\, a^+a\, e^{-(\alpha a^+ - \alpha^* a)} = e^{\alpha a^+}\cdot e^{-\alpha^* a}\, a^+a\, e^{\alpha^* a}\, e^{-\alpha a^+} =$$

$$= e^{\alpha a^+}(a^+-\alpha^*)\,a\,e^{-\alpha a^+} =$$

$$= (a^+-\alpha^*)(a-\alpha)$$

$$\rho = (1-e^{-\hbar\omega\beta})\exp[-\hbar\omega\beta(a^+-\alpha^*)(a-\alpha)] \qquad \beta = \frac{1}{kT}$$

Daraus Berechnung der mittleren Photonenanzahl:

$$\bar{N} = Sp\,\{\rho\, a^+a\} = Sp\,\{(1-e^{-\hbar\omega\beta})\exp[-\hbar\omega\beta(a^+-\alpha^*)(a-\alpha)]\,a^+a\} =$$

günstig in $|n_\alpha)$ zu rechnen

$$= \sum_{n_\alpha} (n_\alpha|(1-e^{-\hbar\omega\beta})\,e^{-\hbar\omega\beta(a^+-\alpha^*)(a-\alpha)}\,a^+a\,|n_\alpha)$$

$$= (1-e^{-\hbar\omega\beta})\sum_{n_\alpha} (n_\alpha|\,e^{-\hbar\omega\beta c^+c}\,(c^++\alpha^*)(c+\alpha)|n_\alpha)$$

$$= (1-e^{-\hbar\omega\beta})\sum_{n_\alpha} e^{-\hbar\omega\beta n}\,(n_\alpha|(c^++\alpha^*)(c+\alpha)|n_\alpha)$$

$$= (1-e^{-\hbar\omega\beta})\sum_{n_\alpha} e^{-\hbar\omega\beta n}\,(n+|\alpha|^2)\,(n_\alpha|n_\alpha) = |\alpha|^2+\frac{1}{e^{\hbar\omega\beta}-1}$$

Allgemeines Disentangling-Theorem (gilt für $N \to \infty$):

1) Definitionen:

$$P\exp\left(\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}\underline{A}_s\right)=\prod_{s=1}^{N}\exp\left(\frac{\underline{A}_s}{N}\right)= e^{\frac{\underline{A}_N}{N}}\,e^{\frac{\underline{A}_{N-1}}{N}}\cdots e^{\frac{\underline{A}_2}{N}}\,e^{\frac{\underline{A}_1}{N}}$$

$$P\exp\left\{\int_0^1 ds\,\underline{A}(s)\right\}=\prod_{\substack{\nu=0\\ Nds=1\\ N\to\infty}}^{N}\exp\left\{\underline{A}(\nu ds)\,ds\right\}=e^{\underline{A}(1)ds}\,e^{\underline{A}[(N-1)ds]ds}\cdots e^{\underline{A}(2ds)ds}\,e^{\underline{A}(ds)ds}\,e^{\underline{A}(0)ds}=$$

$$=\underline{I}+\int_0^1 ds\,\underline{A}(s)+\int_0^1 ds\int_0^s ds'\,\underline{A}(s)\underline{A}(s')+\ldots\ldots$$

P spielt somit die Rolle des Dysonschen Zeitordnungsoperators, wobei die kleineren Zeiten weiter rechts stehen.

Die inversen Operatoren der obigen bildet man mit dem Anti-Zeitordnungsoperator P_a, bei dem die größeren Zeiten weiter rechts stehen. Es ist daher:

$$P_a\exp\left(-\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}\underline{A}_s\right)=\prod_{s=N}^{1}\exp\left(-\frac{\underline{A}_s}{N}\right)=e^{-\frac{\underline{A}_1}{N}}\,e^{-\frac{\underline{A}_2}{N}}\cdots\cdots e^{-\frac{\underline{A}_{N-1}}{N}}\,e^{-\frac{\underline{A}_N}{N}}$$

$$P_a\exp\left\{-\int_0^1 ds\,\underline{A}(s)\right\}=\prod_{\substack{\nu=N\\ Nds=1\\ N\to\infty}}^{0}\exp\left\{-A(\nu ds)\,ds\right\}=e^{-\underline{A}(0)ds}\,e^{-A(ds)ds}\cdots e^{-\underline{A}[(N-1)ds]ds}\,e^{-A(1)ds}=$$

$$=\underline{I}-\int_0^1 ds\,\underline{A}(s)+\int_0^1 ds\int_0^s ds'\,\underline{A}(s')\underline{A}(s)-\ldots$$

Mit diesen Definitionen erhält man:

2) Disentangling-Theorem, Form 1

$$P\exp\left\{\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}(\underline{A}_s+\underline{B}_s)\right\}=\underbrace{P\exp\left(\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}\underline{A}_s\right)}_{\underline{M}}\;\underbrace{P\exp\left\{\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}P_a\exp\left(-\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{s-1}\underline{A}_t\right)\underline{B}_s\,P\exp\left(\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{s-1}A_r\right)\right\}}_{\underline{L}}$$

Der Ausdruck ist so zu verstehen, daß auf einen Ket zuerst $\underline{L}$, dann $\underline{M}$ angewendet werden muß.

$$P\exp\left\{\int_0^1 ds\,[\underline{A}(s)+\underline{B}(s)]\right\}=$$

$$=P\exp\left\{\int_0^1 ds\,\underline{A}(s)\right\}P\exp\left\{\int_0^1 ds\,P_a\exp\left[-\int_0^s dt\,\underline{A}(t)\right]\underline{B}(s)\,P\exp\left[\int_0^s dr\,\underline{A}(r)\right]\right\}$$

Sind $\underline{A}, \underline{B}$ konstante Operatoren, so folgt

$$\exp(\underline{A}+\underline{B}) = \exp\underline{A}\cdot\exp\left(\int_0^1 ds\, e^{-s\underline{A}}\,\underline{B}\,e^{s\underline{A}}\right) =$$

$$= \exp\underline{A}\cdot\exp\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\underline{A},\underline{B}]_{(n)}}{n!}\int_0^1 (-s)^n ds\right) = \exp\underline{A}\cdot\exp\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}[\underline{A},\underline{B}]_{(n)}\right)$$

Spezialfall: $[\underline{A},[\underline{A},\underline{B}]] = [\underline{A},\underline{B}]_{(2)} = 0$:

$$e^{\underline{A}+\underline{B}} = e^{\underline{A}}\,e^{\underline{B}-\frac{1}{2}[\underline{A},\underline{B}]}$$

Spezialfall: $[\underline{A},\underline{B}]_{(2)} = [\underline{B},\underline{A}]_{(2)} = 0$:

$$e^{\underline{A}+\underline{B}} = e^{\underline{A}}\,e^{\underline{B}}\,e^{-\frac{1}{2}[\underline{A},\underline{B}]}$$

Beachte: allgemein ist natürlich $e^{\underline{A}+\underline{B}} = e^{\underline{B}+\underline{A}}$

3) Disentangling – Theorem, Form 2

$$P\exp\left\{\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}(\underline{A}_s+\underline{B}_s)\right\} = P\exp\left\{\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}P\exp\left(\frac{1}{N}\sum_{t=s+1}^{N}\underline{A}_t\right)\underline{B}_s P_a\exp\left(-\frac{1}{N}\sum_{r=s+1}^{N}\underline{A}_r\right)\right\}P\exp\left(\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}\underline{A}_s\right)$$

$$P\exp\left\{\int_0^1 ds\,[\underline{A}(s)+\underline{B}(s)]\right\} =$$

$$= P\exp\left\{\int_0^1 ds\, P\exp\left[\int_s^1 dt\,\underline{A}(t)\right]\underline{B}(s)\,P_a\exp\left[-\int_s^1 dr\,\underline{A}(r)\right]\right\}P\exp\left[\int_0^1 ds\,\underline{A}(s)\right]$$

Sind $\underline{A}, \underline{B}$ konstante Operatoren, so folgt

$$\exp(\underline{A}+\underline{B}) = \exp\left(\int_0^1 ds\, e^{(1-s)\underline{A}}\,\underline{B}\,e^{-(1-s)\underline{A}}\right)\exp\underline{A} = \cancel{\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}[\underline{A},\underline{B}]_{(n)}+\underline{B}\right)\exp\underline{A}}$$

$$= \exp\left(\underline{B}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}[\underline{A},\underline{B}]_{(n)}\right)\exp\underline{A}$$

Spezialfall: $[\underline{A},\underline{B}]_{(2)} = 0$

$$e^{\underline{A}+\underline{B}} = e^{\underline{B}+\frac{1}{2}[\underline{A},\underline{B}]}\,e^{\underline{A}}$$

Spezialfall: $[\underline{A},\underline{B}]_{(2)} = [\underline{B},\underline{A}]_{(2)} = 0$

$$e^{\underline{A}+\underline{B}} = e^{\underline{B}}\,e^{\frac{1}{2}[\underline{A},\underline{B}]}\,e^{\underline{A}} = e^{\underline{B}}\,e^{\underline{A}}\,e^{\frac{1}{2}[\underline{A},\underline{B}]}$$

4) Ergänzung zum Zeitordnungsoperator

Sind $\underline{A}, \underline{B}$ zwei Operatoren, die im allg. <u>nicht</u> kommutieren, so ist dennoch definiert

$$P\, A(t_1)B(t_2) = \begin{cases} \underline{A}(t_1)B(t_2) & \text{für } t_2 < t_1 \\ B(t_2)A(t_1) & \text{für } t_1 < t_2 \end{cases}$$

Beachte, daß der Ausdruck für $t_1 = t_2$ nicht definiert ist; die Definition kann nicht stetig erfolgen bei $t_1 = t_2$, wie dies der Fall wäre, wenn $\underline{A}(t_1)$ mit $\underline{B}(t_1)$ kommutieren würde.

Mit dieser Definition läßt sich zeigen

$$P\left\{\exp\int_0^t (\underline{A}_s + \underline{B}_s)\,ds\right\} = P\left\{\exp\left(\int_0^t A_s\,ds\right)\exp\left(\int_0^t B_s\,ds\right)\right\}$$

Sind $\underline{A}, \underline{B}$ constante Operatoren, so wäre es <u>falsch</u> zu schreiben

$$P\exp(A+B)t = \exp(A+B)t = P\left\{e^{At}e^{Bt}\right\} = e^{At}e^{Bt} \quad ! \quad \text{FALSCH!}$$

Daher wird der Ordnungsindex s zunächst behalten und so getan, als wären $\underline{A}, \underline{B}$ zeitabhängig. Erst <u>nachdem</u> auf beiden Seiten die Reihenentwicklung angewendet wurde und der Zeitordnungsoperator kann ausintegriert werden.

Beispiel:
$$P\left\{\int_0^t A\,ds_1 \cdot \int_0^t B\,ds_2\right\} \neq ABt^2 \quad !$$

Richtig:
$$P\left\{\int_0^t A_1\,ds_1 \int_0^t B_2\,ds_2\right\} =$$
$$= P\left\{\int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2\, A_1B_2 + \int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t ds_2\, A_1B_2\right\} =$$
$$= \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2\, A_1B_2 + \int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t ds_2\, B_2A_1 \Rightarrow \underline{A}, \underline{B} \text{ konstant}$$
$$= AB\cdot\frac{t^2}{2} + BA\frac{t^2}{2}$$

Daß dies richtig ist, folgt aus der Probe

$$e^{(A+B)t} = e^{At}\, P\exp\left\{\int_0^t ds\, e^{-sA}\, B\, e^{sA}\right\}.$$

Beispiel

$H_0 = H(0) = H_s(0) = H_H(0) = H_W(0)$ sei

$$H_0 = H_p + \hbar\omega b^+ b + \hbar g^*(0) b^+ + \hbar g(0) b$$

b, b^+ sind die Operatoren für $t=0$; $g(0)$ bzw $g(t)$ gibt eine etwaige explizite Zeitabhängigkeit an; H_p, g, g^* hängen eventuell von Fermionenoperatoren zur Zeit $t=0$ ab

1) Schrödingerbild

$$\langle L(t)\rangle = \langle \phi_0 | C_s^+(t) L(x_0, p_0) C_s(t) | \phi_0 \rangle$$

gesucht: $C_s(t)$

$$\frac{dC_s}{dt} = \frac{1}{j\hbar} H_s(t) C_s(t) \qquad \text{Was ist } H_s(t)?$$

$$H_s(t) = A_s(t) H_s(x_0, p_0, t) A_s^+(t) \qquad \text{Was ist } A_s(t)?$$

$$\frac{dA_s}{dt} = 0 \qquad A_s(t) = I$$

ergo: $H_s(t) = H_s(x_0, p_0, t) = H_p + \hbar\omega b^+ b + \hbar g^*(t) b^+ + \hbar g(t) b$

ergo:

$$C_s(t) = P \exp\left\{\frac{1}{j\hbar}\int_0^t dt_1 \left[H_p + \hbar\omega b^+ b + \hbar g^*(t_1) b^+ + \hbar g(t_1) b\right]\right\}$$

Trennt man die Zeitordnung in die nach Fermi- und Boseoperatoren, so erhält man nach 4)

$$C_s(t) = P_F\left\{\exp\left[\frac{1}{j\hbar}\int_0^t dt_1 H_{p,t_1}\right] P_B \left[\exp \frac{1}{j\hbar}\int_0^t dt_1 \left(\hbar\omega b^+_{t_1} b_{t_1} + \hbar g^*(t_1) b^+_{t_1} + \hbar g(t_1) b_{t_1}\right)\right]\right\}$$

Die Ordnungsindizes sind wegen 4) auch an konstanten Operatoren angebracht. In dem Term hinter P_B können Fermionenoperatoren als c-Zahlen behandelt werden, da ja P_F am Beginn dafür sorgt, daß der Operatorcharakter letzlich berücksichtigt wird.

