

# Greensche Funktionen und Eigenfunktionen

Vorlesung von Prof. Dr. em. Gerhard Grau  
Institut für Hochfrequenztechnik und Quantenelektronik<sup>1</sup>

Universität Karlsruhe, WS 2021/2022

<sup>1</sup>Nicht zur Veröffentlichung. Eine Vervielfältigung dieses Typoskripts ist nicht gestattet.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorbemerkungen</b>	<b>1</b>
1.1	Verallgemeinerte (symbolische) Funktionen . . . . .	1
1.2	Einige spezielle verallgemeinerte Funktionen . . . . .	3
1.2.1	Die $\delta$ -Funktion . . . . .	3
1.2.2	Ableitungen der $\delta$ -Funktion . . . . .	5
1.2.3	Der Cauchy'sche Hauptwert (valor principalis) . . . . .	6
1.2.4	Die Funktion $H(x)$ . . . . .	6
1.2.5	Die Funktionen $\delta_+(x)$ , $\delta_-(x)$ . . . . .	7
1.2.6	Die Funktion $\operatorname{sgn}(x)$ . . . . .	8
1.3	Grundgedanke der Greenschen Funktion . . . . .	8
1.3.1	Inhomogenes Problem, homogene Randbedingungen . . . . .	8
1.3.2	Homogenes Problem, inhomogene Randbedingungen . . . . .	10
1.3.3	Inhomogenes Problem, inhomogene Randbedingungen . . . . .	12
1.4	Vektoren und lineare Operatoren in abstrakten Räumen . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>17</b>
2.1	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung und lineare Randbedingungen . .	17
2.2	Adjungierter Operator und adjungierte Randbedingungen . . . . .	18
2.2.1	Beispiel 1 . . . . .	19
2.2.2	Beispiel 2 . . . . .	20
2.2.3	Beispiel 3 . . . . .	20
2.3	Gewichtsfunktionen. Operatoren im erweiterten Sinn. . . . .	20
2.3.1	Operatoren im erweiterten Sinn . . . . .	23
2.3.2	Formal selbstadjungierte Operatoren . . . . .	24
2.4	Inhomogene Probleme mit inhomogenen Randbedingungen . . . . .	24
2.4.1	Beispiel . . . . .	26
2.5	Berechnung der Greenschen Funktion . . . . .	26
2.5.1	$G(x, x_0)$ für ungemischte Randbedingungen . . . . .	27
2.5.2	$G(x, x_0)$ für gemischte Randbedingungen . . . . .	27
2.5.3	Die Berechnung von $G(x, x_0)$ mittels Fouriertransformation . . . . .	28
2.5.4	$G(x, x_0)$ für Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Eigenfunktionen</b>	<b>33</b>
3.1	Entwicklung nach Eigenfunktionen . . . . .	33
3.1.1	Speziell für Hermitesche Operatoren geltende Beziehungen . . . . .	35
3.1.2	Beispiel für Eigenfunktionen . . . . .	35
3.1.3	Beispiel zur Entwicklung nach Eigenfunktionen . . . . .	37
3.2	Die Spektraldarstellung von Operatorfunktionen . . . . .	40
3.2.1	Inversion von Operatoren . . . . .	41
3.3	Grundgedanke der Störungsrechnung . . . . .	42
3.3.1	Beispiel zur Störungsrechnung . . . . .	43

3.3.2	Näherungen für Eigenwerte . . . . .	43
3.4	Beziehung zur Schrödingergleichung . . . . .	44
3.5	Die Greensche Funktion $G_\lambda(x, x_0)$ . . . . .	44
3.5.1	Beispiel zum diskreten Spektrum . . . . .	45
3.5.2	Beispiel zum kontinuierlichen Spektrum . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen</b>	<b>51</b>
4.1	Deltafunktionen in mehreren Dimensionen . . . . .	51
4.1.1	Zylinderkoordinaten . . . . .	52
4.1.2	Kugelkoordinaten . . . . .	52
4.1.3	Die $\delta$ -Funktion in Kugelkoordinaten . . . . .	52
4.1.4	Beispiel für eine ignorable Koordinate . . . . .	52
4.1.5	Beispiel für zwei ignorable Koordinaten . . . . .	52
4.2	Lineare Operatoren und Randbedingungen . . . . .	53
4.3	Adjungierter Operator. Operatoren im erweiterten Sinn . . . . .	55
4.3.1	Beispiel 1: Der Konjunktvektor und der Operator $L^\dagger$ . . . . .	56
4.3.2	Beispiel 2: Der Laplace-Operator . . . . .	58
4.3.3	Beispiel 3: Der Operator der Wellengleichung . . . . .	58
4.3.4	Beispiel 4: Der Operator der Wärmeleitungsgleichung . . . . .	59
4.4	Die Lösung von inhomogenen Problemen zu inhomogenen Randbedingungen . . . . .	60
4.4.1	Beispiel 1: Lösung der Poisson-Gleichung . . . . .	61
4.4.2	Beispiel 2: Anmerkung zur Lösung der Poisson-Gleichung . . . . .	62
4.4.3	Beispiel 3: Lösung der inhomogenen Wellengleichung . . . . .	62
4.5	Der Produktraum . . . . .	63
4.6	Die Greensche Funktion $G_\lambda$ . Umkehroperatoren . . . . .	66
4.6.1	Simultane Eigenkets . . . . .	67
4.6.2	Inversion eines speziellen Operators . . . . .	68
4.7	Die dyadische Greensche Funktion . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Beispiele für Greensche Funktionen</b>	<b>70</b>
5.1	Der Laplace-Operator in zwei Dimensionen in kartesischen Koordinaten . . . . .	70
5.1.1	Erstes Lösungsverfahren: Ein Operator wird als Konstante betrachtet . . . . .	70
5.1.2	Zweites Lösungsverfahren: Direkte Inversion des Operators . . . . .	72
5.2	Der Laplace-Operator in ebenen Polarkoordinaten . . . . .	72
5.2.1	Der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten . . . . .	74
5.3	Der Laplace-Operator in drei Dimensionen . . . . .	75
5.4	Die Wellengleichung . . . . .	76
5.5	Die eindimensionale Wärmeleitung . . . . .	78
5.6	Die Helmholtzgleichung . . . . .	80
5.7	Tensoroperatoren . . . . .	80
5.8	Das elektromagnetische Feld . . . . .	81
5.9	Anmerkungen zur analytischen Schreibweise der Tensorrechnung . . . . .	83
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>88</b>
	<b>Berichtigungen</b>	<b>89</b>

