$$\langle s|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x)\,\phi(x)\,dx$$

$$\langle s'|\phi\rangle = -\langle s|\phi'\rangle$$

$$\langle s|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x)\,\phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} s_F^*(f)\,\phi_F(f)\,df$$

$s_1(x) = s_2(x)$ WENN $\int_{-\infty}^{+\infty} s_1^*(x)\phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2^*(x)\phi(x)\,dx$

WENN $s(x) = \lim s_n(x)$ VERALLG. GRENZWERT, NICHT EXISTENT

DANN $\langle s|\phi\rangle = \lim \int_{-\infty}^{+\infty} s_n(x)\phi(x)\,dx$ EXISTIERT!

$s(x) = g(x)$ IN $a<x<b$, WENN $\int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x)\phi(x)\,dx = \int_a^b g^*(x)\phi(x)\,dx$

FÜR $\phi(x) \neq 0$ in $a<x<b$, ABER $\phi(x)=0$ SONST.

$\langle s|\phi\rangle = \phi(0) \longrightarrow \delta(x)$ $\delta(x) = g(x) = 0$ FÜR $x \neq 0$, $\lim \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)\,dx = 1$

$P(\frac{1}{x})$; $H(x)$; $H'(x) = \delta(x)$; $\mathrm{sgn}(x) = H(x) - H(-x)$

$Lu(x) = g(x)$ $u(0) = u(1) = 0$ $\longrightarrow u(x) = \int_0^1 G(x,x_0)\,g(x_0)\,dx_0$

MIT $LG(x,x_0) = \delta(x-x_0)$ $G(0,x_0) = G(1,x_0) = 0$

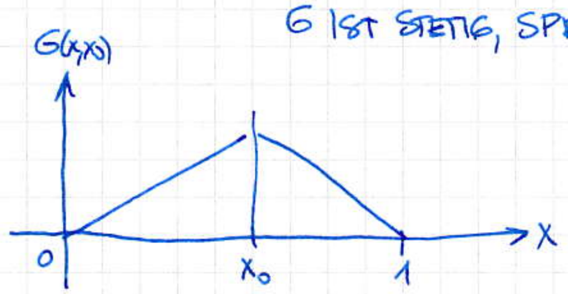
BEACHTE: $G(x,x_0)$ IST LÖSUNG VON $LG(x,x_0) = 0$ AN $x \neq x_0$!

SOFORT G ZU ERSCHLIESSEN!

BEISPIEL: $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ LÖSUNGEN VON $LG=0$ SIND GERADEN,

DIE NULLSTELLEN BEI $x=0$ BZW $x=1$ HABEN,

G IST STETIG, SPRUNG IN 1. ABLEITUNG, ALSO



LÖSE $Lw(x) = g(x)$ MIT $w(0) = w_0$, $w(1) = w_1$

ANSATZ: $w(x) = u(x) + h(x)$ MIT $Lu(x) = g(x)$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$
$Lh(x) = 0$, $h(0) = w_0$, $h(1) = w_1$

ERSETZE $h(x)$ DURCH $v(x)$ MIT $v(0-\varepsilon) = 0$, $v(1+\varepsilon) = 0$
$v(0+\varepsilon) = w_0$, $v(1-\varepsilon) = w_1$

$v(x)$ IST LÖSUNG VON $Lv(x) = s(x)$ $s(x)$ IST SYMBOLISCHE FUNKTION.

BERECHNE $G(x,x_0)$ AUS $LG(x,x_0) = \delta(x-x_0)$ MIT $G(0,x_0) = G(1,x_0) = 0$

LÖSUNG: $w(x) = \int_{0-}^{1+} G(x,x_0)\left[g(x_0) + s(x_0)\right] dx_0$ $w(x)$ NIMMT DIE WERTE w_0, w_1 AN, WENN MAN SICH VOM INNEREN DES INTERVALLS DEM RAND NÄHERT

BRACKET-SCHREIBWEISE: KET $|\psi\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$ ODER $\begin{pmatrix} \psi(x) \\ \downarrow \end{pmatrix}$

BRA $\langle\psi| \hat{=} (\psi_1^* \psi_2^* \ldots \psi_n^*)$ ODER $(\psi^*(x) \longrightarrow)$

BRACKET = KOMPL. ZAHL $\langle\varphi|\psi\rangle = \sum_i \varphi_i^* \psi_i)$ ODER $\int \varphi^*(x)\psi(x)\,dx$