$P_B[\ldots\ldots]$ wird untersucht.

$$P_B\left\{\exp \frac{1}{j\hbar}\int_0^t ds\left[\hbar\omega b_s^+ b_s + \hbar g^*(s) b_s^+ + \hbar g(s) b_s\right]\right\} = P_B \exp\left\{\frac{1}{j\hbar}\int_0^t ds\, \hbar\omega b_s^+ b_s\right\} \times$$

$$\times P_B \exp\left\{\frac{1}{j\hbar}\int_0^t ds\, e^{j\omega b_s^+ b_s s}\left[\hbar g^*(s) b_s^+ + \hbar g(s) b_s\right] e^{-j\omega b_s^+ b_s s}\right. =$$

$$= \exp(-j\omega b^+ b) \cdot \underbrace{P_B \exp\left\{-j\int_0^t ds\left[\overset{*}{g}(s) b_s^+ e^{j\omega s} + g(s) b_s e^{-j\omega s}\right]\right\}}_{\text{nur dieser Term wird weiter untersucht}} =$$

$$P_B \exp\left\{-j\int_0^t ds\, \overset{*}{g}(s) e^{j\omega s} b_s^+\right\} P_B \exp\left\{-j\int_0^t ds\, e^{j\int_0^s d\sigma \overset{*}{g}(\sigma) e^{j\omega\sigma} b_\sigma^+} \cdot g(s) b_s e^{-j\omega s} e^{-j\int_0^\sigma d\sigma \overset{*}{g}(\sigma) e^{j\omega\sigma} b_\sigma^+}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-j b^+ \int_0^t ds\, \overset{*}{g}(s) e^{j\omega s}\right\} P_B \exp\left\{-j\int_0^t ds\, g(s) e^{-j\omega s}\left[b_s - j\int_0^s d\sigma\, \overset{*}{g}(\sigma) e^{j\omega\sigma}\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{-j b^+ \int_0^t ds\, \overset{*}{g}(s) e^{j\omega s}\right\} \exp\left\{-j b\int_0^t ds\, g(s) e^{-j\omega s}\right\} \exp\left\{-\int_0^t ds \int_0^s d\sigma\, g(s)\overset{*}{g}(\sigma) \cdot e^{-j\omega(s-\sigma)}\right\}$$

Damit wird der gesamte Zeitentwicklungsoperator

$$C_s(t) = P_F\left\{\exp\left[\frac{1}{j\hbar}\int_0^t ds\, H_{p,s}\right] \cdot \exp\left[-j\omega b^+ b t\right] \cdot \exp\left[-j b^+ \int_0^t ds\, \overset{*}{g}(s) e^{j\omega s}\right] \cdot \exp\left[-j b\int_0^t ds\, g(s) e^{-j\omega s}\right] \cdot \exp\left[-\int_0^t ds\int_0^s d\sigma\, g(s)\overset{*}{g}(\sigma) e^{-j\omega(s-\sigma)}\right]\right\}$$

2) <u>Wechselwirkungsbild</u>

$$\langle L(t)\rangle = \langle \varphi_0 | C_w^+(t) A_w(t) L(x_0, p_0) A_w^+(t) C_w(t) | \varphi_0\rangle =$$

$$= \langle \varphi_0 | U^+(t) L(x_0, p_0) U(t) | \varphi_0\rangle$$

Beachte: $U(t) = C_s(t) = A_w^+(t) C_w(t)$

$C_s(t)$ ist oben schon berechnet. Eine andere Form ergibt sich aus dem Wechselwirkungsbild.

$$\frac{dA_w(t)}{dt} = -\frac{1}{j\hbar} H_{0w}(t) A_w(t)$$ Was ist $H_{0w}(t)$?

Das hängt davon ab, was man als H_0 nimmt. z.B: $H_{0w}(0) = H_p$

$$H_{0w}(t) = A_w(t) H_{0w}(x_0, p_0, t) A_w^+ = A_w H_p A_w^+$$

$$\frac{dA_w}{dt} = -\frac{1}{j\hbar} A_w H_p$$

$$\frac{dA_w^+}{dt} = \frac{1}{j\hbar} H_p A_w^+$$ $\underline{A_w^+(t) = \exp\left(\frac{H_p t}{j\hbar}\right)}$ H_p ist nicht zeitabhängig (explizit).

$$\frac{dC_w(t)}{dt} = \frac{1}{j\hbar} H_{1w}(t) C_w(t)$$ Was ist $H_{1w}(t)$?

$$H_{1w}(t) = A_w(t) H_{1w}(x_0, p_0, t) A_w^+(t) =$$

$$= \exp\left\{-\frac{H_p t}{j\hbar}\right\} \left[\hbar\omega b^+ b + \hbar g^*(t) b^+ + \hbar g(t) b\right] \exp\left\{\frac{H_p t}{j\hbar}\right\}$$

H_p kommutiert mit b, b^+ aber nicht notwendig mit $g(t)$, wenn dies von Fermionen-operatoren abhängt.

$$H_{1w}(t) = \hbar\omega b^+ b + b^+ \hbar e^{-\frac{H_p t}{j\hbar}} g^*(t) e^{+\frac{H_p t}{j\hbar}} + b\hbar e^{-\frac{H_p t}{j\hbar}} g(t) e^{+\frac{H_p t}{j\hbar}}$$

$$C_w(t) = P \exp\left\{\frac{1}{j\hbar}\int_0^t H_{1w}(s)\, ds\right\} =$$

$$= P \exp\left\{-j\omega \int_0^t ds\, b_s^+ b_s - j\int_0^t ds\, b_s^+ \exp\left(-\frac{H_p s}{j\hbar}\right) g^*(s) \exp\left(\frac{H_p s}{j\hbar}\right) - j\int_0^t ds\, b_s \exp\left(-\frac{H_p s}{j\hbar}\right) g(s) \exp\left(\frac{H_p s}{j\hbar}\right)\right\}$$

Der gesamte Zeitentwicklungsoperator ist $U(t) = A_w^+(t) C_w(t)$

Sind die Fermionen nicht quantisiert, so ist $H_p = 0$ und $g(t)$ eine c-Zahl. (56) (7)
Dann folgt:

$$C_s(t) = \exp(-j\omega b^+ b t)\exp\left[-jb^+ \int_0^t ds\, \overset{*}{g}(s)\, e^{j\omega s}\right]\exp\left[-jb \int_0^t ds\, g(s)\, e^{-j\omega s}\right] \cdot$$
$$\cdot \exp\left[-I \int_0^t ds \int_0^s d\sigma\, g(s)\, \overset{*}{g}(\sigma)\, e^{-j\omega(s-\sigma)}\right]$$

Andererseits ist

$$U(t) = A_w^+(t)\, C_w(t) = P\exp\left\{-j\omega \int_0^t ds\, b_s^+ b_s - j\int_0^t ds\, b_s^+ \overset{*}{g}(s) - j\int_0^t ds\, b_s\, g(s)\right\} =$$
$$= \text{disentangelt} =$$
$$= \exp\{-j\omega b^+ b t\} \cdot P\exp\left\{-j\int_0^t ds\, e^{j\omega b_s^+ b_s s}\left\{\overset{*}{g}(s) b_s^+ + g(s) b_s\right\} e^{-j\omega b_s^+ b_s s}\right\} =$$
$$= \exp\{-j\omega b^+ b t\} \cdot \underbrace{P\exp\left\{-j\int_0^t ds\, \overset{*}{g}(s) b_s^+ e^{j\omega s} - j\int_0^t ds\, g(s) b_s e^{-j\omega s}\right\}}_{}$$

Das ist aber gerade der Ausdruck, der auf S. 5 oben steht und disentangelt in diesem Spezialfall das Ergebnis S. 7 oben nach $\exp(-j\omega b^+ b t)$ gab!

Die Identität ist damit bewiesen.

Operatorenalgebra

1) Wozu Operatorenalgebra?

Es wird ein harmonischer Oszillator untersucht. Zur Zeit $t=0$ sollen Heisenbergbild und Schrödingerbild übereinstimmen. (Die Indizes H, S bedeuten die beiden Bilder)

Heisenbergbild: $\underline{H}_H = \frac{1}{2}p_H^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q_H^2 = \hbar\omega(\underline{b}_H^+ \underline{b}_H + \frac{1}{2}\underline{I})$ (1-1)

$$[\underline{b}_H, \underline{b}_H^+] = \underline{I} \qquad [p_H, q_H] = \frac{\hbar}{j}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\frac{dp_H}{dt} = \frac{j}{\hbar}[\underline{H}_H, p_H] = \frac{j}{\hbar}[\tfrac{1}{2}\omega^2 q_H^2, p_H] = -\frac{j\omega^2}{2\hbar}[p_H, q_H^2] = -\frac{j\omega^2}{2\hbar}\frac{\partial}{\partial q_H}q_H^2\frac{\hbar}{j} = -\omega^2 q_H$$

$$\frac{dq_H}{dt} = \frac{j}{\hbar}[\underline{H}_H, q_H] = \frac{j}{\hbar}[\tfrac{1}{2}p_H^2, q_H] = -\frac{j}{2\hbar}[q_H, p_H^2] = -\frac{j}{2\hbar}\left(-\frac{\hbar}{j}\right)\frac{\partial}{\partial p_H}p_H^2 = p_H \qquad (1-2)$$

Aus (1-2) folgt

$$\frac{d^2 p_H}{dt^2} + \omega^2 p_H = 0 \qquad \frac{d^2 q_H}{dt^2} + \omega^2 q_H = 0 \qquad (1-3)$$

mit den Lösungen $p_H(t) = \underline{A}\cos\omega t + \underline{B}\sin\omega t$ (1-4)
$q_H(t) = \underline{C}\cos\omega t + \underline{D}\sin\omega t$

Die Anfangsbedingungen lauten $p_H(t=0) = p_H(0) = p_S$ (1-5)
$q_H(t=0) = q_H(0) = q_S$

Aus (1-4)(1-5) folgt $p_S = \underline{A}$ $q_S = C$, d.h.: $p_H(t) = p_S\cos\omega t + \underline{B}\sin\omega t$
$q_H(t) = q_S\cos\omega t + \underline{D}\sin\omega t$

Einsetzen etwa in

$$\frac{dq_H}{dt} = p_H = p_S\cos\omega t + \underline{B}\sin\omega t = \cancel{[-\omega q_S\cos\omega t + \omega\underline{D}\sin\omega t]} = -\omega q_S\sin\omega t + \omega\underline{D}\cos\omega t$$

gibt $\underline{B} = -\omega q_S$ (1-6)
$\omega\underline{D} = p_S$

und somit $p_H(t) = p_S\cos\omega t - \omega q_S\sin\omega t$ (1-7)
$q_H(t) = q_S\cos\omega t + \frac{p_S}{\omega}\sin\omega t$

Für $\underline{b}_H, \underline{b}_H^+$ folgt

$$\frac{d\underline{b}_H}{dt} = \frac{j}{\hbar}[\underline{H}_H, \underline{b}_H] = j\omega[\underline{b}_H^+\underline{b}_H, \underline{b}_H] = -j\omega\underline{b}_H$$

$$\frac{d\underline{b}_H^+}{dt} = j\omega\underline{b}_H^+$$

mit den Lösungen: $\underline{b}_H(t) = \underline{b}_H(0)e^{-j\omega t} = \underline{b}_S e^{-j\omega t}$ (1-8)
$\underline{b}_H^+(t) = \underline{b}_H^+(0)e^{j\omega t} = \underline{b}_S^+ e^{j\omega t}$

Frage: Hätte man die Lösungen (1-7) (1-8) im Heisenbergbild direkt durch Transformation aus dem Schrödingerbild erhalten können?

In der Herleitung der Bewegungsgleichungen gilt (für S = H zur Zeit t = 0)

$$\underline{L}_H(t) = \underline{T}_{HS}\,\underline{L}_S\,\underline{T}_{HS}^+ \qquad (1\text{-}9)$$

$\underline{T}_{HS} = \underline{A}_H$ mit $\frac{d\underline{A}_H}{dt} = \frac{j}{\hbar}\underline{H}_H\underline{A}_H$, d.h.: $\underline{A}_H(t) = e^{\frac{j}{\hbar}\underline{H}_H t}$

Nach der Bewegungsgleichung gilt für $\underline{H}_H$

$$\frac{d\underline{H}_H}{dt} = \frac{j}{\hbar}[\underline{H}_H,\underline{H}_H] = 0 \longrightarrow \underline{H}_H = \text{const} = \underline{H}_S \quad (\text{für } t=0 \text{ Übereinstimmung!})$$

Daher:

$$\underline{T}_{HS} = \underline{A}_H = e^{\frac{j}{\hbar}\underline{H}_S t} \qquad (1\text{-}10)$$

Damit folgt etwa:

$$\underline{q}_H(t) = e^{\frac{j}{\hbar}\underline{H}_S t}\,\underline{q}_S\,e^{-\frac{j}{\hbar}\underline{H}_S t} = e^{\frac{jt}{2\hbar}(\underline{p}_S^2+\omega^2\underline{q}_S^2)}\,\underline{q}_S\,e^{-\frac{jt}{2\hbar}(\underline{p}_S^2+\omega^2\underline{q}_S^2)} \qquad (1\text{-}11)$$

$$\underline{b}_H(t) = e^{\frac{j}{\hbar}\underline{H}_S t}\,\underline{b}_S\,e^{-\frac{j}{\hbar}\underline{H}_S t} = e^{j\omega(\underline{b}_S^+\underline{b}_S+\frac{1}{2}\underline{I})}\,\underline{b}_S\,e^{-j\omega(\underline{b}_S^+\underline{b}_S+\frac{1}{2}\underline{I})}$$

Die Übereinstimmung von (1-11) mit (1-7) und (1-8) ist nicht unmittelbar einzusehen. Daraus ersichtlich: Zur Lösung solcher Aufgaben Algebra für Operatoren nötig, die nicht kommutieren.

2) Einige allgemeine Operatortheoreme.

Voraussetzung: $[\underline{A},\underline{B}] \neq 0$ (sonst wäre alles triviale Algebra)
Die Operatorfunktionen sollen nach Potenzreihen entwickelt werden können.

$$f(\underline{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\underline{A}^n \qquad (2\text{-}1)$$

Satz 1

$$e^{\xi\underline{A}} f(\underline{B}) e^{-\xi\underline{A}} = f(e^{\xi\underline{A}}\underline{B}e^{-\xi\underline{A}}) \qquad (2\text{-}2)$$

speziell

$$e^{\xi\underline{A}}\underline{B}^n e^{-\xi\underline{A}} = (e^{\xi\underline{A}}\underline{B}e^{-\xi\underline{A}})^n$$

Beweis: z.B.: $e^{\xi\underline{A}}\underline{B}^2 e^{-\xi\underline{A}} = e^{\xi\underline{A}}\underline{B}e^{-\xi\underline{A}}e^{\xi\underline{A}}\underline{B}e^{-\xi\underline{A}} = (e^{\xi\underline{A}}\underline{B}e^{-\xi\underline{A}})^2$, gilt für jede Potenz, daher auch für jede Potenzreihe.