# Kapitel 1

## Vorbemerkungen

Greensche Funktionen gestatten es, die Lösung linearer gewöhnlicher oder partieller Differentialgleichungen als Integral über jenen Bereich anzuschreiben, in dem die Lösung gesucht wird. Der Integrand ist das Produkt der Greenschen Funktion mit einer (im allgemeinen symbolischen) Funktion, welche das Wissen über die Randbedingungen der gesuchten Lösung sowie die Störfunktion enthält (wenn es sich um eine inhomogene Differentialgleichung handelt). Ist die Greensche Funktion für einen Typ von Randbedingungen bekannt, kann die Lösung des Problems für beliebige Randwerte und Störfunktionen sofort in Integralform angeschrieben werden.

Das Ziel der Vorlesung ist es, Methoden zur Berechnung der Greenschen Funktion eines Problems anzugeben und dabei zu lernen, wie man die bekannte Greensche Funktion für ein verwandtes Problem an den eigenen Fall anpassen kann.

Die Fassung ab WS 2000/2001 wurde um drei Abschnitte erweitert, welche eine Einführung in die Lösung partieller Differentialgleichungen bieten, in denen Tensoroperatoren auf Vektorfelder angewendet werden. Für das WS 2007/2008 wurde Abschnitt 5.9 eingefügt, in dem eine Einführung in die analytische Schreibweise der Tensoralgebra und Tensoranalysis geboten wird. Zum WS 2012/2013 wurde die Darstellung an einigen Stellen gestrafft, Redundanzen wurden entfernt.

Im Wintersemester 2017/2018 wurden an die pdf-Version des Skripts 10 Seiten angefügt, welche handschriftliche Zusammenstellungen von Formeln enthalten (gedacht zur Hilfe bei der Wiederholung der Vorlesung vor einer Prüfung oder zur Erläuterung nicht im Detail abgeleiteter Formeln).

### 1.1 Verallgemeinerte (symbolische) Funktionen

Bei der Berechnung der Greenschen Funktion hat man es immer mit gewissen „pathologischen“ Funktionen zu tun (mit sogenannten verallgemeinerten oder symbolischen Funktionen); für den Umgang mit solchen Funktionen sollen zunächst die Grundlagen geschaffen werden.

Es seien Testfunktionen  $\Phi_T(x)$  und Grundfunktionen  $\Phi_G(x)$  wie folgt definiert: Die Funktionen  $\Phi_T(x)$  seien stetig, beliebig oft stetig differenzierbar und nur in einem endlichen Bereich ungleich Null, z.B.

$$\Phi_T(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \exp\left[-\frac{1}{(x-a)^2}\right] & 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Grundfunktionen  $\Phi_G(x)$  seien stetig, beliebig oft stetig differenzierbar, und außerdem gelte

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^l \frac{d^m \Phi_G(x)}{dx^m} = 0 \quad \text{für alle } l, m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

Ein Beispiel für eine Grundfunktion ist

$$\Phi_G(x) = \exp(-x^2). \quad (1.3)$$

Im folgenden bezeichnet  $\Phi(x)$  eine Testfunktion oder eine Grundfunktion. Als Funktional über dem Raum der Funktionen  $\Phi(x)$  bezeichnet man eine Vorschrift, durch die einer Funktion  $\Phi(x)$  eine — im allgemeinen komplexe — Zahl zugeordnet wird, die man mit dem Symbol  $\langle s|\Phi \rangle$  bezeichnet.

