1. Diskussion der Randbedingungen RB

2. Operatoren, adjungierte Operatoren

$$\int |x\rangle dx \langle x| = \underline{I} \qquad \langle x|x'\rangle = \delta(x-x') \qquad \langle x|\psi\rangle = \psi(x) \qquad \langle x|\underline{L}|x'\rangle = L(x,x')$$

$$\underline{L}|u\rangle = |g\rangle \longrightarrow \langle x|\underline{L}|u\rangle \overset{!}{=} L\langle x|u\rangle = Lu(x) = \langle x|g\rangle = g(x) \longrightarrow \underline{Lu(x) = g(x)}$$

Lösung: $\underline{G}\,\underline{L} = \underline{L}\,\underline{G} = \underline{I} \longrightarrow \langle x|\underline{L}\,\underline{G}|x_0\rangle = \langle x|x_0\rangle = L\langle x|\underline{G}|x_0\rangle = \underline{LG(x,x_0) = \delta(x-x_0)}$

$$\underline{\langle v|\underline{L}|u\rangle} = \left[\left(\langle v|\underline{L}|u\rangle\right)^+\right]^+ = \left[\langle u|\underline{L}^+|v\rangle\right]^+ = \underline{\langle u|\underline{L}^+|v\rangle^*}$$

$$\int \langle v|x\rangle dx \langle x|\underline{L}|u\rangle = \left[\int \langle u|x\rangle dx \langle x|\underline{L}^+|v\rangle\right]^*$$

$$\int v^*(x)\, L u(x)\, dx = \int u(x)\left[L^+ v(x)\right]^* dx$$

$\underline{L}$: $L, \mathcal{L}$ (RB für $u(x)$)
$\underline{L}^+$: $L^+, \mathcal{L}^+$ (RB für $v(x)$, sodass obige Beziehung gilt)

$\underline{L} = \underline{L}^+$ (d.h. $L = L^+, \mathcal{L} = \mathcal{L}^+$): selbstadjungierter Operator.

3. Allgemeiner linearer Differentialoperator 2. Ordnung

$$L = a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + c(x) \longrightarrow L^+ = \frac{d^2}{dx^2}\left[a^*(x)\ldots\right] - \frac{d}{dx}\left[b^*(x)\ldots\right] + c^*(x)$$

4. Verzerrte Metrik

$$L = -\frac{1}{r(x)}\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) \qquad \text{Annahme: } r(x) \text{ reell, } > 0.$$

Basissystem: $\int |x\rangle r(x) dx \langle x| = \underline{I} \qquad \langle x|x'\rangle = \dfrac{\delta(x-x')}{r(x)}$

Damit: $\underline{L}\,\underline{G} = \underline{I} \longrightarrow L\,G(x,x_0) = \dfrac{\delta(x-x_0)}{r(x)}$

$$\underline{L}|u\rangle = |g\rangle \longrightarrow |u\rangle = \underline{G}|g\rangle$$

$$\langle x|u\rangle = \langle x|\underline{G}|g\rangle = \int \langle x|\underline{G}|x_0\rangle r(x_0) dx_0 \langle x_0|g\rangle$$

$$u(x) = \int G(x,x_0)\, g(x_0)\, r(x_0)\, dx_0$$

5. Was bringt das? Jetzt gilt: $\int v^*(x)\, Lu(x)\, r(x)\, dx = \int u(x)\left[L^+ v(x)\right]^* r(x)\, dx$

$$-\int_0^1 v^* \frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)\frac{r\,dx}{r} = -v^* p\frac{du}{dx}\Big|_0^1 + \int_0^1 p\frac{du}{dx}\frac{dv^*}{dx}dx = -v^* p\frac{du}{dx}\Big|_0^1 + pu\frac{dv^*}{dx}\Big|_0^1 - \int_0^1 u\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv^*}{dx}\right)dx =$$

$$= -p\left(v^*\frac{du}{dx} - u\frac{dv^*}{dx}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 u\left[-\frac{1}{r}\frac{d}{dx}\left(p^*\frac{dv}{dx}\right)\right]^* r\,dx$$

d.h.: $\langle v|\underline{L}|u\rangle = \langle u|\underline{L}^+|v\rangle^* + k(v^*,u)\Big|_0^1$ mit: $k(v^*,u)\Big|_0^1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dk(v^*u)}{dx}dx = 0$

$$v^* L u = u\left(L^+ v\right)^* + \frac{1}{r}\frac{dk(v^*,u)}{dx}$$

$\underline{L}$: $L = -\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{d}{dx}\right) + q$, u aus $\mathcal{L}$

$\underline{L}^+$: $L^+ = -\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dx}\left(p^*\dfrac{d}{dx}\right) + q^*$, v aus $\mathcal{L}^+$, so, dass $k(v^*,u)\Big|_0^1 = 0$