„KOORDINATEN" (DARSTELLUNG, BASIS):

$\sum_i |i\rangle\langle i| = \underline{I}$, $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$, $\langle i|\varphi\rangle = \varphi_i$, $\langle i|\underline{L}|j\rangle = L_{ij}$ MATRIXELEMENT

$\int |x\rangle dx \langle x| = \underline{I}$ $\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$, $\langle x|\varphi\rangle = \varphi(x)$, $\langle x|\underline{L}|x'\rangle = L(x,x')$

DA $(G_1G_2\ldots G_N)^+ = G_N^+ \ldots G_2^+ G_1^+$ GILT $\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^+ = \langle\psi|\varphi\rangle^*$

WEIL KOMPL. ZAHL = 1x1-MATRIX, ERGO $+ = *$

ANWENDUNG AUF DIFF-, INTEGRAL-, INTEGRODIFFENTIALGLEICHUNGEN:

$\underline{L}|u\rangle = |g\rangle$ DREHSTRECKUNG (OPERATOR $\hat{=}$ QUADRATISCHE MATRIX)

$\langle x|\underline{L}|u\rangle = \langle x|g\rangle = g(x) = \int \langle x|\underline{L}|x'\rangle dx' \langle x'|u\rangle = \int L(x,x')u(x')\,dx' =$

$= \text{DEFINITION!} = L\langle x|u\rangle = Lu(x)$

LÖSUNG: $|u\rangle = \underline{L}^{-1}|g\rangle = \underline{G}|g\rangle$

$\langle x|u\rangle = u(x) = \langle x|\underline{G}|g\rangle = \int \langle x|\underline{G}|x_0\rangle dx_0 \langle x_0|g\rangle = \int G(x,x_0)g(x_0)\,dx_0$

MIT $\underline{L}\underline{G} = \underline{I}$ $\langle x|\underline{L}\underline{G}|x_0\rangle = \langle x|x_0\rangle = \delta(x-x_0) = L\langle x|\underline{G}|x_0\rangle = LG(x,x_0)$

DIE GREENSCHE FUNKTION = MATRIXELEMENTE DES UMKEHROPERATORS!

ADJUNGIERTER OPERATOR: $\langle v|\underline{L}|u\rangle = \langle u|\underline{L}^+|v\rangle^*$

BEACHTE: $L|u\rangle = |g\rangle$ ADJUNGIERT $\langle u|\underline{L}^+ = \langle g|$

$\underline{L}$ DEFINIERT DURCH $\begin{cases} L & \text{FORMALER OPERATOR} \\ \mathcal{L} & \text{OPERATORBEREICH = RB für } u(x) \end{cases}$

$\underline{L}^+$ 〃 〃 $\begin{cases} L^+ & \text{FORMAL ADJUNGIERTER OPERATOR} \\ \mathcal{L}^+ & \text{RB für } v(x) \end{cases}$

DERART, DASS $\langle v|\underline{L}|u\rangle = \langle u|\underline{L}^+|v\rangle^*$

D.H. $\int v^*(x) L u(x)\, dx = \int u(x) \{ L^+ v(x) \}^* dx$

$\underline{L} = \underline{L}^+$: SO EIN OPERATOR IST HERMITESCH

FÜR $L = a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)$ FOLGT

$L^+ = \frac{d^2}{dx^2}[a^*(x)\ldots] - \frac{d}{dx}[b^*(x)\ldots] + c^*(x)$ } KANN ERGO NIE HERMITESCH SEIN!

MIT $L = -\frac{1}{r(x)}\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)$ $r(x) > 0$, REELL, $u(x)$ AUS $\mathcal{L}$

FOLGT MIT NEUER METRIK $\int |x\rangle r(x) dx \langle x| = \underline{I}$, $\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')/r(x) = \delta(x-x')/r(x')$

$L^+ = -\frac{1}{r(x)}\frac{d}{dx}\left[p^*(x)\frac{d}{dx}\right] + q^*(x)$, $v(x)$ MIT RB AUS $\mathcal{L}^+$,

ERHALTEN AUS $K(v^*, u)\Big|_0^1 = -p(x)\left[v^*(x)\frac{du(x)}{dx} - u(x)\frac{dv^*(x)}{dx}\right]\Big|_0^1 = 0$

ERGO: $\underline{L} = \underline{L}^+$, WENN $r(x), p(x), q(x)$ REELL UND $\mathcal{L} = \mathcal{L}^+$ (z.B. FÜR HOMOGENE RB 1., 2. ART.