Lineare Funktionale sind speziell solche, für die gilt

$$\langle s|\Phi_1 + \Phi_2 \rangle = \langle s|\Phi_1 \rangle + \langle s|\Phi_2 \rangle, \quad \langle s|\lambda\Phi \rangle = \lambda\langle s|\Phi \rangle. \quad (1.4)$$

Lineare Funktionale heißen stetig, wenn für eine Nullfolge von Funktionen  $\Phi_n(x)$  auch die Zahlen  $\langle s|\Phi_n \rangle$  eine Nullfolge darstellen; z. B. ist

$$\langle s|\Phi \rangle = \int_a^b \Phi(x) dx$$

nach obigen Kriterien ein lineares stetiges Funktional.

Als Distribution bezeichnet man ein lineares, stetiges Funktional über dem Raum der Testfunktionen  $\Phi_T(x)$ , als temperierte Distribution ein lineares, stetiges Funktional über dem Raum der Grundfunktionen  $\Phi_G(x)$ . In der Folge soll mit  $\Phi(x)$  eine Testfunktion oder eine Grundfunktion verstanden werden.

Jede Distribution definiert eine verallgemeinerte (auch: symbolische) Funktion durch die Beziehung

$$\langle s|\Phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x)\Phi(x) dx. \quad \text{Beachte: } \langle \lambda s|\Phi \rangle = \lambda^* \langle s|\Phi \rangle. \quad (1.5)$$

Die Ableitung  $s'(x)$  einer verallgemeinerten Funktion ist wegen der Eigenschaften von  $\Phi(x)$  definiert durch:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [s'(x)]^* \Phi(x) dx = s^*(x)\Phi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x)\Phi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x)\Phi'(x) dx. \quad (1.6)$$

Beziehungen zwischen verallgemeinerten Funktionen, z. B. der Art

$$s_1(x) = s_2(x) \quad (1.7)$$

sind nicht dadurch überprüfbar, daß man die Gleichheit der „Funktionswerte“ für verschiedene Werte von  $x$  überprüft, weil verallgemeinerte Funktionen gar keine Funktionswerte im üblichen Sinn haben müssen. Gl. (1.7) hat Bedeutung in folgendem Sinn:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1^*(x)\Phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2^*(x)\Phi(x) dx, \quad (1.8)$$

d. h. es müssen die Zahlen  $\langle s_1|\Phi \rangle = \langle s_2|\Phi \rangle$  für alle Funktionen  $\Phi(x)$  gleich sein.

Man kann verallgemeinerte Funktionen  $s(x)$  oft in bestimmten Intervallen durch gewöhnliche Funktionen  $g(x)$  ersetzen. Gilt z. B. für alle Testfunktionen mit der Eigenschaft

$$\Phi(x) \quad \begin{cases} \neq 0 & \text{in } a < x < b, \\ = 0 & \text{für } x \geq b, \ x \leq a \end{cases} \quad (1.9)$$

die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x)\Phi(x) dx = \int_a^b g^*(x)\Phi(x) dx = \langle s|\Phi \rangle, \quad (1.10)$$

so sagt man

$$s(x) = g(x) \quad \text{im Intervall} \quad a < x < b. \quad (1.11)$$

Verallgemeinerte Funktionen bezeichnet man als gerade (ungerade), wenn  $\int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x)\Phi(x)dx$  für ungerade (gerade) Funktionen  $\Phi(x)$  verschwindet.

Es soll noch das Fourierspektrum  $s_F(f)$  einer symbolischen Funktion  $s(x)$  definiert werden. Schreibt man die Fourier-Transformation in der Form

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_F(f)e^{2\pi jfx}df, \quad g_F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-2\pi jfx}dx, \quad (1.12)$$

so ist die Definition des Spektrums  $s_F(f)$  der verallgemeinerten Funktion  $s(x)$  gegeben durch

$$\langle s|\Phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x)\Phi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} s_F^*(f)\Phi_F(f)df. \quad (1.13)$$

Diese Beziehung hat dieselbe Form wie das Parsevalsche Theorem der Fourier-Transformation (die Beziehung stellt folgende Frage: gibt es eine Funktion  $s_F(f)$  im Spektralbereich, welche bei Anwendung auf die immer existierende Fourier-Transformierte  $\Phi_F(f)$  dieselbe Zahl erzeugt, die man durch Anwendung der symbolischen Funktion  $s(x)$  auf die Funktion  $\Phi(x)$  erhält). Man beachte, daß bei der Transformation von Ortsfunktionen oft  $k$  anstelle von  $(-2\pi f)$  geschrieben wird, weil das einer Zerlegung der Ortsfunktion nach ebenen Wellen  $\exp(-jkx)$  entspricht.

Nach dem bisher Gesagten ist klar, daß das Produkt  $s_1(x)s_2(x)$  zweier symbolischer Funktionen nicht definiert ist. Es existiert aber die Faltung  $\int_{-\infty}^{+\infty} s_1^*(\tau)s_2^*(t-\tau)d\tau$  zweier verallgemeinerter Funktionen; sie ist im allgemeinen selbst eine verallgemeinerte Funktion (Beweis durch Einsetzen der Faltung in Gl. (1.5)).