Formal SA (selbstadjungiert) : $L = L^+$ (d.h. p, q reell)
SA: $L = L^+$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^+$ (identische RB für u, v)

a) Wenn $Lu = 0$, $L^+ v = 0$, dann $k(v^*, u) = \text{const}$
b) Wenn $L = L^+$ und $Lu = 0$, $Lv = 0$, dann $k(v^*, u) = \text{const}$
c) Wenn $L = L^+$ und u, v linear abhängig mit $Lu = Lv = 0$, dann $k(v^*, u) \equiv 0$

6. Randwerte „unter das Integral schieben" (Operator im erweiterten Sinn)

Gegeben sei: $\underline{L}_I$: $L, \mathcal{L}_I$ (inhomogene RB für $w(x)$)
$\underline{L}$: $L, \mathcal{L}$ (Struktur wie $\mathcal{L}_I$, aber homogen, $u(x)$)
$\underline{L}^+$: $L^+, \mathcal{L}^+$ (für $v(x)$)

Wie gilt

$\langle v|\underline{L}|u\rangle = \langle u|\underline{L}^+|v\rangle^* + k(v^*, u)\big|_0^1$ mit $k(v^*, u)\big|_0^1 = 0$

$\langle v|\underline{L}_I|w\rangle = \langle w|\underline{L}^+|v\rangle^* + k(v^*, w)\big|_0^1$ aber $k(v^*, w)\big|_0^1 \neq 0$, da andere RB.

Definition: $\langle v|\underline{L}_e|w\rangle \overset{!}{=} \langle w|\underline{L}^+|v\rangle^*$

$= \langle v|\underline{L}_I|w\rangle - k(v^*, w)\big|_0^1$ es sei $\underline{L}_I = \underline{L}_e + \underline{L}_1$

$= \langle v|\underline{L}_e + \underline{L}_1|w\rangle - k(v^*, w)\big|_0^1$

ergo: $\langle v|\underline{L}_1|w\rangle = k(v^*, w)\big|_0^1 = k\left(\langle v|x_0\rangle, \langle x_0|w\rangle\right)\Big|_{x_0=0}^{x_0=1}$

7. Lösung inhomogener Probleme zu inhomogenen Randbedingungen

Problem: $\underline{L}_I|w\rangle = |g\rangle$ $\quad \underline{L}_I : L, \mathcal{L}_I$

Löse: $\underline{G}$, also $LG(x, x_0) = \dfrac{\delta(x - x_0)}{r(x)}$ mit G aus $\mathcal{L}$ (homogene RB!!)

$(\underline{L}_e + \underline{L}_1)|w\rangle = |g\rangle$
$\underline{L}_e|w\rangle = |g\rangle - \underline{L}_1|w\rangle$

$\underline{G}\,\underline{L}_e|w\rangle = \underline{|w\rangle = \underline{G}|g\rangle - \underline{G}\,\underline{L}_1|w\rangle}$

$w(x) = \langle x|w\rangle = \langle x|\underline{G}|g\rangle - \langle x|\underline{G}\,\underline{L}_1|w\rangle =$ siehe oben Definition von $\underline{L}_1$ =

$= \langle x|\underline{G}|g\rangle - k\left(\langle x|\underline{G}|x_0\rangle, \langle x_0|w\rangle\right)\Big|_{x_0=0}^{x_0=1}$

$$w(x) = \int_0^1 G(x, x_0)\, g(x_0)\, r(x_0)\, dx_0 - k\Big[G(x, x_0), w(x_0)\Big]_{x_0=0}^{x_0=1}$$

a) beachte: Ableitungen in k beziehen sich auf die Variable x_0!

$w(x) =$ Teil 1 + Teil 2

Teil 1 = Lösung des inhomogenen Problems zu homogenen RB (weil G aus $\mathcal{L}$!)

Teil 2: Lösung des homogenen Problems zu inhomogenen RB

<u>Superponierbar, da lineare Probleme</u>

PROBLEM

LÖSE $\quad Lw(x) = g(x) \quad$ INHOM. RB FÜR $w \quad (\underline{L}_I : L, \mathcal{L}_I)$

MIT $\quad L = -\frac{1}{r}\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + q \qquad r$ reell, >0

SUCHE $\quad LG(x,x_0) = \frac{\delta(x-x_0)}{r} \quad$ MIT HOMOG. RB FÜR $G \quad (\underline{L} : L, \mathcal{L})$

BERECHNE KONJUNKT $\quad K(v^*, u) = -p\left(v^*\frac{du}{dx} - u\frac{dv^*}{dx}\right)$

DANN GILT:

$$w(x) = \int_0^1 G(x,x_0)\, g(x_0)\, r(x_0)\, dx_0 - K\left[G(x,x_0), w(x_0)\right]_{x_0=0}^{x_0=1}$$

BEACHTE: ABLEITUNGEN IM KONJUNKT NACH VARIABLER x_0 BILDEN!