OPERATOR IM ERWEITERTEN SINN:

$\underline{L}_I$ (L, $\mathcal{L}_I$ = INHOMOGENE RB. FÜR $w(x)$)
$\underline{L}$ (L, $\mathcal{L}$ = HOMOGENE RB DER GLEICHEN STRUKTUR FÜR $u(x)$)
$\underline{L}^+$ (L^+, $\mathcal{L}^+$ = ADJUNGIERTE RB FÜR $v(x)$ AUS $K(v^*, u)\big|_0^1 = 0$

ES GILT:

$\langle v|\underline{L}|u\rangle = \langle u|\underline{L}^+|v\rangle^* + K(v^*, u)\big|_0^1$ MIT $K(v^*, u)\big|_0^1 = 0$

DANN IST $\langle v|\underline{L}_I|w\rangle = \langle w|\underline{L}^+|v\rangle^* + K(v^*, w)\big|_0^1$ MIT $K(v^*, w)\big|_0^1 \neq 0$

DEFINITION VON $\underline{L}_e$: $\langle v|\underline{L}_e|w\rangle = \langle w|\underline{L}^+|v\rangle^* = \langle v|\underline{L}_I|w\rangle - K(v^*, w)\big|_0^1$

BEACHTE! IST $\underline{L}^{-1} = \underline{G}$, $\underline{L}\underline{G} = \underline{I}$, DANN GILT AUCH $\underline{L}_e\underline{G} = \underline{I} = \underline{G}\underline{L}_e$ WEIL DIE RANDWERTE IN K „UNTER DAS INTEGRAL GESTECKT WURDEN"!

ANSATZ: $\underline{L}_I = \underline{L}_e + \underline{L}_1$ $\underline{L}_1$ „STÖROPERATOR"

FÜHRT DURCH EINSETZEN ZU

$$\langle v|\underline{L}_1|w\rangle = K(v^*(x), w(x))\Big|_{x=0}^{x=1} = K[\langle x|v\rangle, \langle x|w\rangle]\Big|_{x=0}^{x=1}$$

LÖSUNG INHOMOGENER DGL ZU INHOMOGENEN RB

FÜR $\underline{L}_I\,(L, \mathcal{L}_I)$ LÖSE $Lw(x) = g(x)$, $w(x)$ AUS $\mathcal{L}_I$ (RB INHOMOGEN)

DEFINIERE $\underline{L}\,(L, \mathcal{L})$ $Lu(x) = g(x)$, $u(x)$ AUS $\mathcal{L}$ (STRUKTUR WIE $\mathcal{L}_I$, ABER HOMOGEN)

LÖSE $LG(x,x_0) = \delta(x-x_0)/r(x)$ MIT $G(x,x_0)$ BEZÜGLICH x AUS $\mathcal{L}$, DANN GILT

$$w(x) = \int G(x,x_0)\, g(x_0)\, r(x_0)\, dx_0 - K\left[G(x,x_0), w(x_0)\right]\Big|_{x_0=0}^{x_0=1}$$

(= LÖSG INHOMOG. DGL MIT HOM. RB + LÖSG HOMOG. DGL. MIT INHOMOG. RB)

GF FÜR UNGEMISCHTE RB

$h_1(x), h_2(x)$ LÖSEN $LG=0$, ERFÜLLEN RB BEI $x=0$, $x=1$

$$G(x,x_0) = \frac{h_1(x)\, h_2(x_0)\, H(x_0-x) + h_1(x_0)\, h_2(x)\, H(x-x_0)}{K[h_1, h_2]_{x=x_0}}$$

GF FÜR GEMISCHTE RB

$h_1(x), h_2(x)$ BELIEBIGE, LINEAR UNABHG. LÖSG. VON $LG=0$

$$G(x,x_0) = c_1 h_1(x) + c_2 h_2(x) + \frac{h_1(x)\, h_2(x_0)\, H(x_0-x) + h_1(x_0)\, h_2(x)\, H(x-x_0)}{K[h_1, h_2]_{x=x_0}}$$

c_1, c_2 WERDEN AUS DEN (HOMOGENEN!) RB FÜR $G(x,x_0)$ BERECHNET.