## 1.2 Einige spezielle verallgemeinerte Funktionen

### 1.2.1 Die $\delta$ -Funktion

Sie ist definiert durch

$$\langle s|\Phi \rangle = \Phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\Phi(x)dx. \quad (1.14)$$

Daraus folgt

$$\Phi(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\Phi(x+x_0)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\Phi(x)dx. \quad (1.15)$$

Nach Gl. (1.9)–Gl. (1.11) kann die  $\delta$ -Funktion in den Intervallen  $-\infty < x < 0$  und  $0 < x < \infty$  durch eine gewöhnliche Funktion  $g(x)$  ersetzt werden. Mit

$$\Phi(x) \quad \begin{cases} \neq 0 & \text{in } 0 < x < \infty, \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.16)$$

gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\Phi(x)dx = \Phi(0) = 0 = \int_0^{\infty} g(x)\Phi(x)dx. \quad (1.17)$$

Gl. (1.17) ist für alle Grundfunktionen Gl. (1.16) sicher dann erfüllt, wenn gilt (die zweite der nachstehend angeführten Beziehungen erhält man analog für Funktionen, welche für  $x > 0$  verschwinden)

$$\begin{aligned} \delta(x) = g(x) = 0 & \quad \text{in } 0 < x < \infty, \\ \delta(x) = g(x) = 0 & \quad \text{in } -\infty < x < 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Für gewisse Distributionen (etwa zur Definition der symbolischen Funktion  $\delta(x)$ ) kann man für  $\Phi(x)$  Funktionenklassen zulassen, welche weniger einschneidende Bedingungen erfüllen als die definierten Testfunktionen und Grundfunktionen. Da das Verhalten von  $\Phi(x)$  sowohl für  $x > 0$  als auch für  $x < 0$  hier keine Rolle spielt (da  $\delta(x)$  in diesen Bereichen verschwindet), genügt es, daß  $\Phi(x)$  bei  $x = 0$  einen definierten Funktionswert besitzt;  $\delta(x)$  kann auf alle Funktionen angewendet werden, welche bei  $x = 0$  stetig sind.

Die  $\delta$ -Funktion hat bei  $x = 0$  eine Singularität, für die gilt (man nimmt eine stetige Funktion  $\Phi(x)$  mit  $\Phi(0) = 1$ )

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx = 1. \quad (1.19)$$

Es gilt ferner

$$x\delta(x) = 0. \quad (1.20)$$

Gl. (1.20) wird durch Anwendung von Gl. (1.7), Gl. (1.8) überprüft:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\delta(x)\Phi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)[x\Phi(x)]dx = x\Phi(x)|_{x=0} = 0.$$

Durch formales Differenzieren von Gl. (1.20) erhält man

$$\delta(x) + x\delta'(x) = 0. \quad (1.21)$$

Aus Gl. (1.13) wird die Fourier-Transformation der  $\delta$ -Funktion berechnet:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\Phi(x)dx &= \Phi(0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_F(f)e^{2\pi jfx}df \Big|_{x=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_F(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_F^*(f)\Phi_F(f)df. \end{aligned}$$

Durch Vergleich liest man ab

$$\delta_F(f) = 1. \quad (1.22)$$

Durch formale Anwendung der Fourier-Rücktransformation (das Integral konvergiert nicht; eine Fourier-Transformierte existiert nur für Funktionen, deren Absolutbetrag im Intervall  $-\infty < 0 < +\infty$  integrierbar ist) erhält man:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi jfx}df = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi jfx}df = \delta(-x) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} e^{\pm 2\pi jfx}df = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(kx)}{x}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Der Grenzwert in Gl. (1.23) existiert nicht. Man bezeichnet solche Ausdrücke auch als verallgemeinerten Grenzwert; er bekommt seine Bedeutung dadurch, daß man die Zahlen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_n^*(x) \Phi(x) dx$$

bildet (sinnvolle Ausdrücke erhält man nur dann, wenn man die unter dem Limeszeichen stehende Funktion mit einer Funktion  $\Phi(x)$  multipliziert, das Produkt integriert und erst nach der Integration den Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  bildet). Man beachte, daß der verallgemeinerte Grenzwert Gl. (1.23) zwar die Eigenschaften reproduziert, welche  $\int \delta(x) \Phi(x) dx$  aufweist, daß aber *nicht* für  $k \rightarrow \infty$  an allen Stellen  $x \neq 0$  der Funktionswert (s. Gl. (1.18))  $\delta(x) = 0$  für  $x \neq 0$  erreicht wird (das ist nur *eine* der Möglichkeiten). Mit dieser Auffassung weist man leicht nach, daß  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \exp(-j\omega t) = 0$  ist, weil

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) e^{-j\omega t} dt = 0$$

gilt.

Die  $\delta$ -Funktion ist eine gerade Funktion. Die Darstellung Gl. (1.23) ist also immer so zu verstehen, daß beim Integral  $\int \delta(x) \Phi(x) dx$  erst nach der Integration der Grenzwert  $R \rightarrow \infty$  oder  $k \rightarrow \infty$  gebildet wird. Weitere Darstellungen sind z. B.