BERECHNUNG VON G: $\quad -\frac{1}{r}\frac{d}{dx}\left(p\frac{dG}{dx}\right) + qG = \frac{\delta(x-x_0)}{r} \quad$ INTEGRIERT $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-p(x)\frac{dG(x,x_0)}{dx}\right]_{x=x_0-\varepsilon}^{x=x_0+\varepsilon} = 1, \quad \text{STETIG BEI } x = x_0$$

UNGEMISCHTE RB:

$$G(x,x_0) = \frac{k_1(x)\,k_2(x_0)\,H(x_0-x) + k_1(x_0)\,k_2(x)\,H(x-x_0)}{K(k_1,k_2)_{x=x_0}} \qquad 0 \le x_0 \le 1$$

$k_1(x), k_2(x)$ LÖSUNGEN VON $LG=0$, WELCHE HOMOG. RB BEI $x=0$, BZW. $x=1$ ERFÜLLEN.

GEMISCHTE RB:

$$G(x,x_0) = c_1 k_1(x) + c_2 k_2(x) + \frac{k_1(x)\,k_2(x_0)\,H(x_0-x) + k_1(x_0)\,k_2(x)\,H(x-x_0)}{K(k_1,k_2)/_{x_0=0}} \qquad 0 \le x_0 \le 1$$

$k_1(x), k_2(x)$ BELIEBIGE LINEAR UNABHÄNGIGE LÖSUNGEN VON $LG=0$, c_1, c_2 WERDEN AUS DEN HOMOG. RB (Z.B: $G(0,x_0) = G'(0,x_0) = 0$) ERMITTELT.

MIT FOURIERTRANSFORMATION

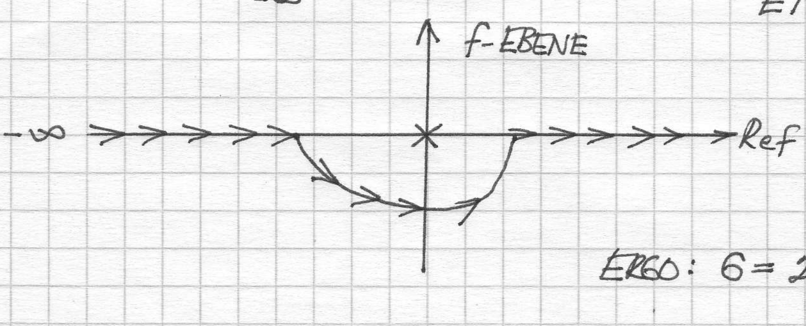
Z.B: $\quad -\frac{d^2G}{dx^2} = \delta(x-x_0) \qquad G(x,x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_F(f,x_0)\, e^{2\pi j f x}\, df, \quad G_F(f,x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,x_0)\, e^{-2\pi j f x}\, dx$

ERGO: $\quad 4\pi^2 f^2 G_F(f,x_0) = e^{-2\pi j f x_0}$

$$G_F(f,x_0) = \frac{e^{-2\pi j f x_0}}{4\pi^2 f^2} \longrightarrow$$ GILT BEI $f=0$ NICHT, DA DORT KEINE ABLEITUNG BESTEHT!

$$G(x,x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[2\pi j f(x-x_0)]}{4\pi^2 f^2}\, df$$

UNSINN! HILFT, WENN MAN INTEGR. WEG ERRATEN KANN, ETWA BEI KAUSALER GF, $G=0$ FÜR $x<x_0$



UNTEN SCHLIESSEN: $\oint = 0$, HALBKREIS $=0$, ERGO $G=0$

OBEN SCHLIESSEN: $\oint = 2\pi j \cdot$ RESIDUUM, HALBKREIS $=0$

ERGO: $G = 2\pi j \cdot$ RESIDUUM.

EIGENFUNKTIONEN

$\underline{L}|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle$ EIGENKETS VON $\underline{L}$, $\underline{L}^+$. $f(\underline{L})|u_k\rangle = f(\lambda_k)|u_k\rangle$

$\underline{L}^+|v_\ell\rangle = \mu_\ell|v_\ell\rangle$ WENN $f(\underline{L})$, $h(\underline{L}^+)$ POTENZREIHEN: $h(\underline{L}^+)|v_\ell\rangle = h(\mu_\ell)|v_\ell\rangle$

MAN KANN BEWEISEN:

$$\langle v_\ell|u_k\rangle = \delta(\ell,k) \qquad \lambda_k = \mu_k^* \qquad \sum\!\!\!\!\!\!\int_k |u_k\rangle dk\langle v_k| = \sum\!\!\!\!\!\!\int_\ell |v_\ell\rangle d\ell\langle u_\ell| = \underline{I}$$

MIT BASIS

$$\int|x\rangle r(x)\,dx\,\langle x| = \underline{I} \qquad \langle x|x'\rangle = \frac{\delta(x-x')}{r(x)} \qquad \langle x|u_k\rangle = \begin{cases} u(k,x) & k \text{ KONTIN.} \\ u_k(x) & k \text{ DISKRET}\end{cases}$$