EIGENFUNKTIONEN

GEGEBEN $\underline{L}\,(L, \mathcal{L})$ UND $\underline{L}^+\,(L^+, \mathcal{L}^+)$

$\underline{L}|u_k\rangle = \lambda_k |u_k\rangle$ (D.H. $Lu_k(x) = \lambda_k u_k(x)$ ODER $Lu(k,x) = \lambda(k)\, u(k,x)$, u AUS $\mathcal{L}$)

$\underline{L}^+|v_\ell\rangle = \mu_\ell |v_\ell\rangle$ (D.H. $L^+ v_\ell(x) = \mu_\ell v_\ell(x)$ ODER $L^+ v(\ell,x) = \mu(\ell)\, v(\ell,x)$, v AUS $\mathcal{L}^+$)

ES GILT: $\lambda_k = \mu_k^*$; $\langle v_\ell | u_k\rangle = \delta(\ell, k)$ ORTHOGONAL ($\delta_{\ell k}$, ODER $\delta(\ell - k)$)

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int_k |u_k\rangle\, dk\, \langle v_k| = \sum\!\!\!\!\!\!\int_\ell |v_\ell\rangle\, d\ell\, \langle u_\ell| = \underline{I} \qquad \text{VOLLSTÄNDIGKEIT}$$

ENTWICKLUNG NACH EIGENFUNKTIONEN $|u_k\rangle, |v_\ell\rangle$

$$|\varphi\rangle = \underline{I}\,|\varphi\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k |u_k\rangle\, dk\, \langle v_k|\varphi\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_\ell |v_\ell\rangle\, d\ell\, \langle u_\ell|\varphi\rangle$$

ODER, IN KOMPONENTEN GESCHRIEBEN (BILDE BRACKET $\langle x|\underline{I}|x'\rangle$!)

$$\frac{\delta(x-x')}{r(x)} = \frac{\delta(x-x')}{r(x')} = \sum\!\!\!\!\!\!\int_k u(k,x)\, v^*(k,x')\, dk = \sum\!\!\!\!\!\!\int_\ell v(\ell,x)\, u^*(\ell,x')\, d\ell$$

UND DIE ENTWICKLUNG EINER FUNKTION $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \int \delta(x-x')\, \varphi(x')\, dx' =$$

$$= \sum\!\!\!\!\!\!\int_k u(k,x)\, dk \int v^*(k,x')\, \varphi(x')\, r(x')\, dx' =$$

$$= \sum\!\!\!\!\!\!\int_\ell v(\ell,x)\, d\ell \int u^*(\ell,x')\, \varphi(x')\, r(x')\, dx'$$

EIGENWERTGL. HERMITESCHER OPERATOREN

AUS $\underline{L}|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle$: λ_k REELL, $\sum\!\!\!\!\int_k |u_k\rangle dk \langle u_k| = \underline{I}$ $\langle u_k|u_\ell\rangle = \delta(k,\ell)$

NÄHERUNG FÜR λ_k: $\langle\varphi|\underline{L}|\varphi\rangle / \langle\varphi|\varphi\rangle = \lambda_k + O(\varepsilon^2)$ FÜR $|\varphi\rangle = |u_k\rangle + \varepsilon|g\rangle$

LÖSUNG DER EIGENWERTGL. FÜR $\underline{L}, \underline{L}^+$ FRAGE NACH $\lambda = 0$? λ POSITIV REELL? λ NEGATIV REELL? λ KOMPLEX? FUNKTIONEN NORMIEREN.

SUMMIEREN VON REIHEN DURCH INTEGRALE IM KOMPLEXEN $f(\xi) = \dfrac{\pi\cos(\pi\xi)}{\sin(\pi\xi)}$

HAT POLE 1. ORDNUNG BEI $\xi = 0, \pm1, \pm2$.. USW MIT RESIDUUM 1.