Satz 2

$$\underline{A}\underline{B}^n\underline{A}^{-1} = (\underline{A}\underline{B}\underline{A}^{-1})^n \qquad (2\text{-}3)$$

$$\underline{A}f(\underline{B})\underline{A}^{-1} = f(\underline{A}\underline{B}\underline{A}^{-1})$$

wenn ein inverser Operator existiert.

Satz 3

$$e^{\xi\underline{A}}\underline{B}e^{-\xi\underline{A}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}[\underline{A},\underline{B}]_{(n)} \qquad (2\text{-}4)$$

mit

$$[\underline{A},\underline{B}]_{(0)} = \underline{B}$$

$$[\underline{A},\underline{B}]_{(1)} = [\underline{A},\underline{B}]$$

$$[\underline{A},\underline{B}]_{(2)} = [\underline{A},[\underline{A},\underline{B}]] \text{ usw}$$

Beweis: $f(\xi) = e^{\xi A} B e^{-\xi A}$

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} = e^{\xi A} A B e^{-\xi A} - e^{\xi A} B A e^{-\xi A} = [A, f(\xi)]$$

$$\frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} = \left[A, \frac{df(\xi)}{d\xi}\right] = [A,[A,f(\xi)]]$$

$f(0)=B$, damit ist (2-4) die McLaurinsche Reihe für $f(\xi) = f(0) + \frac{df}{d\xi}\Big|_{\xi=0}\xi + \dots$

<u>Satz 4</u> $\quad e^{A+B} = e^{A} e^{B} e^{-\frac{1}{2}[A,B]} = e^{B} e^{A} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$ wenn $[A,[A,B]]=[B,[A,B]]=0$ (2-5)

Satz 4 ist immer dann nützlich (s. Bedingung!) wenn der Kommutator zweier Operatoren eine c-Zahl ist (z. Bsp von q, p oder von b, b^{+}!)

Beweis: $f(\xi) = e^{\xi A} e^{\xi B}$

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} = A f(\xi) + e^{\xi A} B e^{\xi B} = A f(\xi) + e^{\xi A} B e^{-\xi A} e^{\xi A} e^{\xi B} = \{A + e^{\xi A} B e^{-\xi A}\} f(\xi) =$$

$$= (\text{Satz 3}) = \{A + B + \xi [A,B]\} f(\xi) \qquad (2\text{-}6)$$

Wegen der Voraussetzung kommutieren $(A+B)$ und $\xi[A,B]$. Die Gleichung ist sofort integrabel

$$f(\xi) = f(0) e^{(A+B)\xi + \frac{\xi^2}{2}[A,B]} = e^{(A+B)\xi} e^{\frac{\xi^2}{2}[A,B]} = e^{\xi A} e^{\xi B}$$

Daraus resultiert die erste Form von Satz 4.

Beispiele zur Anwendung dieser Sätze:

a) $e^{\frac{i\xi p}{\hbar}} q e^{-\frac{i\xi p}{\hbar}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\xi}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} [p,q]_{(n)} = q + \frac{i\xi}{\hbar}[p,q] = q + \xi$

Der Operator $e^{i\xi p/\hbar}$ bewirkt eine Translation um ξ

b) $e^{\frac{i\xi p}{\hbar}} f(q) e^{-\frac{i\xi p}{\hbar}} = f\left\{e^{\frac{i\xi p}{\hbar}} q e^{-\frac{i\xi p}{\hbar}}\right\} = f(q+\xi)$

c) $e^{x^2/2} \frac{d}{dx} e^{-x^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{x^2}{2}, \frac{d}{dx}\right]_{(n)} = ?$

$$\left[\frac{x^2}{2}, \frac{d}{dx}\right] f(x) = \frac{x^2}{2}\frac{df(x)}{dx} - \frac{d}{dx}\left\{\frac{x^2}{2} f(x)\right\} = -x f(x), \text{ daher}$$

$$\left[\frac{x^2}{2}, \frac{d}{dx}\right] = -x$$

$$\left[\frac{x^2}{2}, \left[\frac{x^2}{2}, \frac{d}{dx}\right]\right] = 0 \;!$$

Daraus resultiert

$$e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(\frac{d}{dx} - x\right)$$

d) $e^{+\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(\frac{d}{dx} - x\right)^n$

e) $e^{\frac{jt}{2\hbar}(p_s^2+\omega^2 q_s^2)}\, q_s\, e^{-\frac{jt}{2\hbar}(p_s^2+\omega^2 q_s^2)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{jt}{2\hbar}\right)^n \frac{1}{n!}\left[p_s^2+\omega^2 q_s^2, q_s\right]_{(n)} = q_H(t)$

Zwischenrechnung:

$[\ \ ]_{(0)} = q_s$

$[\ \ ]_{(1)} = [p_s^2, q_s] = \left(\frac{2\hbar}{j}\right) p_s$

$[\ \ ]_{(2)} = [\omega^2 q_s^2, p_s]\cdot\left(\frac{2\hbar}{j}\right) = -\left(\frac{2\hbar}{j}\omega\right)^2 q_s$

$[\ \ ]_{(3)} = -\left(\frac{2\hbar}{j}\omega\right)^2 [p_s^2, q_s] = -\left(\frac{2\hbar}{j}\right)\left(\frac{2\hbar}{j}\omega\right)^2 p_s$

$[\ \ ]_{(4)} = -\left(\frac{2\hbar}{j}\right)\left(\frac{2\hbar}{j}\omega\right)^2 [\omega^2 q_s^2, p_s] = \left(\frac{2\hbar}{j}\omega\right)^4 q_s$

Die Summe wird in gerade und ungerade n aufgespalten:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{jt}{2\hbar}\right)^{2n}\frac{1}{(2n)!}\, q_s\cdot(-1)^n\left(\frac{2\hbar}{j}\omega\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\omega t)^{2n}}{(2n)!}(-1)^n q_s = q_s\cos\omega t$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{jt}{2\hbar}\right)^{2n+1}\frac{1}{(2n+1)!}\, p_s\cdot\left(\frac{2\hbar}{j}\right)\left(\frac{2\hbar}{j}\omega\right)^{2n}(-1)^n\cdot\frac{\omega}{\omega} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n\frac{p_s}{\omega} = \frac{p_s}{\omega}\sin\omega t$$

Damit (1-7) bewiesen.

f) $e^{j\omega t\left(\underline{b}_s^+\underline{b}_s+\frac{1}{2}\underline{I}\right)}\,\underline{b}_s\, e^{-j\omega t\left(\underline{b}_s^+\underline{b}_s+\frac{1}{2}\underline{I}\right)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(j\omega t)^n}{n!}\left[\underline{b}_s^+\underline{b}_s, \underline{b}_s\right]_{(n)}$

Zwischenrechnung:

$[\ \ ]_{(0)} = \underline{b}_s$

$[\ \ ]_{(1)} = -\underline{b}_s$

$[\ \ ]_{(2)} = -[\underline{b}_s^+\underline{b}_s, \underline{b}_s] = \underline{b}_s$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(j\omega t)^n}{n!}\underline{b}_s(-1)^n = \underline{b}_s e^{-j\omega t}$ Damit (1-8) bewiesen.

Weitere Aufgaben der Operatorenalgebra: Lösen von Operatorengleichungen.
Grundgedanke: Operatorengleichung → „übersetzen" in äquivalente c-Zahlen-Gleichung → „Lösen" → „Zurückübersetzung" des Ergebnisses in Operatorbeziehung.

3.) Normalform von Bosonenoperatoren. Normalgeordnete Produkte.

$[\underline{b}_i, \underline{b}_j^+] = \underline{I}\delta_{ij} \qquad [\underline{b}_i, \underline{b}_j] = [\underline{b}_i^+, \underline{b}_j^+] = 0$ (3-1)

Folgende Beziehungen nur für eine „Sorte" Bosonen abgeleitet.

Definition: Eine in eine Potenzreihe der $\underline{b}, \underline{b}^+$ entwickelbare Funktion $f(\underline{b}^+, \underline{b})$ ist dann in Normalform $f_N(\underline{b}^+, \underline{b})$, wenn in den Potenzprodukten alle Erzeugeroperatoren links von den Vernichteroperatoren stehen. (3-2)

z. Bsp.: $f(\underline{b}^+, \underline{b}) = \underline{b}\,\underline{b}^+$ nicht in Normalform.

$\underline{b}\,\underline{b}^+ = \underline{b}^+\underline{b} + \underline{I}$

$f_N(\underline{b}^+, \underline{b}) = \underline{b}^+\underline{b} + \underline{I}$ Normalform

Als Operator ist $f(\underline{b}^+, \underline{b}) = f_N(\underline{b}^+, \underline{b})$, hat aber andere Form. $(\underline{b}\,\underline{b}^+)_N = \underline{b}^+\underline{b} + \underline{I}$

<u>Definition</u> des Normalordnungsoperators $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{N}\{\underline{b}^n\underline{b}^{+n}\} = \mathcal{N}\{\underline{b}^{n-1}\underline{b}^{+n}\underline{b}\} = \mathcal{N}\{\quad\}\dots = \underline{b}^{+n}\underline{b}^{n} \qquad (3\text{-}3)$$

$$\mathcal{N}\{f_1+f_2\} = \mathcal{N}f_1 + \mathcal{N}f_2$$

$$\mathcal{N}(\underline{I}) = \underline{I}$$

unter dem Operator $\mathcal{N}$ stehende Ausdrücke kann man in $\underline{b}^+, \underline{b}$ beliebig umstellen ohne etwas zu ändern!

Der Normalordnungsoperator stellt in einem Potenzprodukt alle Erzeuger links von den Vernichtern <u>ohne</u> Rücksicht auf Vertauschungsrelationen. Man kann $\mathcal{N}$ auch für c-Zahlen b, b^+ definieren analog (3-3), so, daß alle b^+ links von den b stehen. Da b^+, b aber vertauschen (c-Zahlen!) gilt trivialerweise

$$\mathcal{N} f(b^+,b) = f(b^+,b) = f_N(b^+,b) : b^+, b \text{ c-Zahlen!} \qquad (3\text{-}4)$$

<u>Damit neue Definition der Normalform:</u>

$$\mathcal{N} f_N(\underline{b}^+,\underline{b}) = f_N(\underline{b}^+,\underline{b}) \qquad (3\text{-}5)$$

$$\{\mathcal{N} f(\underline{b}^+,\underline{b})\}_N = \mathcal{N} f(\underline{b}^+,\underline{b})$$

Eine Funktion in Normalform ändert sich nicht bei Anwendung von $\mathcal{N}$. Die Funktion $\mathcal{N}f$ ist normalgeordnet, sie liegt in Normalform vor.

Beispiele: a) $f(\underline{b}^+,\underline{b}) = \underline{b}$ $\qquad \mathcal{N}\underline{b} = \underline{b}$

$f_N(\underline{b}^+,\underline{b}) = \underline{b} = (\underline{b})_N$

b) $\underline{b}\underline{b}^+ = \underline{b}^+\underline{b} + \underline{I}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{N}(\underline{b}\underline{b}^+) = \underline{b}^+\underline{b} \\ \mathcal{N}(\underline{b}^+\underline{b}+\underline{I}) = \underline{b}^+\underline{b}^+ + \underline{I} \end{array}\right\} \quad \mathcal{N}(\underline{b}\underline{b}^+) \neq \mathcal{N}(\underline{b}^+\underline{b}+\underline{I})$$

d.h.: eine Gleichung (bei der nicht beide Seiten in Normalform vorliegen) wird durch Anwenden von $\mathcal{N}$ zur Ungleichung.

c) $\underline{b}\underline{b}^+ \neq \underline{b}^+\underline{b}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{N}(\underline{b}\underline{b}^+) = \underline{b}^+\underline{b} \\ \mathcal{N}(\underline{b}^+\underline{b}) = \underline{b}^+\underline{b} \end{array}\right\} \quad \mathcal{N}(\underline{b}\underline{b}^+) = \mathcal{N}(\underline{b}^+\underline{b})$$

Eine Ungleichung kann durch Anwenden von $\mathcal{N}$ zur Gleichung werden.

d) $f(\underline{b}^+,\underline{b}) = \exp(x\underline{b}^+\underline{b})$

$$\mathcal{N} f(\underline{b}^+,\underline{b}) = \mathcal{N}\exp(x\underline{b}^+\underline{b}) = \mathcal{N}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(\underline{b}^+\underline{b})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\underline{b}^{+n}\underline{b}^n \quad ..$$

e) $f(\underline{b}^+,\underline{b}) = \exp(x\underline{b}^+\underline{b})$

$$f_N(\underline{b}^+,\underline{b}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(\underline{b}^+\underline{b})^n_N \longrightarrow \begin{array}{l} (\underline{b}^+\underline{b})^0_N = \underline{I} \\ (\underline{b}^+\underline{b})^1_N = \underline{b}^+\underline{b} \\ (\underline{b}^+\underline{b})^2_N = (\underline{b}^+\underline{b}\,\underline{b}^+\underline{b})_N = \underline{b}^+(\underline{I}+\underline{b}^+\underline{b})\underline{b} = \underline{b}^+\underline{b} + \underline{b}^{+2}\underline{b}^2 \end{array}$$

Wls. Langhiezig

Daraus Lehre ziehen:

$\mathcal{N} f$ zu finden ist meist trivial

f_N zu finden, ist sehr schwierig.

Problem: f_N zu finden, wird mit Operatoralgebra gelöst. Frage: wozu braucht man f_N ??

4) Die T-Transformation nach Heffner und Louisell

Definition:

$$T\{f(\underline{b}^+,\underline{b})\} = f_N(b^+,b) \qquad (4\text{-}1)$$

Rezept: Man finde zu $f(\underline{b}^+,\underline{b})$ die Normalform $f_N(\underline{b}^+,\underline{b})$, ersetze in ihr die Operatoren durch c-Zahlen.

$$T^{-1}\{f(b^+,b)\} = \mathcal{N} f(\underline{b}^+,\underline{b}) \qquad (4\text{-}2)$$

Rezept: Man deute in einer c-Zahlenfunktion alle Größen als Operatoren und wende dann $\mathcal{N}$ an.