KANN MAN JEDE FUNKTION ENTWEDER NACH FUNKTIONEN $u_k(x)$ oder $v_\ell(x)$ ENTWICKELN. BEISPIEL:

$$|\varphi\rangle = \underline{I}|\varphi\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k |u_k\rangle dk\langle v_k|\varphi\rangle$$

$$\varphi(x) = \langle x|\varphi\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k \langle x|u_k\rangle dk \int\langle v_k|x_0\rangle r(x_0)\,dx_0\,\langle x_0|\varphi\rangle$$

$$= \sum\!\!\!\!\!\!\int_k u(k,x)\,dk\int v^*(k,x_0)\varphi(x_0)\,r(x_0)\,dx_0$$

$$= \sum_k u_k(x)\int v_k^*(x_0)\varphi(x_0)r(x_0)\,dx_0 + \int u(k,x)\left[\int v^*(k,x_0)\varphi(x_0)r(x_0)\,dx_0\right]dk$$

EIGENFUNKTIONEN SIND LÖSUNGEN VON $\underline{L}|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle$, d.h. $L u_k(x) = \lambda_k u_k(x)$ ODER $L u(k,x) = \lambda(k) u(k,x)$ (KONT + DISKR. SPEKTRUM) ZU BESTIMMTEN RANDBEDINGUNGEN (BEACHTE: NORMIERBAR, DA $\langle v_\ell|u_k\rangle = \delta(\ell,k)$ GEFORDERT!)

SPEZIELL HERMITESCHE OPERATOREN $\underline{L} = \underline{L}^+$:

$$\langle u_\ell|u_k\rangle = \delta(\ell,k) \qquad \sum\!\!\!\!\!\!\int_k |u_k\rangle dk\langle u_k| = \underline{I}$$

EIGENWERTE SIND REELL!

IST $|\varphi\rangle$ EINE NÄHERUNG VON $|u_k\rangle$ (ABWEICHUNG $\sim \varepsilon$), SO GILT

$$\frac{\langle\varphi|\underline{L}|\varphi\rangle}{\langle\varphi|\varphi\rangle} = \lambda_k + O(\varepsilon^2)$$

SCHLECHTE NÄHERUNG FÜR $|u_k\rangle$ GIBT GUTE NÄHERUNG FÜR EIGENWERT

BEISPIEL: $\underline{L} = \underline{L}^+$ ($L = -\frac{d^2}{dx^2}$, $\mathcal{L}$: $u(0) = u(\pi) = 0$)

$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u \to u(x) \sim \sin(x\sqrt{\lambda})$, DA $\pi\sqrt{\lambda} = k\pi \to \lambda = k^2$, $k = 1, 2, \dots$ ($k=0$ KEINE LÖSG!!)

$u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)$ (NORMIERT, $\langle u_k|u_k\rangle = 1$)

WEGEN $\sum_k |u_k\rangle\langle u_k| = \underline{I} \to \sum_k \langle x|u_k\rangle\langle u_k|x'\rangle = \langle x|x'\rangle$ FOLGT:

$$\sum_k u_k(x)\cdot u_k^*(x') = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sin(kx)\sin(kx') = \delta(x-x')$$

DAMIT JEDE FUNKTION ENTWICKELT IN $0 < x < \pi$

$$\varphi(x) = \int\delta(x-x_0)\varphi(x_0)\,dx_0 = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sin(kx)\int_0^{\pi}\varphi(x_0)\sin(kx_0)\,dx_0$$

ACHTUNG: RANDWERTE EVENTUELL NUR AUS INTERVALLINNEREM ERREICHT!

1. OPERATORFUNKTIONEN, UMKEHROPERATOREN (GREENSCHER OP.)

AUS $\quad \underline{L}|u_k\rangle = \lambda_k |u_k\rangle \qquad \langle u_k|v_l\rangle = \delta(k,l) \qquad \sum\!\!\!\!\!\!\int |u_k\rangle dk \langle v_k| = \sum\!\!\!\!\!\!\int |v_l\rangle dl \langle u_l| = \underline{I}$

$\qquad \underline{L}^+|v_l\rangle = \mu_l |v_l\rangle \qquad \mu_k = \lambda_k^*$

FOLGT $\quad f(\underline{L}) = f(\underline{L})\underline{I} = \sum\!\!\!\!\!\!\int |u_k\rangle f(\lambda_k) dk \langle v_k|$ $\qquad$ SPEKTRALDARSTELLUNG

$\qquad f(\underline{L}^+) = f(\underline{L}^+)\underline{I} = \sum\!\!\!\!\!\!\int |v_l\rangle f(\mu_l) dl \langle u_l|$

ERGO WIRKUNG EINER OP.FUNKTION AUF BELIEBIGEN KET BEKANNT:

$$f(\underline{L})|g\rangle = f(\underline{L}) \sum\!\!\!\!\!\!\int |u_k\rangle dk \langle v_k|g\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int |u_k\rangle f(\lambda_k)\, dk \langle v_k|g\rangle$$

$$f(\underline{L}^+)|g\rangle = f(\underline{L}^+) \sum\!\!\!\!\!\!\int |v_l\rangle dl \langle u_l|g\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int |v_l\rangle f(\mu_l)\, dl \langle u_l|g\rangle$$