SPEKTRALDARSTELLUNG VON OPERATORFUNKTIONEN

AUS $\underline{I} = \sum\!\!\!\!\int_k |u_k\rangle dk \langle v_k| = \sum\!\!\!\!\int_\ell |v_\ell\rangle d\ell \langle u_\ell|$ FOLGT

$f(\underline{L}) = \sum\!\!\!\!\int_k |u_k\rangle f(\lambda_k)\, dk \langle v_k|$; $f(\underline{L}^+) = \sum\!\!\!\!\int_\ell |v_\ell\rangle f(\mu_\ell)\, d\ell \langle w_\ell|$

$f(\underline{L})|g\rangle$ (ODER $f(\underline{L}^+)|g\rangle$) IST DAMIT LÖSBAR (DER EINFACHHEIT HALBER FÜR DISKRETE λ_k)

$f(\underline{L})|g\rangle = \sum_k |u_k\rangle f(\lambda_k)\langle v_k|g\rangle$; $f(L)g(x) = \langle x|f(\underline{L})|g\rangle = \sum_k u_k(x) f(\lambda_k)\langle v_k|g\rangle =$

$= \sum_k u_k(x) f(\lambda_k) \int v_k^*(x_0) g(x_0) \Lambda(x_0)\, dx_0$; DA $f(L)g(x) = \int f(L)\delta(x-x_0) g(x_0)\, dx_0$

FOLGT DURCH VERGLEICH $f(L)\delta(x-x_0) = \sum_k u_k(x) f(\lambda_k) v_k^*(x_0)\Lambda(x_0)$

BEACHTE: FÜR $f(\underline{L}) = \underline{L}^{-1} = \underline{G}$

$\underline{G} = \sum\!\!\!\!\int_k \dfrac{|u_k\rangle dk \langle v_k|}{\lambda_k}$ $\underline{G}$ ENTWICKELT NACH EIGENFUNKTIONEN VON $\underline{L}, \underline{L}^+$.

STÖRUNGSRECHNUNG $\underline{L} = \underline{L}^+$; $\underline{L}|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle$ BEKANNT. GESUCHT $\underline{L}_I|w\rangle = \beta|w\rangle$, $\underline{L}_I = \underline{L}_e + \underline{L}_1$

REKURSION

$|w_{\nu+1}\rangle = |u_n\rangle + \sum_{k\neq n} |u_k\rangle \dfrac{\langle u_k|\underline{L}_1|w_\nu\rangle}{\lambda_n - \lambda_k}$, $\beta^{(\nu+1)} = \lambda_n + \langle u_n|\underline{L}_1|w_\nu\rangle$

MIT $|w_0\rangle = |u_n\rangle$, $\beta^{(0)} = \lambda_n$, $\langle u_k|\underline{L}_1|w_\nu\rangle = k\,(u_k^*(x), w_\nu(x))\big|_0^1$

BEACHTE BEZIEHUNG $Lu(x) = \lambda u(x)$ ZU $y''(\xi) + [\lambda - Q(\xi)]y(\xi) = 0$

DEFINITION VON $\underline{G}_\lambda$ $\underline{G}_\lambda = (\underline{L} - \lambda\underline{I})^{-1} = -\sum\!\!\!\!\int_k \dfrac{|u_k\rangle dk \langle v_k|}{\lambda - \lambda_k}$

AUS $G_\lambda(x,x_0)$, DER LÖSUNG VON $(L-\lambda)G(x,x_0) = \delta(x-x_0)$ LIEST MAN AB:

1) POLE 1. ORDNUNG BEI $\lambda_k = \mu_k^*$ 2) RESIDUUM BEIM POL IST $-u_k(x) v_k^*(x_0)$
3) KONTINUIERLICHE EIGENWERTE SIND AM VERZWEIGUNGSSCHNITT VON G
4) FÜR $\underline{L} = \underline{L}^+$ LIEGT EIN VERZWEIGUNGSSCHNITT AUF DER REELLEN λ-ACHSE.
5) AUS INTEGRAL ÜBER ALLE POLE 1. ORDNUNG FOLGT

$\frac{1}{2\pi i}\oint \underline{G}_\lambda d\lambda = -\sum_k |u_k\rangle\langle v_k| = \int |u_k\rangle dk \langle v_k| - \underline{I}$; BILDET MAN $\langle x|\underline{I}|x_0\rangle$,

FOLGT: $-\sum_k u_k(x) v_k^*(x_0) = \int u(k,x) v^*(k,x_0)\, dk - \dfrac{\delta(x-x_0)}{\Lambda(x)}$

WEGEN $g(x) = \int \delta(x-x_0) g(x_0)\, dx_0$ LÄSST SICH JEDE FUNKTION NACH EIGENFUNKTIONEN ENTWICKELN

VERALLGEMEINERUNGEN AUF n DIMENSIONEN

$\int |x_i\rangle d\tau \langle x_i| = \underline{I} \qquad \langle x_i|x_{i0}\rangle = \delta(x_i - x_{i0}) \qquad |x_i\rangle = |x_1, x_2, \dots, x_n\rangle$