Ist diese Transformation eindeutig umkehrbar?

a) $\quad T f(\underline{b}^+,\underline{b}) = f_N(b^+,b)$

als Operator, nicht in der Form!

$$T^{-1}T f(\underline{b}^+,\underline{b}) = T^{-1} f_N(b^+,b) = \mathcal{N} f_N(\underline{b}^+,\underline{b}) = f_N(\underline{b}^+,\underline{b}) = f(\underline{b}^+,\underline{b})$$

$$\text{ergo:} \quad T^{-1}T = \underline{I} \qquad (4\text{-}3)$$

b) $\quad T^{-1} f(b^+,b) = \mathcal{N} f(\underline{b}^+,\underline{b})$

$$T T^{-1} f(b^+,b) = T\mathcal{N} f(\underline{b}^+,\underline{b}) = T\{\mathcal{N} f(\underline{b}^+,\underline{b})\}_N = \mathcal{N} f(b^+,b) = f_N(b^+,b) = f(b^+,b)$$

$$\text{ergo} \quad T T^{-1} = 1$$

Damit eindeutig umkehrbar.

Beispiel: $\quad f(\underline{b}^+,\underline{b}) = \underline{b}^+\underline{b}\,\underline{b}^+\underline{b}^2$

als Operator!

$$f_N(\underline{b}^+,\underline{b}) = \underline{b}^+(\underline{I}+\underline{b}^+\underline{b})\underline{b}^2 = \underline{b}^+\underline{b}^2 + \underline{b}^{+2}\underline{b}^3 = f(\underline{b}^+,\underline{b})$$

$T f(\underline{b}^+,\underline{b}) = b^+b^2 + b^{+2}b^3 =$ z.B. $= b^2b^+ + b^3b^{+2}$ da c-Zahlen!

$$T^{-1}\{b^+b^2 + b^{+2}b^3\} = \mathcal{N}\{\underline{b}^+\underline{b}^2 + \underline{b}^{+2}\underline{b}^3\} = \underline{b}^+\underline{b}^2 + \underline{b}^{+2}\underline{b}^3$$

auch $T^{-1}\{b^2b^+ + b^3b^{+2}\} = \mathcal{N}\{\underline{b}^2\underline{b}^+ + \underline{b}^3\underline{b}^{+2}\} = \underline{b}^+\underline{b}^2 + \underline{b}^{+2}\underline{b}^3$ gibt gleiches Ergebnis!

D.h. irgendwelche Vertauschungen, die im c-Zahlen-Bereich vorgenommen werden, wirken sich nicht aus auf den Operator zufolge der Operation $\mathcal{N}$ bei T^{-1}!

Problem: Auffinden von Normalformen um T-Transformation anwenden zu können.

5) Sätze über Bosonenoperatoren

$$[\underline{b},\underline{b}^+]=\underline{I} \qquad (5\text{-}1)$$

Ableitung: $$\frac{\partial f(\underline{b})}{\partial \underline{b}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\underline{b}+\varepsilon \underline{I}) - f(\underline{b})}{\varepsilon} = \lim_{x\to 0}\frac{\partial f(\underline{b}+x\underline{I})}{\partial x} \qquad (5\text{-}2)$$

Durch Induktion läßt sich aus (5-1) beweisen und mit (5-2) formulieren:

$$[\underline{b},\underline{b}^{+m}] = m\,\underline{b}^{+(m-1)} = \frac{\partial}{\partial \underline{b}^+}(\underline{b}^+)^m$$

$$[\underline{b}^+,\underline{b}^m] = -m\,\underline{b}^{m-1} = -\frac{\partial}{\partial\underline{b}}(\underline{b})^m \qquad (5\text{-}3)$$

Weitere Verallgemeinerung davon (Beweis später)

$$[\underline{b}, f(\underline{b}^+,\underline{b})] = \frac{\partial f(\underline{b}^+,\underline{b})}{\partial \underline{b}^+}$$

$$[\underline{b}^+, f(\underline{b}^+,\underline{b})] = -\frac{\partial f(\underline{b}^+,\underline{b})}{\partial \underline{b}} \qquad (5\text{-}4)$$

Satz 1: $$e^{x\underline{b}} f(\underline{b}^+,\underline{b})\, e^{-x\underline{b}} = f(\underline{b}^+ + x\underline{I}, \underline{b})$$

$$e^{-x\underline{b}^+} f(\underline{b}^+,\underline{b})\, e^{x\underline{b}^+} = f(\underline{b}^+, \underline{b} + x\underline{I}) \qquad (5\text{-}5)$$

Beweis: $$e^{x\underline{b}} f(\underline{b}^+,\underline{b})\, e^{-x\underline{b}} = f(e^{x\underline{b}}\underline{b}^+ e^{-x\underline{b}}, e^{x\underline{b}}\underline{b}\, e^{-x\underline{b}})$$

$$e^{x\underline{b}}\underline{b}\, e^{-x\underline{b}} = \underline{b}$$

$$e^{x\underline{b}}\underline{b}^+ e^{-x\underline{b}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}[\underline{b},\underline{b}^+]_{(n)} = \underline{b}^+ + x\underline{I}$$

Satz 2: $$e^{x\underline{b}^+\underline{b}} f(\underline{b}^+,\underline{b})\, e^{-x\underline{b}^+\underline{b}} = f(\underline{b}^+ e^{x}, \underline{b}\, e^{-x})$$

$$e^{x\underline{b}^+\underline{b}}\,\underline{b}\, e^{-x\underline{b}^+\underline{b}} = \underline{b}\, e^{-x} \qquad (5\text{-}6)$$

$$e^{x\underline{b}^+\underline{b}}\,\underline{b}^+ e^{-x\underline{b}^+\underline{b}} = \underline{b}^+ e^{x}$$

Beweis: $$e^{x\underline{b}^+\underline{b}}\,\underline{b}\, e^{-x\underline{b}^+\underline{b}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}[\underline{b}^+\underline{b},\underline{b}]_{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(-1)^n\underline{b} = \underline{b}\, e^{-x}$$

Beweise für Gl. (5-4):

$$f(\underline{b}^+,\underline{b}) = f_N(\underline{b}^+,\underline{b}) = \sum_{m,n} c_{mn}\, \underline{b}^{+m}\underline{b}^{n}$$

$$[\underline{b}, f(\underline{b}^+,\underline{b})] = \sum_{m,n} c_{mn}[\underline{b},\underline{b}^{+m}\underline{b}^{n}] = \sum_{m,n} c_{mn}[\underline{b},\underline{b}^{+m}]\,\underline{b}^{n} = \sum_{m,n} c_{mn}\, m\, \underline{b}^{+m-1}\underline{b}^{n} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \underline{b}^+}\sum_{m,n} c_{mn}\,\underline{b}^{+m}\underline{b}^{n} = \frac{\partial f(\underline{b}^+,\underline{b})}{\partial \underline{b}^+}$$

Anderer Beweis: $F(x) = e^{xb} f(b^+, b) e^{-xb} = f(b^+ + xI, b)$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = b F(x) - F(x) b = [b, F(x)] = \frac{\partial f(b^+ + xI, b)}{\partial x}$$

Da $F(0) = f(b^+, b)$ gilt:

$$[b, f(b^+, b)] = \lim_{x \to 0} \frac{\partial f(b^+ + xI, b)}{\partial x} = \frac{\partial f(b^+, b)}{\partial b^+}$$

Die Differentiation muß auf die Reihenfolge der Operatoren achten;

Beispiel:

a) $[b, b^+ b b^{+2}] = \frac{\partial}{\partial b^+}\{b^+ b b^{+2}\} = b b^{+2} + 2 b^+ b b^+$

b) $[b, e^{x b^+ b}] = \frac{\partial}{\partial b^+} e^{x b^+ b} = \frac{\partial}{\partial b^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (b^+ b)^n = ??$ nicht übersichtlich zu schreiben. Wäre leicht lösbar, wenn die Normalform von $e^{x b^+ b}$ bekannt wäre!

6) Auffinden der Normalform.

Satz:

$$b f_N(b^+, b) = \{b f_N(b^+, b)\}_N = \mathcal{N}\left\{\left(b + \frac{\partial}{\partial b^+}\right) f_N(b^+, b)\right\}$$
$$f_N(b^+, b) b^+ = \{f_N(b^+, b) b^+\}_N = \mathcal{N}\left\{\left(b^+ + \frac{\partial}{\partial b}\right) f_N(b^+, b)\right\} \qquad (6\text{-}1)$$

Auf die Reihenfolge der Terme unter $\mathcal{N}\{\ \}$ braucht man beim Differenzieren nicht achten, weil ja $\mathcal{N}$ die Reihenfolge später vorschreibt. Aus (6-1) durch Induktion

Satz:

$$b^m f_N = \{b^m f_N\}_N = \mathcal{N}\left\{\left(b + \frac{\partial}{\partial b^+}\right)^m f_N\right\}$$
$$f_N b^{+m} = \{f_N b^{+m}\}_N = \mathcal{N}\left\{\left(b^+ + \frac{\partial}{\partial b}\right) f_N\right\} \qquad (6\text{-}2)$$

Beweis von (6-1) mit (5-4)

$$[b, f_N] = \frac{\partial f_N}{\partial b^+} = b f_N - f_N b \quad \rightarrow \quad b f_N = f_N b + \frac{\partial f_N}{\partial b^+} = \mathcal{N}\{b f_N\} + \mathcal{N}\left\{\frac{\partial f_N}{\partial b^+}\right\}$$

da eine Funktion in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, gilt als Verallgemeinerung von (6-2):

Satz:

$$g(b) f_N = \{g(b) f_N\}_N = \mathcal{N}\left\{g\left(b + \frac{\partial}{\partial b^+}\right) f_N\right\}$$
$$f_N g(b^+) = \{f_N g(b^+)\}_N = \mathcal{N}\left\{g\left(b^+ + \frac{\partial}{\partial b}\right) f_N\right\} \qquad (6\text{-}3)$$

Ist $g(b^+, b)$ selbst wieder eine allgemeine Operatorfunktion, deren Normalform g_N bekannt ist, so folgt als Verallgemeinerung von (6-3):

$$g_N(b^+, b) f_N(b^+, b) = \{g_N f_N\}_N = \mathcal{N}\left\{g_N\left(b^+, b + \frac{\partial}{\partial b^+}\right) f_N(b^+, b)\right\}$$
$$f_N(b^+, b) g_N(b^+, b) = \{f_N g_N\}_N = \mathcal{N}\left\{g_N\left(b^+ + \frac{\partial}{\partial b}, b\right) f_N(b^+, b)\right\} \qquad (6\text{-}4)$$

Die Ligatur in (6-4) soll bedeuten: In der 1. Gleichung: $\frac{\partial}{\partial b^+}$ ist nur auf die b^+ in f_N anzuwenden, nicht auf die in g_N! Analog in der 2. Gleichung: $\partial/\partial b$ ist nur auf die b in f_N anzuwenden, nicht auf die in g_N!

Aus (6-4) folgt

$$g_N(\underline{b}^+,\underline{b})\, f_N(\underline{b}^+,\underline{b}) = \{g_N f_N\}_N = \mathcal{N}\left\{ g_N\left(\underline{b}^+, \underline{b}+\frac{\partial}{\partial \underline{b}^+}\right) f_N(\underline{b}^+,\underline{b})\right\} = \tag{6-5}$$
$$= \mathcal{N}\left\{ f_N\left(\underline{b}^+ + \frac{\partial}{\partial \underline{b}}, \underline{b}\right) g_N(\underline{b}^+,\underline{b})\right\}$$

Durch Anwenden von (5-5) folgen weitere Normalformen

$$\{e^{x\underline{b}} f_N(\underline{b}^+,\underline{b})\}_N = f_N(\underline{b}^+ + x\underline{I}, \underline{b})\, e^{x\underline{b}} = \mathcal{N}\{e^{x\underline{b}} f_N(\underline{b}^+ + x\underline{I}, \underline{b})\}$$
$$\{f_N(\underline{b}^+,\underline{b})\, e^{x\underline{b}^+}\}_N = e^{x\underline{b}^+} f_N(\underline{b}^+, \underline{b} + x\underline{I}) = \mathcal{N}\{e^{x\underline{b}^+} f_N(\underline{b}^+, \underline{b}+x\underline{I})\} \tag{6-6}$$

Satz: Gesucht: im Argument steht das Produkt $\underline{b}^+\underline{b}$!

$$f_N(\underline{b}^+\underline{b}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} \frac{(-1)^m f(l-m)}{(l-m)!\, m!} (\underline{b}^+)^l (\underline{b})^l \tag{6-7}$$

Skizze des Beweises: $\underline{b}^{+l}\underline{b}^l = \underline{b}^+\underline{b}\,[\underline{b}^+\underline{b}-\underline{I}][\underline{b}^+\underline{b}-2\underline{I}] \dots [\underline{b}^+\underline{b}-(l-1)\underline{I}]$

Damit ist der Ansatz gerechtfertigt $f_N(\underline{b}^+\underline{b}) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l (\underline{b}^+)^l (\underline{b})^l$

Nun gilt aber

$$f_N(\underline{b}^+\underline{b})|m\rangle = f(m)|m\rangle = \sum_{l=0}^{m} C_l\, m(m-1)(m-2)\dots[m-(l-1)]|m\rangle = \sum_{l=0}^{m} C_l \frac{m!}{(m-l)!}|m\rangle$$

Vergleich: $f(0) = C_0$
$f(1) = C_0 + C_1$
$f(2) = C_0 + 2C_1 + 2!\,C_2$ usw. Daraus C_l zu ermitteln!

Formel für die T-Transformation: (Anwendung von 6-5)

$$T\{g(\underline{b}^+,\underline{b}) f(\underline{b}^+,\underline{b})\} = T\{g_N(\underline{b}^+,\underline{b}) f_N(\underline{b}^+,\underline{b})\} = \{g_N(b^+,b) f_N(b^+,b)\}_N =$$
$$= g_N\left(b^+, b+\frac{\partial}{\partial b^+}\right) f_N(b^+,b) = g_N\left(b^+, b+\frac{\partial}{\partial b^+}\right) T\{f(\underline{b}^+,\underline{b})\} =$$
$$= f_N\left(b^+ + \frac{\partial}{\partial b}, b\right) g_N(b^+,b) = f_N\left(b^+ + \frac{\partial}{\partial b}, b\right) T\{g(\underline{b}^+,\underline{b})\} \tag{6-8}$$

Beispiele:

a) $\{e^{x\underline{b}} f_N(\underline{b}^+,\underline{b})\}_N = ?$

Lösung 1: Anwendung von (6-6):

$$\{e^{x\underline{b}} f_N(\underline{b}^+,\underline{b})\}_N = f_N(\underline{b}^+ + x\underline{I}, \underline{b})\, e^{x\underline{b}}$$

Lösung 2: Anwendung von (6-3):

$$\{e^{x\underline{b}} f_N(\underline{b}^+,\underline{b})\}_N = \mathcal{N}\left\{e^{x\left(\underline{b}+\frac{\partial}{\partial \underline{b}^+}\right)} f_N(\underline{b}^+,\underline{b})\right\} =$$ Da unter dem Operator $\mathcal{N}$ alle $\underline{b}^+, \underline{b}$ vertauschen =
$$= \mathcal{N}\left\{e^{x\underline{b}} e^{x\frac{\partial}{\partial \underline{b}^+}} f_N(\underline{b}^+,\underline{b})\right\} =$$
$$= e^{x\frac{\partial}{\partial \underline{b}^+}} f_N(\underline{b}^+,\underline{b})\, e^{x\underline{b}}$$

Sollen diese Lösungen übereinstimmen, so müßte $f_N(\underline{b}^+ + x\underline{I}, \underline{b})$ in der Form $e^{x\frac{\partial}{\partial \underline{b}^+}} f_N(\underline{b}^+,\underline{b})$ geschrieben werden können.