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \quad (1.24)$$

Für  $x \neq 0$  verhalten sich diese beiden Funktionen im Grenzwert wie  $g(x) = 0$ , für  $x = 0$  haben sie eine Singularität, für die Gl. (1.19) erfüllt ist; daß Gl. (1.14) gilt, rechnet man unter Beachtung der Eigenschaften Gl. (1.1), Gl. (1.2) von  $\Phi(x)$  leicht nach. Eine weitere nützliche Beziehung ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta[g(x)] \Phi(x) dx = \sum_n \frac{\Phi(x_n)}{|g'(x_n)|}, \quad (1.25)$$

wobei  $x_n$  die Nullstellen der Funktion  $g(x)$  bedeuten ( $g'(x_n) \neq 0$ ).

## 1.2.2 Ableitungen der $\delta$ -Funktion

Aus Gl. (1.6) folgt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) \Phi(x) dx &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \Phi'(x) dx = -\Phi'(0), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x) \Phi(x) dx &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \Phi^{(n)}(x) dx = (-1)^n \Phi^{(n)}(0). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Auch diese Funktionen verhalten sich für  $x \neq 0$  wie die gewöhnliche Funktion  $g(x) = 0$ ; für die Funktionen  $\Phi(x)$  muß daher nur die Stetigkeit der  $n$ -ten Ableitung an der Stelle  $x = 0$  gefordert werden. Darstellungen der Ableitungen von  $\delta(x)$  erhält man auch durch Differenzieren von Gl. (1.23), Gl. (1.24) und Interpretation als verallgemeinerte Grenzwerte:

$$\delta'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left( \frac{k \cos(kx)}{x} - \frac{\sin(kx)}{x^2} \right). \quad (1.27)$$

Durch wiederholte Anwendung von Gl. (1.21) folgt

$$n\delta^{(n-1)}(x) + x\delta^{(n)}(x) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.28)$$

### 1.2.3 Der Cauchy'sche Hauptwert (valor principalis)

Er wird für uneigentliche Integrale mit dem Nenner  $x$  folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \langle s|\Phi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\Phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Phi(x)}{x} dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\Phi(x) - \Phi(-x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\frac{1}{x}\right) \Phi(x) dx. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Für  $P(1/x)$  weist man mit Gl. (1.9)–Gl. (1.11) nach, daß sich der Hauptwert von  $1/x$  für  $x \neq 0$  wie die gewöhnliche Funktion  $1/x$  verhält.

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = g(x) = \frac{1}{x}, \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < x < \infty. \quad (1.30)$$

Das Intervall  $-\varepsilon < x < +\varepsilon$  wird bei der Integration ausgespart. Darstellungen durch verallgemeinerte Grenzwerte sind (siehe auch Gl. (1.42), Gl. (1.44)):

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(kx)}{x}. \quad (1.31)$$

Daß bei der Integration das Intervall  $-\varepsilon < x < \varepsilon$  tatsächlich ausgespart wird, sieht man aus dem Verschwinden des nachstehenden Integrals:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \Phi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{+1} \frac{u\Phi(\varepsilon u)}{1 + u^2} du = \Phi(0) \int_{-1}^{+1} \frac{u du}{1 + u^2} = 0. \quad (1.32)$$

Man beachte, daß die Gleichung

$$xf(x) = 1 \quad (1.33)$$

im Bereich der verallgemeinerten Funktionen folgende Lösung hat:

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + c\delta(x). \quad (1.34)$$

Es ist somit  $1/x$  gleich  $P(1/x) + c\delta(x)$ . Beweis: Man multipliziere mit  $x$  und beachte Gl. (1.20), Gl. (1.29).

### 1.2.4 Die Funktion $H(x)$

Definition:

$$\langle s|\Phi \rangle = \int_0^{\infty} \Phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\Phi(x) dx \quad (1.35)$$

Mit Gl. (1.9) bis Gl. (1.11) weist man nach, daß  $H(x)$  in den Intervallen  $-\infty < x < 0$ ,  $0 < x < \infty$  durch einfache gewöhnliche Funktionen ersetzt werden kann:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases} \quad (1.36)$$

Wegen Gl. (1.6) gilt für die Ableitung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H'(x)\Phi(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\Phi'(x) dx = - \int_0^{\infty} \Phi'(x) dx = \Phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\Phi(x) dx, \quad (1.37)$$

das bedeutet

$$H'(x) = \delta(x). \quad (1.38)$$

Nun soll noch die Fourier-Transformierte von  $H(x)$  berechnet werden: Nach Gl. (1.13) gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\Phi(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_F^*(f)\Phi_F(f)df = \int_0^{\infty} \Phi(x)dx = \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_F(f)e^{2\pi jfx}df \right] dx \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_F(f) \frac{e^{2\pi jfx}}{2\pi jf} df \right]_{x=0}^{x=\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi jfx} - 1}{2\pi jf} \Phi_F(f)df. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Es folgt somit im Sinne eines verallgemeinerten Grenzwertes

$$H_F(f) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2\pi jfx}}{2\pi jf}. \quad (1.40)$$

Daraus wird

$$H_F(f) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(2\pi fx)}{2\pi jf} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi fx)}{2\pi f}. \quad (1.41)$$