$d\tau = dx_1 dx_2 \dots dx_n \,; \quad \int \partial_i A_i d\tau = \oint A_i e_i d\sigma \,; \quad \frac{\partial u}{\partial e} = e_i \partial_i u$ RICHTUNGSABLEITUNG

ADJUNGIERTER OPERATOR $\quad \underline{L} : L, \mathcal{L} \,; \quad \underline{L}^+ : L^+, \mathcal{L}^+$

$\langle v|\underline{L}|u\rangle = \langle u|\underline{L}^+|v\rangle^* + \int \partial_i K_i(v^*, u) d\tau = \langle u|\underline{L}^+|v\rangle^* + \oint e_i K_i(v^*, u) d\sigma$ $\quad K_i$ KONJUNKTVEKTOR

WOBEI $\int \partial_i K_i d\tau = \oint e_i K_i d\sigma = 0$ DEFINIERT ADJ. OPERATORBEREICH

$\underline{L}_I : L, \mathcal{L}_I \qquad \underline{L}_I = \underline{L}_e + \underline{L}_1$

$\langle v|\underline{L}_I|w\rangle = \langle w|\underline{L}^+|v\rangle^* + \int \partial_i K_i(v^*, w) d\tau \qquad \int \partial_i K_i(v^*, w) d\tau \neq 0 \,!$

DEFINITION: $\langle v|\underline{L}_e|w\rangle = \langle w|\underline{L}^+|v\rangle^* = \langle v|\underline{L}_I|w\rangle - \int \partial_i K_i(v^*, w) d\tau =$

$= \langle v|\underline{L}_I|w\rangle - \langle v|\underline{L}_1|w\rangle$

DURCH VERGLEICH: $\langle v|\underline{L}_1|w\rangle = \int_{(+)} \partial_i K_i(\langle v|x_i\rangle, \langle x_i|w\rangle) d\tau = \oint e_i K_i(v^*, w) d\sigma$

LÖSUNG INHOMOGENER PROBLEME ZU INHOMOGENEN RANDBEDINGUNGEN

$\underline{L}_I|w\rangle = |g\rangle \longrightarrow L w(x_i) = g(x_i)\,, \; w(x_i)$ aus $\mathcal{L}_I$

LÖSE $\underline{L}\,\underline{G} = \underline{I} \longrightarrow L G(x_i, x_{i0}) = \delta(x_i - x_{i0})$ $\quad G$ aus $\mathcal{L}$ BEZÜGLICH x_i (HOMOGENE RB!)

$(\underline{L}_e + \underline{L}_1)|w\rangle = |g\rangle\,,$ DA $\underline{L}_e \underline{G} = \underline{G}\,\underline{L}_e = \underline{I}$ GILT

$|w\rangle = \underline{G}|g\rangle - \underline{G}\,\underline{L}_1|w\rangle$

$$\langle x_i|w\rangle = w(x_i) = \langle x_i|\underline{G}|g\rangle - \langle x_i|\underline{G}\,\underline{L}_1|w\rangle =$$

$$= \int \langle x_i|\underline{G}|x_{i0}\rangle d\tau_0 \langle x_{i0}|g\rangle - \int \partial_{i0} K_i[\langle x_i|\underline{G}|x_{i0}\rangle, \langle x_{i0}|w\rangle] d\tau_0 =$$

$$= \int G(x_i, x_{i0}) g(x_{i0}) d\tau_0 - \int \partial_{i0} K_i[G(x_i, x_{i0}), w(x_{i0})] d\tau_0 =$$

$$= \int G(x_i, x_{i0}) g(x_{i0}) d\tau_0 - \oint e_{i0} K_i[G(x_i, x_{i0}), w(x_{i0})] d\sigma_0$$

POISSONGLEICHUNG

$$w(\vec{x}) = \int G(\vec{x}, \vec{x}_0) g(\vec{x}_0) dV_0 - \oint \left[G(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial w(\vec{x}_0)}{\partial e_0} - w(\vec{x}_0) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial e_0} \right] dF_0$$