ANWENDUNG:

$f(\underline{L}) = \underline{L}^{-1} = \underline{G} \quad$; PROBLEM : $\underline{L}|\varphi\rangle = |g\rangle$

LÖSUNG: $\quad |\varphi\rangle = \underline{L}^{-1}|g\rangle$, SIEHE OBEN:

$$|\varphi\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int \frac{|u_k\rangle dk \langle v_k|g\rangle}{\lambda_k} \qquad \underline{G} = \sum\!\!\!\!\!\!\int \frac{|u_k\rangle dk \langle v_k|}{\lambda_k}$$

IN KOMPONENTEN BEZÜGLICH EINER BASIS $\int |x\rangle r(x) dx \langle x| = \underline{I} \quad \langle x|x'\rangle = \dfrac{\delta(x-x')}{r(x)}$:

$$\varphi(x) = \langle x|\varphi\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int \frac{u(k,x)\,dk}{\lambda_k} \cdot \int v^*(k,x_0) g(x_0) r(x_0)\, dx_0$$

$$G(x,x_0) = \langle x|\underline{G}|x_0\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int \frac{u(k,x) v^*(k,x_0)}{\lambda_k} dk$$

2. STÖRUNGSRECHNUNG

VON FRÜHER: $\quad \underline{L}_I \quad (L, \mathcal{L}_I$ INHOMOG. RB$)$

$\qquad \underline{L} \quad (L, \mathcal{L}$ HOMOG. RB$)$ $\qquad \underline{L}_I = \underline{L}_e + \underline{L}_1 \; ; \; \underline{G}\,\underline{L} = \underline{G}\,\underline{L}_e = \underline{I}$

$\qquad \underline{L}^+ \quad (L^+, \mathcal{L}^+$ ADJUNG. RB$)$

$$\langle v|\underline{L}_1|w\rangle = k(v^*, w)\Big|_0^1 = k\big(\langle v|x_0\rangle, \langle x_0|w\rangle\big)\Big|_{x_0=0}^{x_0=1}$$

ANWENDUNG $\quad \underline{L} = \underline{L}^+,\ \mu_k = \lambda_k$ (DISKR. SPEKTRUM), $|u_k\rangle = |v_k\rangle$ SEI BEKANNT.

GESUCHT: $\quad \underline{L}_I|w\rangle = \beta|w\rangle \qquad |w\rangle = ? \quad \beta = ?$

$\qquad (\beta\underline{I} - \underline{L}_e)|w\rangle = \underline{L}_1|w\rangle = \sum |u_k\rangle\langle u_k|\underline{L}_1|w\rangle$

$$|w\rangle = (\beta\underline{I} - \underline{L}_e)^{-1} \sum |u_k\rangle\langle u_k|\underline{L}_1|w\rangle = \sum \frac{|u_k\rangle\langle u_k|\underline{L}_1|w\rangle}{\beta - \lambda_k}$$

ANNAHME: MAN SUCHE $|w\rangle$, DAS FÜR $\underline{L}_1 = 0 \to |u_n\rangle$ GEHT!

$$|w\rangle = |u_n\rangle \cdot \underbrace{\frac{\langle u_n|\underline{L}_1|w\rangle}{\beta - \lambda_n}}_{1} + \sum_{k\neq n} |u_k\rangle \cdot \frac{\langle u_k|\underline{L}_1|w\rangle}{\beta - \lambda_k}$$

ERGO: $\qquad \beta = \lambda_n + \langle u_n|\underline{L}_1|w\rangle \qquad$ SUKZESSIVE NÄHERUNGEN, ALS NULLTE NÄHERUNG $|w_0\rangle = |u_n\rangle$, $\beta^{(0)} = \lambda_n$ GESETZT

3. BEZIEHUNG ZUR SCHRÖDINGERGLEICHUNG

$Lu(x) = \lambda u(x)$, $u(x)$ AUS $\mathcal{L}$ (HOMOG. RB), $L = -\frac{1}{r}\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + q$ IST TRANSFORMIERBAR (FORMEL S. ABSCHN. 3.4)

IN: $$\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} + [\lambda - Q(\xi)]\, y(\xi) = 0$$ λ ENERGIE EIGENWERT, Q POTENTIALVERTEILUNG

WKB(J)-NÄHERUNG GILT FÜR λ NICHT „NAHE" $\lambda = Q(\xi)$; $Q(\xi) \to 0$ für $\xi \to \pm\infty$, DANN ASYMPTOTISCHE LÖSUNGEN $y \sim \exp(\pm j \xi \sqrt{\lambda})$ (WELLE)

ACHTUNG: LÖSUNGEN, DIE $\lambda = Q$ EINSCHLIESSEN, SIEHE

GHATAK, A.K.; GALLAWA, R.L.; GOYAL, I.C.: MODIFIED AIRY FUNCTION AND WKB SOLUTIONS TO THE WAVE EQUATION. NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY NIST MONOGRAPH 176, U.S. GOVERNMENT PRINTING OFFICE, WASHINGTON 1991. (AM INSTITUT IN DER BIBLIOTHEK SIGNATUR G 117)