Durch Vergleich mit den Beziehungen Gl. (1.23), Gl. (1.31) erhält man das Ergebnis

$$H_F(f) = \frac{1}{2\pi j} P\left(\frac{1}{f}\right) + \frac{1}{2}\delta(f). \quad (1.42)$$

Die Darstellung von  $H_F(f)$  durch verallgemeinerte Grenzwerte hätte man auch folgendermaßen erhalten können:

$$H_F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)e^{-2\pi jfx}dx = \int_0^{\infty} e^{-2\pi jfx}dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-2\pi jfx}dx, \quad (1.43)$$

woraus folgt:

$$H_F(f) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(kf)}{f} + \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(kf)}{\pi f}. \quad (1.44)$$

### 1.2.5 Die Funktionen $\delta_+(x)$ , $\delta_-(x)$

Sie sind — siehe auch Gl. (1.23) — folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} e^{-2\pi jfx}df = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-2\pi jfx}df + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{2\pi jfx}df \\ &= \delta_+(x) + \delta_-(x). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Aus Vergleich von Gl. (1.43), Gl. (1.44), Gl. (1.45) folgt mit Gl. (1.24), Gl. (1.31)

$$\begin{aligned} 2\pi j\delta_+(x) &= P\left(\frac{1}{x}\right) + j\pi\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} + j\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - j\varepsilon}, \\ -2\pi j\delta_-(x) &= P\left(\frac{1}{x}\right) - j\pi\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} - j\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + j\varepsilon}, \\ \delta_-(x) &= \delta_+(-x) = \delta_+^*(x) = \delta_-^*(-x). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Damit kann man z. B. schreiben:

$$H_F(f) = \delta_+(f). \quad (1.47)$$

## 1.2.6 Die Funktion $\operatorname{sgn}(x)$

(Signum von  $x$ ), ist definiert durch

$$\langle s|\Phi\rangle = \int_0^{\infty} \Phi(x)dx - \int_{-\infty}^0 \Phi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(x)\Phi(x)dx. \quad (1.48)$$

Nach Gl. (1.9)–Gl. (1.11) läßt sie sich intervallweise durch eine gewöhnliche Funktion ersetzen:

$$\operatorname{sgn}(x) = H(x) - H(-x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases} \quad (1.49)$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sgn}(x) = \delta(x) + \delta(-x) = 2\delta(x). \quad (1.50)$$

In der Folge werden oft Integrale der Form  $\int_a^b \delta(x - x_0)\Phi(x)dx$  vorkommen. Setzt man für  $\delta(x)$  eine der Formen Gl. (1.23), Gl. (1.24) ein, so erhält man, wenn man den Grenzübergang nach der Integration vollzieht,

$$\int_a^b \delta(x - x_0)\Phi(x)dx = \begin{cases} \Phi(b)/2 & x_0 = b, \\ \Phi(x_0) & a < x_0 < b, \\ \Phi(a)/2 & x_0 = a. \end{cases} \quad (1.51)$$

Für verschiedene Anwendungen ist es lästig, daß der Faktor  $1/2$  vorkommt. Integrale der Form Gl. (1.51) werden dadurch vermieden, daß man folgende Integrale bildet ( $\kappa > 0$ ):

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \int_{a-\kappa}^{b+\kappa} \delta(x - x_0)\Phi(x)dx = \int_{a-}^{b+} \delta(x - x_0)\Phi(x)dx = \Phi(x_0), \quad a \leq x_0 \leq b. \quad (1.52)$$

## 1.3 Grundgedanke der Greenschen Funktion

### 1.3.1 Inhomogenes Problem, homogene Randbedingungen

Zu lösen sei folgendes Problem:

$$\begin{aligned} Lu(x) = -\frac{d^2u(x)}{dx^2} = g(x) & \text{ inhomogenes Problem,} \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 & \text{ homogene Randbedingungen.} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Wenn  $L$  ein linearer Operator ist (das sei im folgenden immer der Fall), dann kann man die Wirkung  $u(x)$  an der Stelle  $x$  als Superposition der Wirkungen zufolge der Ursachen  $g(x_0)$  an den Stellen  $x_0$  darstellen. Der Gewichtungsfaktor  $G(x, x_0)$  gibt an, wie stark sich die Ursache bei  $x_0$  als Wirkung an der Stelle  $x$  manifestiert; somit erhält man für die Lösung den Ansatz

$$u(x) = \int_0^1 G(x, x_0)g(x_0)dx_0. \quad (1.54)$$

Gl. (1.54) erfüllt die geforderten Randbedingungen (im folgenden als RB abgekürzt) von Gl. (1.53), wenn  $G$  bezüglich der Variablen  $x$  dieselben homogenen RB erfüllt:

$$G(0, x_0) = 0, \quad G(1, x_0) = 0. \quad (1.55)$$

Setzt man den Ansatz Gl. (1.54) in Gl. (1.53) ein, und schreibt in den Integralgrenzen  $0-$ ,  $1+$  um etwaige Singularitäten am Rand ganz einzubeziehen, siehe Gl. (1.52), so erhält man

$$\begin{aligned} Lu(x) &= g(x) = \int_{0-}^{1+} LG(x, x_0)g(x_0)dx_0 = \int_{0-}^{1+} \delta(x_0 - x)g(x_0)dx_0, \quad \text{d. h.} \\ LG(x, x_0) &= -\frac{d^2G(x, x_0)}{dx^2} = \delta(x - x_0), \quad G(0, x_0) = 0, \quad G(1, x_0) = 0. \end{aligned} \quad (1.56)$$