WELLENGLEICHUNG

$$w(\vec{x}, t) = \int_0^\infty dt_0 \iiint_{-\infty}^{+\infty} G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) g(\vec{x}_0, t_0) dx_{10} dx_{20} dx_{30} -$$

$$- \frac{1}{c^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, 0) \left.\frac{\partial w(\vec{x}_0, t_0)}{\partial t_0}\right|_{t_0=0} dx_{10} dx_{20} dx_{30} +$$

$$+ \frac{1}{c^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} w(\vec{x}_0, 0) \left.\frac{\partial G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0)}{\partial t_0}\right|_{t_0=0} dx_{10} dx_{20} dx_{30}$$

PRODUKTRAUM $U_1 \otimes U_2$ VON 2 ENTKOPPELTEN RÄUMEN U_1, U_2 GF (07)

IN U_1: $\underline{L}_1, \underline{M}_1 \ldots; |\varphi_1\rangle, |\psi_1\rangle \ldots;$ $\int |x_1\rangle \, r_1(x_1)\, dx_1 \langle x_1| = \underline{I}$; $\langle x_1 | x_1' \rangle = \delta(x_1 - x_1')/r_1(x_1)$
IN U_2: ANALOG.
IN $U_1 \otimes U_2$: $\underline{L}; |\varphi\rangle$ (HABEN ANTEILE IN U_1 UND U_2)
DEFINITION $\langle \varphi_1, \psi_1 | \varphi_2, \psi_2 \rangle = \langle \varphi_1 | \psi_1 \rangle \langle \varphi_2 | \psi_2 \rangle$

$$\iint |x_1, x_2\rangle \, r_1(x_1) \, r_2(x_2) \, dx_1 \, dx_2 \langle x_1, x_2| = \underline{I} \; ; \; \langle x_1, x_2 | x_1', x_2' \rangle = \delta(x_1 - x_1')\,\delta(x_2 - x_2') / r_1(x_1)\, r_2(x_2)$$

KOMPONENTEN: $\langle x_1, x_2 | \varphi \rangle = \varphi(x_1, x_2)$
MATRIXELEMENTE: $\langle x_1', x_2' | \underline{L} | x_1'', x_2'' \rangle = L(x_1', x_2'; x_1'', x_2'')$.
FORMALER OPERATOR:

$$\langle x_1, x_2 | \underline{L} | \varphi \rangle = \mathcal{L} \langle x_1, x_2 | \varphi \rangle = \mathcal{L} \varphi(x_1, x_2)$$

GELÖST SEIEN

$$\underline{L}_1 |u_{k1}\rangle = \lambda_{k1} |u_{k1}\rangle \; ; \; \underline{L}_1^+ |v_{\ell 1}\rangle = \mu_{\ell 1} |v_{\ell 1}\rangle \; ; \; \underline{L}_2 |u_{k2}\rangle = \lambda_{k2} |u_{k2}\rangle \; ; \; \underline{L}_2^+ |v_{\ell 2}\rangle = \mu_{\ell 2} |v_{\ell 2}\rangle$$

ES GILT: $\displaystyle \not\int |u_{k1}, u_{k2}\rangle \, dk_1 \, dk_2 \langle v_{k1}, v_{k2}| = \underline{I}$; $\langle v_{\ell 1}, v_{\ell 2} | u_{k1}, u_{k2} \rangle = \delta(\ell_1, k_1)\,\delta(\ell_2, k_2)$

DARAUS $f(\underline{L}_1, \underline{L}_2)$, $f(\underline{L}_1^+, \underline{L}_2^+)$, $f(\underline{L}_1, \underline{L}_2)|\varphi\rangle$ ETC BERECHENBAR.

SPEZIELL FÜR $\underline{L} = \underline{L}_1 + \underline{L}_2$, $[\underline{L}_1, \underline{L}_2] = 0$ (ACHTUNG: L_1, L_2 UND $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ KOMMUTIEREN!)

$\underline{L}|u_k\rangle = \lambda_k |u_k\rangle$ MIT $|u_k\rangle = |u_{k1}, u_{k2}\rangle$; $\lambda_k = \lambda_{k1} + \lambda_{k2}$

$\underline{L}|u\rangle = |g\rangle$ GELÖST DURCH $\underline{G} = \underline{L}^{-1} = (\underline{L}_1 + \underline{L}_2)^{-1}$

BEI DER INVERSION KANN $\underline{L}_1$ ODER $\underline{L}_2$ ALS KONSTANTE BETRACHTET WERDEN!