4. EIGENFUNKTIONEN, EIGENWERTE AUS $G_\lambda(x, x_0) = \langle x | \underline{G}_\lambda | x_0 \rangle$ BERECHNEN

$\underline{G}_\lambda$ WIRD DEFINIERT ALS: $(\underline{L} - \lambda \underline{I})\,\underline{G}_\lambda = \underline{I}$

$$\langle x | \underline{L}\, \underline{G}_\lambda | x_0 \rangle - \lambda \langle x | \underline{G}_\lambda | x_0 \rangle = \langle x | x_0 \rangle \longrightarrow L G_\lambda(x, x_0) - \lambda G_\lambda(x, x_0) = \frac{\delta(x - x_0)}{r(x)}$$ G_λ AUS $\mathcal{L}$

$$\underline{G}_\lambda = (\underline{L} - \lambda \underline{I})^{-1} = (\underline{L} - \lambda \underline{I})^{-1} \sum\!\!\!\!\!\!\int |u_k\rangle dk \langle v_k| = -\sum\!\!\!\!\!\!\int \frac{|u_k\rangle dk \langle v_k|}{\lambda - \lambda_k}$$

$$= -\sum \frac{|u_k\rangle\langle v_k|}{\lambda - \lambda_k} - \int \frac{|u_k\rangle dk \langle v_k|}{\lambda - \lambda(k)},$$ DAS HEISST

$$G_\lambda(x, x_0) = -\sum \frac{u_k(x)\, v_k^*(x_0)}{\lambda - \lambda_k} - \int \frac{u(k, x)\, v^*(k, x_0)\, dk}{\lambda - \lambda_k}$$

IN KOMPLEXER λ-EBENE:

a) DISKRETE EIGENWERTE SIND POLE 1. ORDNUNG
b) AUS RESIDUEN KANN $u_k(x)$, $v_k^*(x_0)$ ABGELESEN WERDEN.
c) ANTEILE DES KONTINUIERLICHEN SPEKTRUMS ENSSPRECHEN EINEM VERZWEIGUNGSSCHNITT IN DER λ-EBENE. (BEI $\underline{L} = \underline{L}^+$ LIEGT DIESER AUF DER REELLEN ACHSE, DA JA $\lambda(k)$ REELL SEIN MUSS)

BILDET MAN EIN UMLAUFINTEGRAL VON G_λ ÜBER EINEN BEREICH, DER ALLE POLE 1. ORNUNG ENTHÄLT, SO FOLGT:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint G_\lambda(x, x_0)\, d\lambda = -\sum u_k(x)\, v_k^*(x_0) = \int u(k, x)\, v^*(k, x_0)\, dk - \frac{\delta(x - x_0)}{r(x)}$$

DIE LETZTE BEZIEHUNG FOLGT AUS

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int |u_k\rangle dk \langle v_k| = \sum |u_k\rangle\langle v_k| + \int |u_k\rangle dk \langle v_k| = \underline{I}$$

UND BILDEN DER MATRIXELEMENTE MIT $\langle x|$, $|x_0\rangle$

1. ADJUNGIERTER OPERATOR + OPERATORBEREICH (VERALLGEMEINERT)

$\underline{L}$ ($L, \mathcal{L}$ HOMOGENE RB) ANNAHME : $r(x) = 1$

$\underline{L}^+$ ($L^+, \mathcal{L}^+$) FOLGT AUS:

$$\langle v|\underline{L}|u\rangle = \langle u|\underline{L}^+|v\rangle^* + k(v^*, u)\Big|_0^1 \quad \text{MIT} \quad k(v^*, u)\Big|_0^1 = \int_0^1 \frac{dk(v^*, u)}{dx}\, dx = 0$$

$$\int v^*(x)\, L u(x)\, dx = \int u(x)\left[L^+ v(x)\right]^* dx + k(v^*, u)\Big|_0^1$$

IN n DIMENSIONEN:

$$\langle v|\underline{L}|u\rangle = \langle u|\underline{L}^+|v\rangle^* + \oint e_i k_i(v^*, u)\, d\sigma \quad \text{MIT} \quad \oint e_i k_i(v^*, u)\, d\sigma = \int \partial_i k_i(v^*, u)\, d\tau = 0$$

$$\int v^*(x_i)\, L u(x_i)\, d\tau = \int u(x_i)\left[L^+ v(x_i)\right]^* d\tau + \oint e_i k_i(v^*, u)\, d\sigma$$

DADURCH SIND $L^+, \mathcal{L}^+$ DEFINIERT (WIEDER $\mathcal{L}$ ZU HOMOGENEN RB)

2. INVERSER OPERATOR

$$\underline{L}|u\rangle = |g\rangle \qquad \underline{L}^{-1} = \underline{G} \qquad |u\rangle = \underline{L}^{-1}|g\rangle = \underline{G}|g\rangle$$