$G(x, x_0)$  heißt Greensche Funktion des Problems. Hat man sie gefunden, so ist die Lösung des Problems Gl. (1.53) für beliebige Funktionen  $g(x)$  zu den RB  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$  durch Gl. (1.54) gegeben.

### Verfahren 1 zur Berechnung von $G(x, x_0)$

Direkte Integration von Gl. (1.56) im Bereich der verallgemeinerten Funktionen:

$$\begin{aligned} dG/dx &= -H(x - x_0) + c_1(x_0), \\ G &= -(x - x_0)H(x - x_0) + xc_1(x_0) + c_2(x_0). \end{aligned}$$

Jetzt werden die RB erfüllt:

$$\begin{aligned} G(0, x_0) &= 0 = x_0H(-x_0) + c_2(x_0), \\ G(1, x_0) &= 0 = -(1 - x_0)H(1 - x_0) + c_1(x_0) + c_2(x_0). \end{aligned}$$

Man berechnet aus diesen beiden Beziehungen die Integrationskonstanten  $c_1$ ,  $c_2$ . Die Lösung lautet damit

$$G(x, x_0) = -(x - x_0)H(x - x_0) + x[(1 - x_0)H(1 - x_0) + x_0H(-x_0)] - x_0H(-x_0). \quad (1.57)$$

Dieser Ausdruck ist jetzt zu vereinfachen. Grundgedanke: Die Funktion ist bezüglich der Variablen  $x$ ,  $x_0$  im Intervall  $0 \leq x, x_0 \leq 1$  definiert. An der Stelle  $x = x_0$  hat die zweite Ableitung eine Singularität. In den Teilintervallen  $0 \leq x_0 < x$  und  $x < x_0 \leq 1$  wird daher keine Singularität auftreten. Man erhält als Funktion von  $x_0$  (das ist deshalb zweckmäßig, weil die Integrationsvariable in Gl. (1.54) die Variable  $x_0$  ist) das Ergebnis

$$G(x, x_0) = \begin{cases} x_0(1 - x) & 0 \leq x_0 < x, \\ x(1 - x_0) & x < x_0 \leq 1. \end{cases} \quad (1.58)$$

Die Lösung des Problems Gl. (1.53) ist daher:

$$u(x) = \int_0^x x_0(1 - x)g(x_0)dx_0 + \int_x^1 x(1 - x_0)g(x_0)dx_0. \quad (1.59)$$

### Verfahren 2 zur Berechnung von $G(x, x_0)$

$G$  erfüllt mit Ausnahme bei  $x = x_0$  die homogene Gleichung  $-d^2G(x, x_0)/dx^2 = 0$ . Es ist naheliegend, in den beiden Bereichen  $0 \leq x_0 < x$ ,  $x < x_0 \leq 1$  je eine Lösung dieser Gleichung anzusetzen und die beiden Lösungen bei  $x = x_0$  geeignet aneinander zu passen. — Ansatz:

$$G(x, x_0) = \begin{cases} xa(x_0) + b(x_0) & 0 \leq x_0 < x, \\ xc(x_0) + d(x_0) & x < x_0 \leq 1. \end{cases} \quad (1.60)$$

Wegen den RB  $G(0, x_0) = 0$ ,  $G(1, x_0) = 0$  folgt (man beachte: Für  $x = 0$  gilt  $x < x_0$ ; für  $x = 1$  ist  $x > x_0$ ):

$$G(x, x_0) = \begin{cases} (x - 1)a(x_0) & 0 \leq x_0 < x, \\ xc(x_0) & x < x_0 \leq 1. \end{cases} \quad (1.61)$$

An der Stelle  $x = x_0$  ist  $G(x, x_0)$  stetig (wenn man zweimal über  $\delta(x - x_0)$  integriert, erhält man nach der ersten Integration eine Kurve mit einem Sprung, nach der zweiten eine stetige Kurve mit einem Knick). Aus der Stetigkeitsbedingung

$$(x_0 - 1)a(x_0) = x_0c(x_0)$$

erhält man eine Beziehung zwischen den beiden Konstanten  $a, c$  und somit

$$G(x, x_0) = \begin{cases} \frac{x_0(x-1)}{x_0-1}c(x_0) & 0 \leq x_0 < x, \\ xc(x_0) & x < x_0 \leq 1. \end{cases} \quad (1.62)$$