Beweis: $e^{x\frac{\partial}{\partial \underline{b}^+}} f_N(\underline{b}^+,\underline{b}) = e^{x\frac{\partial}{\partial \underline{b}^+}} \sum_{m,n} c_{mn} \underline{b}^{+m} \underline{b}^n = \sum_{m,n} c_{mn} \left(\underline{I} + x\frac{\partial}{\partial \underline{b}^+} + \frac{x^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial \underline{b}^{+2}} + \dots \right) \underline{b}^{+m} \underline{b}^n =$

$$= \sum_{m,n} c_{mn} \left\{ \underline{b}^{+m} + xm(\underline{b}^+)^{m-1} + \frac{x^2}{2!} m(m-1)(\underline{b}^+)^{m-2} + \dots + \frac{x^m}{m!} m(m-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1 (\underline{b}^+)^0 \right\} \underline{b}^n =$$

$$= \sum_{m,n} c_{mn} \left\{ \binom{m}{0} (\underline{b}^+)^m x^0 + \binom{m}{1} (\underline{b}^+)^{m-1} x + \dots + \binom{m}{m} (\underline{b}^+)^0 x^m \right\} \underline{b}^n =$$

$= \sum_{m,n} c_{mn} (\underline{b}^+ + x\underline{I})^m \underline{b}^n = f_N(\underline{b}^+ + x\underline{I}, \underline{b})$ Damit ist die Identität bewiesen.

b) $\{ e^{x\underline{b}^+\underline{b}} \}_N = ?$

Lösung 1: Anwendung von (6-7)

$$\{ e^{x\underline{b}^+\underline{b}} \}_N = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} \frac{(-1)^m e^{x(l-m)}}{(l-m)!\,m!} (\underline{b}^+)^l (\underline{b})^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{xl}}{l!} (\underline{b}^+)^l (\underline{b})^l \sum_{m=0}^{l} \frac{l!\,(-e^{-x})^m}{(l-m)!\,m!} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{xl}}{l!} (\underline{b}^+)^l (\underline{b})^l \cdot \sum_{m=0}^{l} \binom{l}{m} (-e^{-x})^m (1)^{l-m} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{xl}(1-e^{-x})^l}{l!} (\underline{b}^+)^l (\underline{b})^l =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(e^x-1)^l}{l!} (\underline{b}^+)^l (\underline{b})^l = \mathcal{N} \left\{ e^{(e^x-1)\underline{b}^+\underline{b}} \right\}$$

Lösung 2: Mit Hilfe der T-Transformation! (Rücktrafo gibt Normalform!)

$$f(\underline{b}^+,\underline{b}) = e^{x\underline{b}^+\underline{b}} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \underline{b}^+\underline{b} f$$

$$T\left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} T\{f\} = T\{\underline{b}^+\underline{b} f\} = (6\text{-}8) = b^+\left(b + \frac{\partial}{\partial b^+}\right) T\{f\}$$

$\frac{\partial T\{f\}}{\partial x} - b^+ \frac{\partial T\{f\}}{\partial b^+} = b^+ b\, T\{f\}$ quasilineare part. Dgl. 1. Ordnung für eine Funktion von x, b^+, und b (wobei b konstant ist, da keine Ableitung danach!)

$dx : db^+ : dT\{f\} = 1 : (-b^+) : b^+b\,T\{f\}$ Charakteristiken

$$\left. \begin{aligned} \frac{db^+}{dx} &= -b^+ \quad \longrightarrow \quad b^+ = C_1 e^{-x} \\ \frac{dT\{f\}}{db^+} &= -b\,T\{f\} \quad \longrightarrow \quad T\{f\} = C_2 e^{-b^+b} \end{aligned} \right\} \psi\left(b^+e^x, T\{f\}e^{b^+b}\right) = 0$$

Lösung: $T\{f\} e^{b^+b} = g(b^+e^x)$

$T\{f\} = g(b^+e^x) e^{-b^+b}$ Bedingung $T\{f(x=0)\} = 1$

$1 = g(b^+) e^{-b^+b}$, d.h.: $g(b^+) = e^{b^+b}$, somit $g(b^+e^x) = e^{e^x b^+ b}$

Damit ist $T\{f\} = e^{e^x b^+ b} \cdot e^{-b^+b} = e^{(e^x-1)b^+b}$

Rücktrafo:

$$f(\underline{b}^+,\underline{b}) = T^{-1}T\{f\} = T^{-1}\left\{ e^{(e^x-1)b^+b} \right\} = \mathcal{N}\left\{ e^{(e^x-1)\underline{b}^+\underline{b}} \right\}$$

Stimmt mit obigem Ergebnis überein.

c) Jetzt kann früheres Problem gelöst werden:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{b}^+} e^{x\underline{b}^+\underline{b}} = \frac{\partial}{\partial \underline{b}^+} \mathcal{N}\left\{e^{(e^x-1)\underline{b}^+\underline{b}}\right\} = \frac{\partial}{\partial \underline{b}^+}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^x-1)^n}{n!}(\underline{b}^+)^n(\underline{b})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^x-1)^n}{n!}\, n\, (\underline{b}^+)^{n-1}(\underline{b})^n =$$

$$= (e^{x-1})\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^x-1)^{n-1}}{(n-1)!}(\underline{b}^+)^{n-1}(\underline{b})^{n-1}\cdot\underline{b} = (e^x-1)\,\mathcal{N}\left\{e^{(e^x-1)\underline{b}^+\underline{b}}\right\}\underline{b}$$

$$= (e^x-1)\,e^{x\underline{b}^+\underline{b}}\,\underline{b} = (1-e^{-x})\,\underline{b}\,e^{x\underline{b}^+\underline{b}}$$

Beweis der zweiten Form:

$$[\underline{b}, e^{x\underline{b}^+\underline{b}}] = \frac{\partial}{\partial\underline{b}^+}e^{x\underline{b}^+\underline{b}} = (e^x-1)\,e^{x\underline{b}^+\underline{b}}\,\underline{b} = \underline{b}\,e^{x\underline{b}^+\underline{b}} - e^{x\underline{b}^+\underline{b}}\,\underline{b}$$

Daraus: $e^x e^{x\underline{b}^+\underline{b}}\,\underline{b} = \underline{b}\,e^{x\underline{b}^+\underline{b}}$ oder $e^{x\underline{b}^+\underline{b}}\,\underline{b} = e^{-x}\,\underline{b}\,e^{x\underline{b}^+\underline{b}}$

7. Behandlung von Drehimpuls und Spin.

Die T-Transformation ist nur dann anwendbar, wenn die Hamiltonfunktion durch Bosonenoperatoren ausgedrückt werden kann.

Erinnern an Eigenschaften der Drehimpulsoperatoren:

$[\underline{J}_x, \underline{J}_y] = -\frac{\hbar}{j}\underline{J}_z$ und zyklisch (7-1)

$[\underline{\vec J}^2, \underline{J}_x] = [\underline{\vec J}^2, \underline{J}_y] = [\underline{\vec J}^2, \underline{J}_z] = 0$ (7-2)

$\underline{\vec J}^2 = \underline{J}_x^2 + \underline{J}_y^2 + \underline{J}_z^2$ $\quad \underline{J}_x = \frac{1}{2}(\underline{J}_+ + \underline{J}_-)$ (7-3)

$\underline{J}_y = \frac{1}{2j}(\underline{J}_+ - \underline{J}_-)$

$\underline{\vec J}^2 |J,M\rangle = \hbar^2 J(J+1)|J,M\rangle$ $\quad J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ usw (Bahn: ganzzahlig) (7-4)

$\underline{J}_z |J,M\rangle = \hbar M |J,M\rangle$ $\quad M = J, J-1, \ldots, -J$ (d.h. $2J+1$ Werte)

$\underline{J}_\pm |J,M\rangle = \hbar\sqrt{J(J+1) - M(M\pm1)}\,|J, M\pm1\rangle$ (7-5)

$\underline{J}_+ |J,J\rangle = 0$ $\quad \underline{J}_- |J,-J\rangle = 0$

Bei Spin war $J = s = \frac{1}{2}$, $M = m_s = \pm 1/2$.

Es werden definiert: Für jedes Teilchen mit Drehimpuls werden zwei Sätze von Bosonenoperatoren definiert mit den Eigenschaften:

$[\underline{\alpha}, \underline{\alpha}^+] = \underline{I}$ $\quad [\underline{\beta}, \underline{\beta}^+] = \underline{I}$ (7-6)

Es kommutieren die $\underline{\alpha}, \underline{\alpha}^+$ mit den $\underline{\beta}, \underline{\beta}^+$; Die $\underline{\alpha}, \underline{\alpha}^+, \underline{\beta}, \underline{\beta}^+$ eines Teilchens kommutieren mit den $\underline{\alpha}, \underline{\alpha}^+, \underline{\beta}, \underline{\beta}^+$ jedes anderen Teilchens.

Man definiert Operatoren

$\underline{J}_+ = \hbar\,\underline{\alpha}^+\underline{\beta}$ (7-7)

$\underline{J}_- = \hbar\,\underline{\alpha}\,\underline{\beta}^+$

Analog zu (7-3) definiert man Operatoren

$$\underline{J}_x = \frac{\hbar}{2}(\underline{\alpha}^+\underline{\beta} + \underline{\alpha}\underline{\beta}^+)$$

$$\underline{J}_y = \frac{\hbar}{2j}(\underline{\alpha}^+\underline{\beta} - \underline{\alpha}\underline{\beta}^+) \qquad (7\text{-}8)$$

$$\underline{J}_z = \frac{\hbar}{2}(\underline{\alpha}^+\underline{\alpha} - \underline{\beta}^+\underline{\beta})$$

$$\vec{\underline{J}}^2 = \hbar^2 \frac{1}{2}(\underline{\alpha}^+\underline{\alpha} + \underline{\beta}^+\underline{\beta})\left[\frac{1}{2}(\underline{\alpha}^+\underline{\alpha} + \underline{\beta}^+\underline{\beta}) + \underline{I}\right]$$

Alle diese Operatoren erfüllen unter der Voraussetzung (7-6) die Vertauschungsrelationen (7-1)(7-2). Die letzten beiden Gleichungen (7-8) legen es nahe, weitere Operatoren als Abkürzung zu definieren

$$\underline{N}_\alpha = \underline{\alpha}^+\underline{\alpha} \qquad \underline{N}_\beta = \underline{\beta}^+\underline{\beta} \qquad (7\text{-}9)$$

sowie $\underline{M} = \frac{1}{2}(\underline{N}_\alpha - \underline{N}_\beta)$ d.h. $\underline{J}_z = \hbar \underline{M}$ (7-10)

$\underline{J} = \frac{1}{2}(\underline{N}_\alpha + \underline{N}_\beta)$ d.h. $\vec{\underline{J}}^2 = \hbar^2 \underline{J}(\underline{J} + \underline{I})$

Da $\underline{N}_\alpha$ mit $\underline{N}_\beta$ kommutiert, gibt es simultane Eigenzustände $|n_\alpha, n_\beta\rangle$ mit der Eigenschaft

$$\underline{N}_\alpha |n_\alpha, n_\beta\rangle = n_\alpha |n_\alpha, n_\beta\rangle$$
$$\underline{N}_\beta |n_\alpha, n_\beta\rangle = n_\beta |n_\alpha, n_\beta\rangle \qquad n_\alpha, n_\beta = 0, 1, 2, 3 \ldots \text{(Bosonen!)} \qquad (7\text{-}11)$$

$$\underline{\alpha}^+ |n_\alpha, n_\beta\rangle = \sqrt{n_\alpha + 1}\, |n_\alpha + 1, n_\beta\rangle$$
$$\underline{\beta}^+ |n_\alpha, n_\beta\rangle = \sqrt{n_\beta + 1}\, |n_\alpha, n_\beta + 1\rangle \qquad (7\text{-}12)$$
$$\underline{\alpha} |n_\alpha, n_\beta\rangle = \sqrt{n_\alpha}\, |n_\alpha - 1, n_\beta\rangle$$
$$\underline{\beta} |n_\alpha, n_\beta\rangle = \sqrt{n_\beta}\, |n_\alpha, n_\beta - 1\rangle$$

Es gilt

$$\underline{J} |n_\alpha n_\beta\rangle = \frac{1}{2}(\underline{N}_\alpha + \underline{N}_\beta)|n_\alpha, n_\beta\rangle = J |n_\alpha, n_\beta\rangle = \frac{1}{2}(n_\alpha + n_\beta)|n_\alpha, n_\beta\rangle, \text{ d.h.}$$

Eigenwerte von $\underline{J}$: $J = \frac{1}{2}(n_\alpha + n_\beta) = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ (7-13)

Eigenwerte von $\vec{\underline{J}}^2$: $\hbar^2 J(J+1)$

Damit werden gerade die möglichen Eigenwerte des Gesamtdrehimpulses erzeugt. Welche Zustände $|n_\alpha, n_\beta\rangle$ realisieren eine gegebene Quantenzahl J?