AUS $\underline{L}\,\underline{G} = \underline{I} \rightarrow \langle x|\underline{L}\,\underline{G}|x_0\rangle = \langle x|x_0\rangle = L\langle x|\underline{G}|x_0\rangle = LG(x, x_0) = \delta(x - x_0)$

IN n-DIMENSIONEN: $LG(x_i, x_{i0}) = \delta(x_i - x_{i0}) = \delta(x_1 - x_{10})\,\delta(x_2 - x_{20}) \ldots \delta(x_n - x_{n0})$

(MIT HOMOGENEN RB FÜR G)

3. LÖSUNG INHOMOGENER PROBLEME IN DEN RANDBEDINGUNGEN

ZUSÄTZLICH $\underline{L}_I$ ($L, \mathcal{L}_I$ INHOMOG. RB) $\qquad \underline{L}_I = \underline{L}_e + \underline{L}_1 \qquad \underline{G}\,\underline{L} = \underline{G}\,\underline{L}_e = \underline{I}$

$$\underline{L}_I|w\rangle = |g\rangle \rightarrow \underline{L}_e|w\rangle = |g\rangle - \underline{L}_1|w\rangle \rightarrow |w\rangle = \underline{G}|g\rangle - \underline{G}\,\underline{L}_1|w\rangle$$

VON FRÜHER: $\underline{L}_1$ DEFINIERT AUS: $\langle v|\underline{L}_1|w\rangle = k(v^*, w)\Big|_0^1 = k\left(\langle v|x\rangle, \langle x|w\rangle\right)\Big|_0^1$

LÖSUNG: $w(x) = \langle x|w\rangle = \langle x|\underline{G}|g\rangle - \langle x|\underline{G}\,\underline{L}_1|w\rangle = \int \langle x|\underline{G}|x_0\rangle dx_0 \langle x_0|g\rangle - \langle x|\underline{G}\,\underline{L}_1|w\rangle$

$$= \int G(x, x_0)\, g(x_0)\, dx_0 - k\left[\langle x|\underline{G}|x_0\rangle, \langle x_0|w\rangle\right]_{x_0=0}^{x_0=1}$$

$$= \int G(x, x_0)\, g(x_0)\, dx_0 - k\left[G(x, x_0), w(x_0)\right]_{x_0=0}^{x_0=1}$$

VERALLGEMEINERT: $\langle v|\underline{L}_1|w\rangle = \oint e_i k_i(v^*, w)\, d\sigma = \int \partial_i k_i(v^*, w)\, d\tau$

LÖSUNG DES INHOMOGENEN PROBLEMS IN ANALOGIE

$$w(x_i) = \int G(x_i, x_{i0})\, g(x_{i0})\, d\tau_0 - \oint e_{i0} k_i\left[G(x_i, x_{i0}), w(x_{i0})\right] d\sigma_0$$

$$= \int G(x_i, x_{i0})\, g(x_{i0})\, d\tau_0 - \int \partial_{i0} k_i\left[G(x_i, x_{i0}), w(x_{i0})\right] d\tau_0$$

ZU BEANTWORTEN SIND 2 FRAGEN:

1. WIE LÖST MAN DIE PARTIELLE DGL $LG(x_i, x_{i0}) = \delta(x_i - x_{i0})$?
2. WIE BERECHNET MAN DEN KONJUNKTVEKTOR $k_i(v^*(x_i), u(x_i))$?
   (BEACHTE: EINDEUTIG BIS AUF BEITRÄGE FÜR DIE $\partial_i k_i = 0$ IST, ALSO DIE n-DIMENSIONALE DIVERGENZ VERSCHWINDET.

WIEDERHOLUNG EINIGER FORMELN

1. BASISSYSTEM

$\underline{L}$ DEFINIERT DURCH $L, \mathcal{L}$

$$L = -\frac{1}{r}\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + q$$

$$\underline{I} = \int |x\rangle r(x)\,dx\,\langle x| \qquad \langle x|x_0\rangle = \frac{\delta(x-x_0)}{r(x)}$$

$$\langle x|\underline{L}|u\rangle \overset{!}{=} L\langle x|u\rangle = Lu(x)$$

2. EIGENFUNKTIONEN

$$\underline{L}|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle$$

$$\underline{L}^+|v_\ell\rangle = \mu_\ell|v_\ell\rangle \qquad \mu_k = \lambda_k^*$$

$$\langle u_k|v_\ell\rangle = \delta(k,\ell) \qquad \int u^*(k,x)\,v(\ell,x)\,r(x)\,dx = \delta(k,\ell)$$

$$\underline{I} = \underset{k}{\sum\!\!\!\!\!\!\int} |u_k\rangle\,dk\,\langle v_k| \qquad \frac{\delta(x-x_0)}{r(x)} = \underset{k}{\sum\!\!\!\!\!\!\int} u(k,x)\,v^*(k,x_0)\,dk$$

$$f(\underline{L}) = \underset{k}{\sum\!\!\!\!\!\!\int} |u_k\rangle f(\lambda_k)\,dk\,\langle v_k| \qquad f(L)\frac{\delta(x-x_0)}{r(x)} = \underset{k}{\sum\!\!\!\!\!\!\int} f(\lambda_k)\,u(k,x)\,v^*(k,x_0)\,dk$$