DIE LÖSUNG $\langle x_1, x_2 | u \rangle = u(x_1, x_2) = \langle x_1, x_2 | \underline{G} | g \rangle$ kann in DREIERLEI FORM BERECHNET WERDEN:

$$u(x_1, x_2) = \sum_{k_1} c_{k1}(x_2)\, u_{k1}(x_1) = \sum_{k_2} c_{k2}(x_1)\, u_{k2}(x_2) = \sum_{k_1}\sum_{k_2} c_{k_1 k_2}\, u_{k1}(x_1)\, u_{k2}(x_2)$$

KOMMUTIERENDE OPERATOREN GILT $[Q_i, Q_j] = 0$ FÜR $i, j = 1, 2 \ldots n$

SO HABEN SIE SIMULTANE EIGENKETS $\underline{Q}_i |u_k\rangle = \lambda_{ik} |u_k\rangle$
ZU VERSCHIEDENEN EIGENWERTSPEKTREN λ_{ik}

SPEZIELLER SATZ: IST $\underline{L} = \sum_{i=1}^{n} \underline{P}_i \underline{Q}_i$ MIT $\underline{P}_i$ AUS U_1, $\underline{Q}_i$ AUS U_2
(DAHER AUTOMATISCH $[\underline{P}_i, \underline{Q}_j] = 0$ FÜR $i, j = 1, 2, \ldots n$)
UND GILT FERNER $[\underline{Q}_i, \underline{Q}_j] = 0$
DANN KÖNNEN BEI DER INVERSION VON $\underline{L}$ ALLE $\underline{Q}_i$ ALS KONSTANTE BETRACHTET WERDEN!

DYADISCHE GREENSCHE FUNKTION

DAS PROBLEM $\underline{L}|u_i\rangle = |g_i\rangle$ $(i = 1, 2, 3)$

WIRD DURCH $|u_i\rangle = \sum_{j=1}^{3} \underline{G}_{ij} |g_j\rangle$ GELÖST, MIT $\underline{L}\,\underline{G}_{ij} = \delta_{ij}\, \underline{I}$

DABEI IST $\underline{G}_{ij} = \underline{G}_{ji}$

EINE SPEZIELLE BEZIEHUNG

BEI DER INVERSION VON OPERATOREN MUSS FOLGENDER AUSDRUCK BERECHNET WERDEN:

$$f(L)\,\frac{\delta(x-x_0)}{r(x)} = f(L)\,\frac{\delta(x-x_0)}{r(x_0)}$$

PROCEDERE

1) $\underline{L}$ IST IN EINEM RAUM MIT DER BASIS

$$\int |x\rangle r(x)\,dx\,\langle x| = \underline{I} \qquad \langle x|x_0\rangle = \frac{\delta(x-x_0)}{r(x)} = \frac{\delta(x-x_0)}{r(x_0)} \qquad \text{DEFINIER } (L, \mathcal{L})$$

2) MAN BEACHTE

$$\langle x|\underline{L}|\varphi\rangle = L\langle x|\varphi\rangle = L\varphi(x)$$

3) MAN LÖSE $\quad \underline{L}|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle, \quad \underline{L}^+|v_e\rangle = \mu_e|v_e\rangle$

4) DANN GILT

$$\underline{I} = \oint_k |u_k\rangle\,dk\,\langle v_k| \quad , \quad \langle u_k|v_e\rangle = \delta(k,e)$$

5) IN ANWENDUNG OBIGER BEZIEHUNGEN FOLGT:

$$f(\underline{L}) = \oint_k f(\underline{L})|u_k\rangle\,dk\,\langle v_k|$$

$$f(\underline{L}) = \oint_k |u_k\rangle f(\lambda_k)\,dk\,\langle v_k|$$

$$\langle x|f(\underline{L})|x_0\rangle = \oint_k \langle x|u_k\rangle f(\lambda_k)\,dk\,\langle v_k|x_0\rangle$$

$$f(L)\langle x|x_0\rangle = \oint_k u(k,x) f(\lambda_k)\,dk\,v^*(k,x_0)$$

$$f(L)\,\frac{\delta(x-x_0)}{r(x)} = f(L)\,\frac{\delta(x-x_0)}{r(x_0)} = \oint_k f(\lambda_k)\,u(k,x)\,v^*(k,x_0)\,dk$$

DAMIT IST DER GESUCHTE TERM DURCH EIGENFUNKTIONEN VON L, L^+ BERECHNET.