$J = 0$	$\|0,0\rangle$			
$J = 1/2$	$\|1,0\rangle$	$\|0,1\rangle$		
$J = 1$	$\|2,0\rangle$	$\|1,1\rangle$	$\|0,2\rangle$	
$J = 3/2$	$\|3,0\rangle$	$\|2,1\rangle$	$\|1,2\rangle$	$\|0,3\rangle$

(7-14)

d.h.: Jeder J-Wert ist $(2J+1)$-fach entartet (damit auch jeder Eigenwert von $\vec{\underline{J}}^2$ ebenfalls $(2J+1)$-fach entartet). Mit (7-14) sieht man:

Eigenwerte von $\underline{M}$: $M = \frac{1}{2}(n_\alpha - n_\beta)$ von $J, J-1, \ldots\ldots, -J$. (7-15)

Eigenwerte von $\underline{J}_z$: $\hbar M$, also $\hbar J, \hbar(J-1) \ldots\ldots, -\hbar J$

Aus (7-13)(7-15) sieht man zweckmäßige Neubenennung von n_α, n_β:

$$n_\alpha = J + M, \quad n_\beta = J - M, \qquad |n_\alpha, n_\beta\rangle = |J+M, J-M\rangle \qquad (7\text{-}16)$$

In dieser Schreibweise erhält man mit $|n_\alpha, n_\beta\rangle = |J+M, J-M\rangle$

$$\underline{\vec{J}}^2 |J+M, J-M\rangle = \hbar^2 \underline{J}(\underline{J}+\underline{I})|J+M, J-M\rangle = \hbar^2 \tfrac{1}{2}(\underline{N}_\alpha+\underline{N}_\beta)\left[\tfrac{1}{2}(\underline{N}_\alpha+\underline{N}_\beta)+\underline{I}\right]|J+M, J-M\rangle$$

$$= \hbar^2 J(J+1)\,|J+M, J-M\rangle \qquad (7\text{-}17)$$

$$\underline{J}_z |J+M, J-M\rangle = \hbar \underline{M}\,|J+M, J-M\rangle = \hbar \tfrac{1}{2}(\underline{N}_\alpha-\underline{N}_\beta)|J+M, J-M\rangle = \hbar M\,|J+M, J-M\rangle$$

Jeder Bosonenzustand kann aus dem Vakuumzustand erzeugt werden

$$|n_\alpha, n_\beta\rangle = \frac{(\underline{\alpha}^+)^{n_\alpha}(\underline{\beta}^+)^{n_\beta}}{\sqrt{n_\alpha!\, n_\beta!}}|0,0\rangle \quad \text{d.h.} \quad |J+M, J-M\rangle = \frac{(\underline{\alpha}^+)^{J+M}(\underline{\beta}^+)^{J-M}}{\sqrt{(J+M)!\,(J-M)!}}|0,0\rangle \qquad (7\text{-}18)$$

Große Vereinfachung beim Rechnen:

$$\underline{\alpha}^m \underline{\beta}^n |n_\alpha, n_\beta\rangle = \underline{\alpha}^m \underline{\beta}^n |J+M, J-M\rangle = \text{Null, wenn} \quad \begin{array}{r} n > J-M \\ m > J+M \\ \hline m+n > 2J \end{array}$$

d.h.: ein normalgeordnetes Produkt mit mehr als $m+n = 2J$ Vernichtern auf einen Zustand angewendet gibt sicher Null.

$\underline{J}_+ |2J, 0\rangle = \hbar \underline{\alpha}^+ \underline{\beta}\,|2J, 0\rangle = 0$ — Zustand mit J, $M=J$ nehmen: Zustand mit „Drehimpuls" J kann nur höchstens die z-Komponente J haben.

$$\underline{J}_- |2J, 0\rangle = \hbar \underline{\alpha}\underline{\beta}^+ |2J, 0\rangle = \hbar\sqrt{2J\cdot 1}\;|2J-1, 1\rangle$$

$$\underline{J}_-^2 |2J, 0\rangle = \hbar\sqrt{2J\cdot 1}\;\underline{J}_- |2J-1, 1\rangle = \hbar\sqrt{2J\cdot 1}\;\hbar\underline{\alpha}\underline{\beta}^+ |2J-1, 1\rangle = \hbar^2 \sqrt{2J(2J-1)\cdot 1\cdot 2}\;|2J-2, 2\rangle$$

Daraus sofort ablesen:

$$(\underline{J}_-)^{J-M}|2J, 0\rangle = (\hbar)^{J-M}\sqrt{2J(2J-1)\ldots[2J-(J-M-1)]\cdot 1\cdot 2\ldots(J-M)}\;|2J-(J-M), J-M\rangle =$$

$$= (\hbar)^{J-M}\sqrt{\frac{(2J)!}{(2J-(J-M))!}\,(J-M)!}\;|J+M, J-M\rangle = (\hbar)^{J-M}\sqrt{\frac{(2J)!\,(J-M)!}{(J+M)!}}\;|J+M, J-M\rangle$$

Daraus:

$$|n_\alpha, n_\beta\rangle = |J+M, J-M\rangle = \sqrt{\frac{(J+M)!}{(2J)!\,(J-M)!}}\left(\frac{\underline{J}_-}{\hbar}\right)^{J-M}|2J, 0\rangle \qquad (7\text{-}19)$$

Die Beziehung (7-19) wurde im „Formalismus d. QT", C (3-30) abgeleitet.

Spin:

$$|n_\alpha, n_\beta\rangle = |\tfrac{1}{2}+m_s, \tfrac{1}{2}-m_s\rangle$$

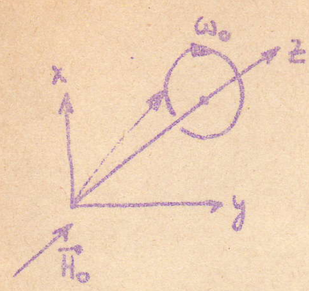
Es gibt nur 2 Zustände $|1,0\rangle$, $|0,1\rangle$. Für einen Spin im Magnetfeld gilt nach C (3-86)

$$\underline{H} = \frac{e}{mc}\,\vec{\underline{S}}\cdot\vec{B} \qquad \text{(Magnetfeld klassisch!)} \qquad (7\text{-}20)$$
$$= |\gamma|\,\vec{\underline{S}}\cdot\vec{B}$$

Für ein Feld $\vec{B} = (B_1 \cos\omega t, B_1 \sin\omega t, B_0)$ gilt mit $|\gamma| B_0 = \omega_0$ und (7-8) der Hamiltonoperator

$$\underline{H} = \tfrac{1}{2}|\gamma|\hbar B_1\left(\underline{\alpha}^+\underline{\beta}\,e^{-j\omega t} + \underline{\alpha}\underline{\beta}^+ e^{j\omega t}\right) + \tfrac{1}{2}\hbar\omega_0\left(\underline{\alpha}^+\underline{\alpha} - \underline{\beta}^+\underline{\beta}\right) \qquad (7\text{-}21)$$

8. Beispiel: Spinresonanz.



Spin bei $t=0$ präzediert um axiales Magnetfeld $\vec{H}_0$ mit ω_0.
Zusätzlich wird rechtszirkularpolarisiertes Feld der Frequenz ω angelegt (Wechselwirkung schon anschaulich besonders stark, wenn $\omega=\omega_0$ ist, da Drehsinn übereinstimmt!

Alles im Giorgi-System gerechnet.

a) Feld klassisch behandelt:

(7-20) lautet:

$$\underline{H} = \frac{e\mu_0}{m}\underline{\vec{s}}\cdot\vec{H} \tag{8-1}$$

$$\vec{H} = (H_1\cos\omega t,\ H_1\sin\omega t,\ H_0)$$

Der Hamiltonoperator mit (7-8) lautet:

$$\underline{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\left(\underline{\alpha}^+\underline{\alpha}-\underline{\beta}^+\underline{\beta}\right)+\frac{1}{2}\hbar\varkappa\left(\underline{\alpha}^+\underline{\beta}e^{-j\omega t}+\underline{\alpha}\underline{\beta}^+e^{j\omega t}\right) \tag{8-2}$$

$$\omega_0=\frac{e\mu_0}{m}H_0 \qquad \varkappa=\frac{e\mu_0}{m}H_1$$

b) Feld ebenfalls quantisiert.

Aus C (5-138) folgt für das Vektorpotential einer in z-Richtung laufenden Welle in der QM ein Vektoroperator mit den Komponenten (L^3 ist das betrachtete Volumen)

$$\underline{\vec{A}}(z,t)=\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega L^3}}\left\{\underline{b}_x(t)e^{jkz}+\underline{b}_x^+(t)e^{-jkz},\ \underline{b}_y(t)e^{jkz}+\underline{b}_y^+(t)e^{-jkz},\ 0\right\} \tag{8-3}$$

In (8-3) sind $\underline{b}_x, \underline{b}_x^+$ (bzw. $\underline{b}_y, \underline{b}_y^+$) die Vernichter bzw. Erzeuger für linearpolarisierte Photonen (x, bzw. y-polarisiert). Bei einer zirkularpolarisierten Welle sind x u. y-Komponente nicht unabhängig (sondern streng abhängig), es gibt daher nur <u>eine</u> Sorte von Photonen, nämlich rechtszirkulare.

Klassisch: Ein Vektor $(\cos\omega t, \sin\omega t, 0) = (e^{-j\omega t}+e^{j\omega t},\ je^{-j\omega t}-je^{j\omega t},\ 0)$ ist rechtszirkularpolarisiert (wenn man in Richtung der positiven z-Achse schaut).
Die Zeitabhängigkeit der QM ist $\underline{b}(t)\sim e^{-j\omega t}$, $\underline{b}^+(t)\sim e^{j\omega t}$! Daraus Anleitung, wie $\underline{b}_x$ und $\underline{b}_y$ abhängig sein müssen!

$$\left.\begin{aligned}\underline{b}_y(t)&=j\underline{b}_x(t)=j\frac{\underline{b}(t)}{\sqrt{2}}\\ \underline{b}_y^+(t)&=-j\underline{b}_x^+(t)=-j\frac{\underline{b}^+(t)}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}\ \underline{b}, \underline{b}^+\text{: Vernichter bzw. Erzeuger zirkularpol. Photonen (rechtszirkular)} \tag{8-4}$$

Der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ stammt daher: Die Energie ist bei den zwei unabhängigen Polarisationen (ohne Nullpktsenergie)

$$\hbar\omega\left(\underline{b}_x^+\underline{b}_x+\underline{b}_y^+\underline{b}_y\right), \tag{8-5}$$

die Energie im zirkularpolarisierten $\hbar\omega\underline{b}^+\underline{b}$. Soll (8-5) eine Darstellung eines zirkularen Strahls mit nach (8-4) abhängigen Operatoren sein, gilt

$$\hbar\omega\cdot 2\underline{b}_x^+\underline{b}_x=\hbar\omega\underline{b}^+\underline{b} \longrightarrow \text{Daraus der Faktor } \frac{1}{\sqrt{2}}!$$

Aus (8-3) (8-4) für rechtszirkularpolarisierte Welle mit ω, $k = \omega/c$:

$$\vec{\underline{A}}(z,t) = \sqrt{\frac{\hbar}{4\varepsilon_0 \omega L^3}} \left\{ \underline{b}(t) e^{jkz} + \underline{b}^+(t) e^{-jkz}, j\underline{b}(t) e^{jkz} - j\underline{b}^+(t) e^{-jkz}, 0 \right\} \qquad (8\text{-}6)$$

mit
$$\left.\begin{aligned} \underline{b}(t) &= \underline{b}\, e^{-j\omega t} \\ \underline{b}^+(t) &= \underline{b}^+ e^{j\omega t} \end{aligned}\right\} \text{Dabei sind } \underline{b}, \underline{b}^+ \text{ Schrödingeroperatoren!} \qquad (8\text{-}7)$$

$$\vec{\underline{A}}(z,t) = \sqrt{\frac{\hbar}{4\varepsilon_0 \omega L^3}} \left\{ \underline{b} e^{j(kz-\omega t)} + \underline{b}^+ e^{-j(kz-\omega t)}, j\underline{b} e^{j(kz-\omega t)} - j\underline{b}^+ e^{-j(kz-\omega t)}, 0 \right\}$$

$$\vec{\underline{E}}(z,t) = -\frac{\partial \vec{\underline{A}}}{\partial t} = j\sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\varepsilon_0 L^3}} \left\{ \underline{b} e^{j(kz-\omega t)} - \underline{b}^+ e^{-j(kz-\omega t)}, j\underline{b} e^{j(kz-\omega t)} + j\underline{b}^+ e^{-j(kz-\omega t)}, 0 \right\}$$

$$\vec{\underline{H}}(z,t) = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{\underline{A}} = \frac{1}{\mu_0} \left\{ -\frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z}, 0 \right\} = \qquad (8\text{-}8)$$

$$= \frac{1}{c\mu_0} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\varepsilon_0 L^3}} \left\{ \underline{b} e^{j(kz-\omega t)} + \underline{b}^+ e^{-j(kz-\omega t)}, j\underline{b} e^{j(kz-\omega t)} - j\underline{b}^+ e^{-j(kz-\omega t)}, 0 \right\}$$

Damit läßt sich (für eine Länge $L = n\lambda/2$) nachrechnen

$$\underline{H} = \int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^L dz \left(\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{\underline{E}}^2 + \tfrac{1}{2}\mu_0 \vec{\underline{H}}^2 \right) = \hbar\omega \left(\underline{b}^+\underline{b} + \tfrac{1}{2}\underline{I} \right) \qquad (8\text{-}9)$$

Jetzt wird das Spin an der Stelle $z=0$ eingeführt (ergo $\vec{\underline{H}}$ an der Stelle $z=0$ genommen)
Nach (8-1) gilt

$$\underline{H} = \frac{e\mu_0}{m} \vec{\underline{S}} \cdot \vec{\underline{H}} \qquad (8\text{-}10)$$

Man beachte, daß $\vec{\underline{H}}$ ebenfalls ein Operator ist! Noch gleichfalls berücksichtigen:

$$\vec{\underline{S}} = \left\{ \frac{\hbar}{2}(\underline{\alpha}^+\underline{\beta} + \underline{\alpha}\underline{\beta}^+), \frac{\hbar}{2j}(\underline{\alpha}^+\underline{\beta} - \underline{\alpha}\underline{\beta}^+), \frac{\hbar}{2}(\underline{\alpha}^+\underline{\alpha} - \underline{\beta}^+\underline{\beta}) \right\} \qquad (8\text{-}11)$$

$$\vec{\underline{H}}(0,t) = \left\{ \frac{1}{c\mu_0}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\varepsilon_0 L^3}} \left(\underline{b} e^{-j\omega t} + \underline{b}^+ e^{j\omega t} \right), \frac{j}{c\mu_0}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\varepsilon_0 L^3}} \left(\underline{b} e^{-j\omega t} - \underline{b}^+ e^{j\omega t} \right), H_0 \underline{I} \right\} \qquad (8\text{-}12)$$