SPEZIELL FÜR DISKRETE EIGENFUNKTIONEN

$$\langle u_k|v_\ell\rangle = \delta_{k\ell} \qquad \int u_k^*(x)\,v_\ell(x)\,r(x)\,dx = \delta_{k\ell}$$

$$\underline{I} = \sum_k |u_k\rangle\langle v_k| \qquad \frac{\delta(x-x_0)}{r(x)} = \sum_k u_k(x)\,v_k^*(x_0)$$

$$f(\underline{L}) = \sum_k f(\lambda_k)|u_k\rangle\langle v_k| \qquad f(L)\frac{\delta(x-x_0)}{r(x)} = \sum_k f(\lambda_k)\,u_k(x)\,v_k^*(x_0)$$

SPEZIELL FÜR KONTINUIERLICHES SPEKTRUM UND $r(x)=1$

$$\langle u_k|v_\ell\rangle = \delta(k-\ell) \qquad \int u^*(k,x)\,v(\ell,x)\,dx = \delta(k-\ell)$$

$$\underline{I} = \int |u_k\rangle\,dk\,\langle v_k| \qquad \delta(x-x_0) = \int u(k,x)\,v^*(k,x_0)\,dk$$

$$f(\underline{L}) = \int f(\lambda_k)|u_k\rangle\,dk\,\langle v_k| \qquad f(L)\,\delta(x-x_0) = \int f(\lambda_k)\,u(k,x)\,v^*(k,x_0)\,dk$$

OPERATORINVERSION

$\underline{P}_i$ AUS U_1, $\underline{Q}_i$ AUS U_2 MIT $[\underline{P}_i, \underline{Q}_j] = 0$, $[\underline{Q}_i, \underline{Q}_j] = 0$

$\underline{L} = \sum_i \underline{P}_i\underline{Q}_i$: ALLE $\underline{Q}_i$ KÖNNEN BEI INVERSION VON $\underline{L}$ ALS KONSTANTE BETRACHTET WERDEN

ADJUNGIERTER OPERATOR ZU $L = p\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$

$$\langle v/\underline{L}/u\rangle = \int v^* p \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\, d\tau =$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial x_1} v^* p \Big|_{x_1=}^{x_1=} dx_2 dx_3 \dots dx_n - \int \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}(v^* p)\, d\tau =$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial x_1}\left(p v^* \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) d\tau - \int u \frac{\partial}{\partial x_1}(p v^*) \Big|_{x_1=}^{x_1=} dx_2 dx_3 \dots dx_n +$$

$$+ \int u \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(p v^*)\, d\tau =$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial x_1}\left[p v^* \frac{\partial u}{\partial x_1} - u \frac{\partial}{\partial x_1}(p v^*)\right] d\tau + \int u \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(p^* v)\right]^* d\tau =$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial x_1} K_1(v^*, u)\, d\tau + \int u\, (L^+ v)^* d\tau$$

DURCH VERGLEICH:

$$K_1(v^*, u) = p v^* \frac{\partial u}{\partial x_1} - u \frac{\partial}{\partial x_1}(p v^*)$$

$$L^+ = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(p^* \dots)$$

BEACHTE:

$$\int v\, du = vu \Big|_1^2 - \int u\, dv$$

ADJUNGIERTER OPERATOR ZU $L = p \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$

$$\langle v | \underline{L} | u \rangle = \int v^* p \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\, d\tau =$$

$$= \int v^* p \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_1=}^{x_1=} dx_2\, dx_3 \dots dx_n - \int \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1}(v^* p)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial x_1}\left(v^* p \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) dx_1\, dx_2 \dots dx_n - \int u \frac{\partial}{\partial x_1}(v^* p) \Big|_{x_2=}^{x_2=} dx_1 \dots dx_3 \dots dx_n +$$

$$+ \int u \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(v^* p)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial x_1}\left(p v^* \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) d\tau + \int u \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(p^* v)\right]^* d\tau -$$

$$- \int \frac{\partial}{\partial x_2}\left[u \frac{\partial}{\partial x_1}(p v^*)\right] d\tau =$$

$$= \int \left[\frac{\partial}{\partial x_1} K_1(v^*, u) + \frac{\partial}{\partial x_2} K_2(v^*, u)\right] d\tau + \int u\, (L^+ v)^*\, d\tau$$

DURCH VERGLEICH:

$$K_1(v^*, u) = p v^* \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

$$K_2(v^*, u) = - u \frac{\partial}{\partial x_1}(p v^*)$$

$$L^+ = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(p^* \dots)$$

BEACHTE: $\int v\, du = v u \Big|_1^2 - \int u\, dv$