Setzt man:
$$\omega_0 = \frac{e\mu_0}{m} H_0$$
$$\frac{\kappa_1}{2} = \frac{e\mu_0}{m} \left(\frac{1}{c\mu_0} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\varepsilon_0 L^3}} \right) \qquad (8\text{-}13)$$

so folgt

$$\underline{H} = \tfrac{1}{2}\hbar\omega_0 (\underline{\alpha}^+\underline{\alpha} - \underline{\beta}^+\underline{\beta}) + \frac{\hbar}{2}\frac{\kappa_1}{2}(\underline{\alpha}^+\underline{\beta} + \underline{\alpha}\underline{\beta}^+)(\underline{b} e^{-j\omega t} + \underline{b}^+ e^{j\omega t}) + \frac{\hbar}{2}\frac{\kappa_1}{2}(\underline{\alpha}^+\underline{\beta} - \underline{\alpha}\underline{\beta}^+) \cdot (\underline{b} e^{-j\omega t} - \underline{b}^+ e^{j\omega t}) .$$

$$\underline{H} = \tfrac{1}{2}\hbar\omega_0 (\underline{\alpha}^+\underline{\alpha} - \underline{\beta}^+\underline{\beta}) + \tfrac{1}{2}\hbar\kappa_1 (\underline{\alpha}^+\underline{\beta}\, \underline{b} e^{-j\omega t} + \underline{\alpha}\underline{\beta}^+ \underline{b}^+ e^{j\omega t}) \qquad (8\text{-}14)$$

um die gesamte Energie zu erhalten, muß noch die des Feldes addiert werden:

$$\underline{H}_{ges} = \hbar\omega(\underline{b}^+\underline{b} + \tfrac{1}{2}\underline{I}) + \tfrac{1}{2}\hbar\omega_0(\underline{\alpha}^+\underline{\alpha} - \underline{\beta}^+\underline{\beta}) + \tfrac{1}{2}\hbar\varkappa_1(\underline{\alpha}^+\underline{\beta}\,\underline{b}\,e^{-j\omega t} + \underline{\alpha}\underline{\beta}^+\underline{b}^+ e^{j\omega t}) \qquad (8-15)$$

beachte: $\hbar\underline{\alpha}^+\underline{\beta}\,\underline{b} = \underline{S}_+\underline{b}$: Vernichten eines Photons, Spin hinaufklappen

$\hbar\underline{\alpha}\underline{\beta}^+\underline{b}^+ = \underline{S}_-\underline{b}^+$: Erzeugen eines Photons, Spin hinunterklappen.

(8-15) hätte man in Heisenbergoperatoren direkt hinschreiben können.
(8-2) und (8-15) können mit T-Transformation gelöst werden.
Hier das einfachere Beispiel gerechnet:

c) Lösung von (8-2)

Eine explizit zeitabhängige Hamiltonfunktion im Schrödingerbild liegt vor:

$$\underline{H} = \tfrac{1}{2}\hbar\omega_0(\underline{\alpha}^+\underline{\alpha} - \underline{\beta}^+\underline{\beta}) + \tfrac{1}{2}\hbar\varkappa(\underline{\alpha}^+\underline{\beta}\,e^{-j\omega t} + \underline{\alpha}\underline{\beta}^+ e^{j\omega t}) \qquad (8-16)$$

Im Schrödingerbild gilt:

$$|\phi(t)\rangle = \underline{C}^s(t)\,|\phi(0)\rangle$$

$$\frac{\partial \underline{C}^s}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar}\underline{H}\,\underline{C}^s \qquad (8-17)$$

Mit $T\{\underline{C}^s\} = C_T^s$ und (6-8) folgt aus (8-16) die c-Zahlen-Gleichung

$$2j\frac{\partial C_T^s}{\partial t} = \left\{\omega_0\alpha^+\left(\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^+}\right) - \omega_0\beta^+\left(\beta + \frac{\partial}{\partial\beta^+}\right) + \varkappa e^{-j\omega t}\alpha^+\left(\beta + \frac{\partial}{\partial\beta^+}\right) + \varkappa e^{j\omega t}\beta^+\left(\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^+}\right)\right\} C_T^s$$

$$2j\frac{\partial C_T^s}{\partial t} = \omega_0\alpha^+\frac{\partial C_T^s}{\partial\alpha^+} - \omega_0\beta^+\frac{\partial C_T^s}{\partial\beta^+} + \varkappa e^{-j\omega t}\alpha^+\frac{\partial C_T^s}{\partial\beta^+} + \varkappa e^{j\omega t}\beta^+\frac{\partial C_T^s}{\partial\alpha^+} + (\omega_0\alpha^+\alpha - \omega_0\beta^+\beta + \varkappa e^{-j\omega t}\alpha^+\beta + \varkappa e^{j\omega t}\beta^+\alpha)\,C_T^s \qquad (8-18)$$

Ansatz: $C_T^s = e^S$, also $\dfrac{\partial C_T}{\partial x} = e^S\dfrac{\partial S}{\partial x}$ (8-19)

liefert:

$$2j\frac{\partial S}{\partial t} = \omega_0\alpha^+\frac{\partial S}{\partial\alpha^+} - \omega_0\beta^+\frac{\partial S}{\partial\beta^+} + \varkappa e^{-j\omega t}\alpha^+\frac{\partial S}{\partial\beta^+} + \varkappa e^{j\omega t}\beta^+\frac{\partial S}{\partial\alpha^+} + \omega_0\alpha^+\alpha - \omega_0\beta^+\beta + \varkappa e^{-j\omega t}\alpha^+\beta + \varkappa e^{j\omega t}\beta^+\alpha \qquad (8-20)$$

Ansatz: $S = A(t)\,\alpha^+\alpha + B(t)\,\beta^+\beta + C(t)\,\alpha^+\beta + D(t)\,\beta^+\alpha$ (8-21)

(8-21) in (8-20) eingesetzt gibt:

$$2j\left\{\frac{dA}{dt}\alpha^+\alpha + \frac{dB}{dt}\beta^+\beta + \frac{dC}{dt}\alpha^+\beta + \frac{dD}{dt}\beta^+\alpha\right\} =$$

$$= \alpha^+\alpha\{\omega_0 + \omega_0 A + \varkappa e^{-j\omega t}D\} + \beta^+\beta\{-\omega_0 - \omega_0 B + \varkappa e^{j\omega t}\}C +$$

$$+ \alpha^+\beta\{\varkappa e^{-j\omega t} + \omega_0 C + \varkappa e^{-j\omega t}B\} + \alpha\beta^+\{\varkappa e^{j\omega t} - \omega_0 D + \varkappa e^{j\omega t}A\} \qquad (8-22)$$

d.h.:

$$2j\frac{dA}{dt} = \omega_0(A+1) + \varkappa e^{-j\omega t} D \qquad 2j\frac{dB}{dt} = -\omega_0(B+1) + \varkappa e^{j\omega t} C$$

$$2j\frac{dD}{dt} = \varkappa e^{j\omega t}(A+1) - \omega_0 D \qquad 2j\frac{dC}{dt} = \varkappa e^{-j\omega t}(B+1) + \omega_0 C \tag{8-23}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} 2j\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} A+1 \\ D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega_0 & \varkappa e^{-j\omega t} \\ \varkappa e^{j\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+1 \\ D \end{pmatrix} \\ 2j\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} B^*+1 \\ -C^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega_0 & \varkappa e^{-j\omega t} \\ \varkappa e^{j\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^*+1 \\ -C^* \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \text{d.h.:} \quad \begin{aligned} A(t)+1 &= B^*(t)+1 \\ D(t) &= -C^*(t) \end{aligned} \tag{8-24}$$

Da $\underline{C}(0) = \underline{I}$ sein muß, gilt $S(0) = 0$, ergo $A(0) = B(0) = C(0) = D(0)$. Die Lösungen von (8-24) lauten

$$D(t) = -\frac{j\varkappa}{\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+\varkappa^2}}\, e^{j\frac{\omega}{2}t} \sin\left(\frac{t}{2}\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+\varkappa^2}\right)$$

$$A(t)+1 = e^{-j\frac{\omega}{2}t}\left\{\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+\varkappa^2}\right) + j\frac{\omega-\omega_0}{\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+\varkappa^2}} \sin\left(\frac{t}{2}\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+\varkappa^2}\right)\right\} \tag{8-25}$$

Damit wird

$$C_T^s = \exp\left[A(t)\alpha^+\alpha + B(t)\beta^+\beta + C(t)\alpha^+\beta + D(t)\alpha\beta^+\right] \tag{8-26}$$

und

$$\underline{C}^s(t) = T^{-1}\{C_T\} = \mathcal{N}\left\{\exp\left[A(t)\underline{\alpha}^+\underline{\alpha} + B(t)\underline{\beta}^+\underline{\beta} + C(t)\underline{\alpha}^+\underline{\beta} + D(t)\underline{\alpha}\underline{\beta}^+\right]\right\} \tag{8-27}$$

Für einen Spin lauten die Zustände $|n_\alpha, n_\beta\rangle = |J+M, J-M\rangle$ entweder $|1,0\rangle$ oder $|0,1\rangle$! D.h.: alle Operatoren, die mit $\underline{\alpha}^2$, $\underline{\beta}^2$ oder $(\underline{\alpha}^+)^2$, $(\underline{\beta}^+)^2$ auf die Zustände wirken, sind Nulloperatoren! Daher für Spin $s = \frac{1}{2}$ und (8-27)

$$\underline{C}^s(t) = \underline{I} + A\underline{\alpha}^+\underline{\alpha} + B\underline{\beta}^+\underline{\beta} + C\underline{\alpha}^+\underline{\beta} + D\underline{\alpha}\underline{\beta}^+ \tag{8-28}$$

Anfangszustand: Zur Zeit $t=0$ sei der Spin parallel zu $\vec{H}_0$, d.h. im Zustand höherer Energie.

$$|\phi(0)\rangle = |J+M, J-M\rangle = |\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle = |1,0\rangle \tag{8-29}$$

Der Zustand niedriger Energie ist demnach der Zustand $|0,1\rangle$.

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spin, der zur Zeit $t=0$ parallel $\vec{H}_0$ war, zur Zeit t antiparallel zum Feld steht?

$$\underline{\rho}(t) = |\phi(t)\rangle\langle\phi(t)| = \underline{C}^s(t)|\phi(0)\rangle\langle\phi(0)|\underline{C}^{s+}(t) = \underline{C}^s(t)|1,0\rangle\langle 1,0|\underline{C}^{s+} \tag{8-30}$$

Projektor auf $|0,1\rangle$: $\quad \underline{P}_{|0,1\rangle} = |0,1\rangle\langle 0,1|$

$$w(t) = Sp\,\{\underline{\varrho}\,\underline{P}_{/0,1>}\} = Sp\,\{\underline{S}^s|1,0\rangle\langle 1,0|\underline{S}^{s+}|0,1\rangle\langle 0,1|\} =$$

$$= \langle 0,1|\underline{S}^s|1,0\rangle\langle 1,0|\underline{S}^{s+}|0,1\rangle = |\langle 0,1|\underline{S}^s|1,0\rangle|^2 \qquad (8\text{-}31)$$

$$w(t) = |\langle 0,1|\underline{I} + A\underline{\alpha}^+\underline{\alpha} + B\underline{\beta}^+\underline{\beta} + C\underline{\alpha}^+\underline{\beta} + D\underline{\alpha}\underline{\beta}^+|1,0\rangle|^2 =$$

$$= |D\langle 0,1|0,1\rangle|^2 = |D|^2$$

$$w(t) = |D|^2 = \frac{\varkappa^2}{(\omega-\omega_0)^2+\varkappa^2}\sin^2\left(\frac{t}{2}\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+\varkappa^2}\right) \qquad (8\text{-}32)$$

Für $H_1 = 0$ ist nach (8-2) $\varkappa = 0$: ergo bleibt ein Spin im statischen Feld $\vec{H}_0$ immer im Zustand höherer Energie! Das stimmt aber nicht! Es gibt eine spontane Emission auch wenn kein Feld vorhanden ist!

Außerdem Resonanznenner: Wechselwirkung wird besonders groß, wenn $\omega = \omega_0$ ist.

Hätte man mit $\underline{H}$ nach (8-15) gerechnet, so wären die Zustände des Systems festgelegt durch

$$|n, n_\alpha, n_\beta\rangle = |n, J+M, J-M\rangle = |n,1,0\rangle \text{ oder } |n,0,1\rangle. \qquad (8\text{-}33)$$

Anfangszustand:

$|\phi(0)\rangle = |n,1,0\rangle$ $\quad$ n Photonen, Spin parallel $\vec{H}_0$

Endzustand

$|\phi_{End}\rangle = |n+1,0,1\rangle$ $\quad$ n+1 Photonen, Spin antiparallel $\vec{H}_0$.

Die Wahrscheinlichkeit (8-32) hätte sich ergeben mit $\varkappa_1$ nach (8-13)

$w(t) = |\langle n+1,0,1|\underline{S}(t)|n,1,0\rangle|^2$ mit anderem $\underline{S}(t)$!

Ergebnis:

$$w(t) = \frac{\varkappa_1^2(n+1)}{(\omega-\omega_0)^2+\varkappa_1^2(n+1)}\sin^2\left(\frac{1}{2}t\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+\varkappa^2(n+1)}\right) \qquad (8\text{-}34)$$

Auch für $n = 0$ (klassisch: $H_1 = 0$!) gibt es Übergang = spontane Emission („induziert" durch Nullpunktsenergie, doppelt so wirksam wie Energie von Photonen).

9.) Erzwungene Schwingung des Oszillators (Beispiel)

Der Hamiltonoperator

$$\underline{H} = \frac{1}{2m}\underline{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\underline{q}^2 - mf(t)\underline{q} \qquad (9-1)$$

führt auf

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{p}} &= \dot{\underline{q}} = \frac{\underline{p}}{m} \\ \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{q}} &= -\dot{\underline{p}} = m\omega^2\underline{q} - mf(t)\underline{I} \end{aligned}\right\} \quad \ddot{\underline{q}} + \omega^2\underline{q} = f(t)\underline{I} \qquad (9-2)$$

(9-2) ist eine erzwungene Schwingung. Führt man

$$\underline{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\underline{b}+\underline{b}^+) \qquad g(t) = f(t)\sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}} \qquad (9-3)$$

$$\underline{p} = -j\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,(\underline{b}+\underline{b}^+)$$

ein, so erhält man den Hamiltonoperator der erzwungenen Schwingung

$$\underline{H} = \hbar\omega(\underline{b}^+\underline{b} + \tfrac{1}{2}\underline{I}) - \hbar g(t)(\underline{b}+\underline{b}^+) = \underline{H}_0 + \underline{H}_1 \qquad (9-4)$$

Lösung im Wechselwirkungsbild. Zur Zeit $t=0$ sei Schrödinger = Heisenberg = WW. In einem beliebigen Bild gilt:

$$\underline{L}^B(t) = \underline{A}^B(t)\, L\{\underline{x}^B(0), \underline{p}^B(0), t\}\, \underline{A}^{B+}(t)$$

$$|l^B(t)\rangle = \underline{A}^B(t)\,|l^B(0)\rangle$$

$$|\phi^B(t)\rangle = \underline{C}^B(t)\,|\phi^B(0)\rangle \qquad (9-5)$$

$$|\phi^B(t)\rangle = \underline{T}^{BB'}(t,0)\,|\phi^{B'}(t)\rangle$$

Speziell wird $|\phi^S(t)\rangle$ gesucht, aber im WW-Bild soll gerechnet werden. Nach Abschnitt B 5 gilt:

$$|\phi^S(t)\rangle = \underline{T}^{SW}(t)\,|\phi^W(t)\rangle = \underline{A}^{W+}(t)\,|\phi^W(t)\rangle = \underline{A}^{W+}(t)\,\underline{C}^W(t)\,|\phi^W(0)\rangle = \underline{A}^{W+}(t)\,\underline{C}^W(t)\,|\phi^S(0)\rangle \qquad (9-6)$$

Gesucht werden somit $\underline{A}^W(t)$, $\underline{C}^W(t)$:

$$\frac{\partial \underline{A}^W}{\partial t} = \frac{j}{\hbar}\underline{H}_0^W\underline{A}^W = \frac{j}{\hbar}\underline{H}_0^S\underline{A}^W = j\omega t(\underline{b}^+\underline{b} + \tfrac{1}{2}\underline{I})\underline{A}^W$$

$$\underline{A}^W(t) = e^{j\omega t(\underline{b}^+\underline{b} + \frac{1}{2}\underline{I})} \qquad (9-7)$$

$$\frac{\partial \underline{C}^W}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar}\underline{H}_1^W\underline{C}^W \qquad \underline{H}_1^W(t) = ?$$

$$\underline{H}_1^W(t) = \underline{A}^W(t)\,\underline{H}_1\{\underline{b}^W(0), \underline{b}^{W+}(0), t\}\,\underline{A}^{W+}(t) = \underline{A}^W(t)\,H_1\{\underline{b}^S, \underline{b}^{S+}, t\}\,\underline{A}^{W+}(t) =$$

$$= e^{j\omega t(\underline{b}^+\underline{b} + \frac{1}{2}\underline{I})}(-\hbar)g(t)(\underline{b}+\underline{b}^+)\,e^{-j\omega t(\underline{b}^+\underline{b} + \frac{1}{2}\underline{I})} = -\hbar g(t)\left[\underline{b}e^{-j\omega t} + \underline{b}^+e^{j\omega t}\right] \qquad (9-8)$$

Damit wird

$$\frac{\partial \underline{C}^W(t)}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar}\underline{H}_1^W \underline{C}^W = jg(t)\left[\underline{b}e^{-j\omega t} + \underline{b}^+ e^{j\omega t}\right]\underline{C}^W \qquad (P-9)$$

Davon wird die T-Transformierte genommen, $C_T^W(t) = T\{\underline{C}^W(t)\}$, liefert

$$\frac{\partial C_T^W}{\partial t} = jg(t)e^{-j\omega t}\left(b + \frac{\partial}{\partial b^+}\right)C_T^W + jg(t)e^{j\omega t}b^+ C_T^W \qquad (P-10)$$

Der Ansatz $C_T^W = e^S$ liefert die Dgl

$$\frac{\partial S}{\partial t} = jg(t)e^{-j\omega t}b + jg(t)e^{j\omega t}b^+ + jg(t)e^{-j\omega t}\frac{\partial S}{\partial b^+} \qquad (P-11)$$

Der Ansatz

$$S = A(t) + B(t)b + C(t)b^+ \qquad (P-12)$$

gibt $\frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}b + \frac{dC}{dt}b^+ = jge^{-j\omega t}b + jge^{j\omega t}b^+ + jge^{-j\omega t}C$ und somit

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= jg(t)e^{-j\omega t}C(t) \\ \frac{dB}{dt} &= jg(t)e^{-j\omega t} \\ \frac{dC}{dt} &= jg(t)e^{j\omega t} \end{aligned}\right\} \text{d.h.} \quad \begin{aligned} \frac{dA^*}{dt} &= -\frac{dC(t)}{dt}C^*(t) \\ \frac{d(-C^*)}{dt} &= jg(t)e^{-j\omega t} = \frac{dB}{dt} \end{aligned} \qquad (P-13)$$

Aus (P-13) sieht man die Lösungen: (Anfangsbedingungen: $A = B = C = 0$)

$$\begin{aligned} C(t) &= j\int_0^t g(x)e^{j\omega x}dx \\ B(t) &= -C^*(t) \\ A(t) + A^*(t) &= -C(t)C^*(t) \end{aligned} \qquad (P-14)$$

Lösung:

$$\underline{C}^W(t) = \mathcal{N}\left\{e^{A(t) + B(t)\underline{b} + C(t)\underline{b}^+}\right\} = e^{C(t)\underline{b}^+}e^{B(t)\underline{b}}e^{A(t)} \qquad (P-15)$$

Aus (P-6)(P-7)(P-15) folgt die gesuchte Lösung

$$|\phi^S(t)\rangle = e^{-j\omega t(\underline{b}^+\underline{b} + \frac{1}{2}\underline{I})}e^{C(t)\underline{b}^+}e^{B(t)\underline{b}}e^{A(t)}|\phi^S(0)\rangle \qquad (P-16)$$

Der Oszillator sei zur Zeit $t = 0$ in Ruhe, also im Vakuumzustand $|0\rangle$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t im Oszillator n Photonen anzutreffen?

$$w_n(t) = |\langle n|\phi^S(t)\rangle|^2 = |\langle n|e^{-j\omega t(\underline{b}^+\underline{b} + \frac{1}{2}\underline{I})}e^{C(t)\underline{b}^+}e^{B(t)\underline{b}}e^{A(t)}|0\rangle|^2 \qquad (P-17)$$

Beachte: $e^{B(t)\underline{b}}|0\rangle = |0\rangle$!

Berechnung des Matrixelementes:

$$\langle n| e^{-j\omega t(\underline{b}^+\underline{b}+\frac{1}{2}\underline{I})} e^{C(t)\underline{b}^+} e^{B(t)\underline{b}} e^{A(t)} |0\rangle = e^{A(t)} e^{-j\omega n t} e^{-\frac{1}{2}j\omega t} \langle n| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k(t)}{k!} (\underline{b}^+)^k |0\rangle =$$

$$= e^{A(t)-j\omega n t-\frac{1}{2}j\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k(t)}{\sqrt{k!}} \langle n|k\rangle = e^{A(t)-\frac{1}{2}j\omega t} \frac{\left[C(t)e^{-j\omega t}\right]^n}{\sqrt{n!}} \qquad (P\text{-}18)$$

Aus (P-18)(P-14) erhält man für (P-17)

$$W_n(t) = e^{A(t)+A^*(t)} \cdot \frac{\left\{|C(t)|^2\right\}^n}{n!} = \frac{\left\{|C(t)|^2\right\}^n}{n!} e^{-|C(t)|^2} \qquad (P\text{-}19)$$

(P-19) ist eine Poissonverteilung, wobei der Erwartungswert für die Photonenanzahl zur Zeit t durch $\bar{n} = |C(t)|^2$ gegeben ist! Der Zustand ist ein Paket minimaler Unschärfe.

<u>Kohärente Zustände</u> (α-Zustände, GLAUBER-Zustände)

Definition:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} e^{-|\alpha|^2}}\, e^{jn\varphi} |n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \underline{b}^+} |0\rangle \qquad (P\text{-}20)$$

$$\alpha = |\alpha| e^{j\varphi}$$

Ein Zustand des Strahlungsfeldes, in dem die Photonen poissonverteilt sind mit dem Erwartungswert $\bar{n} = |\alpha|^2$ (statistisch unabhängige Photonen!)

$$p(n) = \frac{(\bar{n})^n}{n!} e^{-\bar{n}} \qquad \text{Poisson-Verteilung} \qquad (P\text{-}21)$$

Eigenschaften der $|\alpha\rangle$-Zustände:

$$\left.\begin{array}{ll} \langle\alpha|\alpha\rangle = 1 & \text{sie sind normiert} \\ \langle\alpha|\alpha'\rangle \neq 0 & \text{sie sind \underline{nicht} orthogonal} \\ \frac{1}{\pi}\int |\alpha\rangle\, d(\mathrm{Re}\,\alpha)\, d(\mathrm{Im}\,\alpha) \langle\alpha| = \underline{I} & \text{sie sind vollständig} \\ \underline{b}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle & \text{sie sind Eigenkets von } \underline{b} \\ \langle\alpha|\underline{b}^+ = \alpha^*\langle\alpha| & \text{und Eigenbras von } \underline{b}^+ \end{array}\right\} \qquad (P\text{-}22)$$

(Da $\underline{b}$ kein hermitescher Operator ist, ist der Eigenwert α komplex, Eigenkets <u>und</u> Eigenbras sind nicht dasselbe)

Mittlere Energie: $\langle \underline{H} \rangle = \langle\alpha|\hbar\omega\, \underline{b}^+\underline{b}|\alpha\rangle = \hbar\omega|\alpha|^2 = \hbar\omega\bar{n}$ (P-23)

Die Feldstärken sind immer $\underline{b}+\underline{b}^+$ oder $\underline{b}-\underline{b}^+$ proportional. Was ist ..

$$\langle \text{Feldstärke} \rangle = \langle\alpha|\underline{b}(t)+\underline{b}^+(t)|\alpha\rangle = \langle\alpha|\underline{b}e^{-j\omega t}+\underline{b}^+e^{j\omega t}|\alpha\rangle =$$

$$= (\alpha e^{-j\omega t}+\alpha^* e^{j\omega t})\langle\alpha|\alpha\rangle = |\alpha| e^{-j\omega t+j\varphi} + |\alpha| e^{j\omega t-j\varphi} = 2|\alpha|\cos(\omega t-\varphi)$$

(P-24)

d.h.: Der kohärente Zustand ist die quantenmechanische Beschreibung einer Sinuswelle!

Zusammenhang mit dem analytischen Signal: Definition „positive' Frequenzabhängigkeit ist $e^{-j\omega t}$. Gegeben sei reelle Funktion $s_r(t)$

$$s_r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_r(f)\, e^{-2\pi j f t}\, df \qquad \text{(P-25)}$$

Definition der Hilberttransformation:

$$\mathcal{H}\{s_r(t)\} = s_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_i(f)\, e^{-2\pi j f t}\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_r(f)\{-j\,\mathrm{sign} f\}\, e^{-2\pi j f t}\, df \qquad \text{(P-26)}$$

$s(t) = s_r(t) + j s_i(t)$ Analytisches Signal für $s_r(t)$

$$S(f) = S_r(f) + j S_i(f) = \begin{cases} 2S_r(f) & f>0 \\ S_r(f) & f=0 \\ 0 & f<0 \end{cases} \qquad \text{(P-27)}$$

Das analytische Signal enthält nur positive Frequenzanteile.

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} s_r(t) &= A_0 \cos\omega_0 t = \tfrac12 A_0 \left(e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}\right) \\ S_r(f) &= \tfrac12 A_0\, \delta(f-f_0) + \tfrac12 A_0\, \delta(f+f_0) \\ S_i(f) &= -\tfrac12 j A_0\, \delta(f-f_0) + \tfrac12 j A_0\, \delta(f+f_0) \\ s_i(t) &= -A_0 \sin\omega_0 t \end{aligned}\right\} \begin{aligned} s(t) &= A_0 e^{-j\omega_0 t} \\ s_r(t) &= \tfrac12 [s(t) + s^*(t)] \end{aligned} \qquad \text{(P-28)}$$

Die Leistung

$$P = \tfrac12 A_0^2 = \tfrac12 s^*(t)\, s(t) \qquad \text{(P-29)}$$

Welche Zustände des Feldes geben die klassischen Größen als Erwartungswerte?

$$\vec A(\vec r,t) = \sum_{\ell,\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_\ell L^3}}\, \vec e_{\ell\sigma} \left\{ b_{\ell\sigma}\, e^{j(\vec k_\ell \vec r - \omega t)} + b^*_{\ell\sigma}\, e^{-j(\vec k_\ell \vec r - \omega t)} \right\} = \vec A(\vec r,t)^{(+)} + \vec A(\vec r,t)^{(-)} \qquad \text{(P-30)}$$

Das klassische Feld wird in positive und negative Frequenzanteile gespalten. In QM die positiven Frequenzanteile (= analytisches Signal) sind zu Vernichtern, die negativen zu Erzeugern.

$$\underline{\vec A}(\vec r,t) = \sum_{\ell,\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_\ell L^3}}\, \vec e_{\ell\sigma} \left\{ \underline b_{\ell\sigma}\, e^{j(\vec k_\ell \vec r - \omega t)} + \underline b^+_{\ell\sigma}\, e^{-j(\vec k_\ell \vec r - \omega t)} \right\} = \underline{\vec A}(\vec r,t)^{(+)} + \underline{\vec A}(\vec r,t)^{(-)} \qquad \text{(P-31)}$$

Definiert man Zustände

$$|\alpha\rangle = \prod_{\ell,\sigma} |\alpha_{\ell\sigma}\rangle \quad \text{mit} \quad \underline b_{\ell\sigma} |\alpha_{\ell\sigma}\rangle = \alpha_{\ell\sigma} |\alpha_{\ell\sigma}\rangle \qquad \text{(P-32)}$$

so gilt

$$\underline{\vec A}(\vec r,t)^{(+)} |\alpha\rangle = A(\vec r,t)^{(+)} |\alpha\rangle \qquad \langle\alpha| \underline A(\vec r,t)^{(-)} = A(\vec r,t)^{(-)} \langle\alpha| \qquad \text{(P-33)}$$

D.h.: Die klassischen analytischen Signale sind Eigenwerte der positiven Frequenzanteile der Feldoperatoren, die kohärenten Zustände sind die Eigenkets.

D.h. Die Erwartungswerte der Feldoperatoren, gebildet mit den $|\alpha\rangle$-Zuständen, sind identisch mit den klassischen analytischen Signalen.