Die Konstante  $c(x_0)$  erhält man, indem man Gl. (1.56) über den Bereich  $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$  integriert.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{d^2G}{dx^2} dx &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta(x - x_0) dx = -1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{dG(x, x_0)}{dx} \Big|_{x=x_0+\varepsilon} - \frac{dG(x, x_0)}{dx} \Big|_{x=x_0-\varepsilon} \right\}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Mittels Gl. (1.62) berechnet man:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dG}{dx} \Big|_{x=x_0-\varepsilon} &= \frac{d}{dx} xc(x_0) = c(x_0), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dG}{dx} \Big|_{x=x_0+\varepsilon} &= \frac{d}{dx} x_0(x-1) \frac{c(x_0)}{x_0-1} = \frac{x_0c(x_0)}{x_0-1}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Aus Gl. (1.63) erhält man:

$$c(x_0) = 1 - x_0. \quad (1.65)$$

Eingesetzt in Gl. (1.62):

$$G(x, x_0) = \begin{cases} x_0(1-x) & 0 \leq x_0 < x, \\ x(1-x_0) & x < x_0 \leq 1. \end{cases} \quad (1.66)$$

Gl. (1.66) ist identisch mit Gl. (1.58). Man kann Gl. (1.66) auch so schreiben:

$$G(x, x_0) = x_0(1-x)H(x-x_0) + x(1-x_0)H(x_0-x) \quad 0 \leq x_0 \leq 1. \quad (1.67)$$

Was wäre, wenn man statt der homogenen RB  $u(0) = u(1) = 0$  inhomogene Randwerte  $u(0) \neq 0, u(1) \neq 0$  hätte? Dann müßte  $G(x, x_0)$  anderen (nicht einfach zu durchschauenden) Bedingungen genügen, man müßte ein anderes  $G(x, x_0)$  ermitteln. Dieser Weg wird nicht besprochen. Man kommt mit einem Trick immer mit  $G(x, x_0)$  für homogene RB aus (dies wird im folgenden Abschnitt erläutert).

### 1.3.2 Homogenes Problem, inhomogene Randbedingungen

Folgendes Problem sei zu lösen:

$$\begin{aligned} Lh(x) &= -\frac{d^2h(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{homogenes Problem,} \\ h(0) &= h_0 \neq 0, \quad h(1) = h_1 \neq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{inhomogene RB.} \end{aligned} \quad (1.68)$$

Die Lösung von Gl. (1.68) kann sofort angeschrieben werden:

$$h(x) = h_0(1-x) + h_1x. \quad (1.69)$$

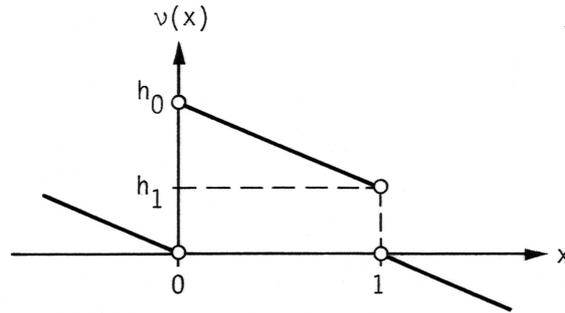


Abbildung 1.1: Verlauf der Funktion  $\nu(x)$ ; sie nimmt homogene Randwerte bei Annäherung an die Punkte  $x = 0$ ,  $x = 1$  von außerhalb des Intervalls  $(0, 1)$  an, inhomogene Randwerte bei Annäherung an die Randpunkte aus dem Inneren des Intervalls

Diese Lösung kann durch einen Trick mittels der Greenschen Funktion (GF) Gl. (1.58), die für homogene RB ermittelt wurde, gefunden werden. Wie, wird im Beispiel gezeigt (s. auch Abb. (1.1)). — Man ersetzt  $h(x)$  von Gl. (1.69) durch eine Funktion  $\nu(x)$ , welche homogene RB erfüllt, aber im Grenzwert die geforderten inhomogenen Randwerte annimmt, wenn man sich den Intervallgrenzen vom Inneren des Intervalls nähert. Ein Beispiel für so eine Funktion ist (siehe auch Abb. (1.1))

$$\nu(x) = h_0[H(x) - x] + h_1[x - H(x - 1)] = \begin{cases} (-h_0 + h_1)x & x < 0, \\ h_0(1 - x) + h_1x & 0 < x < 1, \\ (-h_0 + h_1)(x - 1) & x > 1. \end{cases} \quad (1.70)$$

$\nu(x)$  nimmt bei Annäherung an den Rand von innen die inhomogenen Randwerte  $h_0$ ,  $h_1$  an, bei Annäherung an den Rand von außen homogene Randwerte. Durch Differenzieren folgt:

$$\begin{aligned} \nu'(x) &= h_0[\delta(x) - 1] + h_1[1 - \delta(x - 1)], \\ \nu''(x) &= h_0\delta'(x) - h_1\delta'(x - 1), \\ L\nu(x) &= -\frac{d^2\nu(x)}{dx^2} = s(x) = -h_0\delta'(x) + h_1\delta'(x - 1), \quad \nu(0-) = 0, \quad \nu(1+) = 0. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Damit wurde das homogene Problem mit inhomogenen RB Gl. (1.68) durch das inhomogene Problem mit homogenen RB Gl. (1.71) ersetzt, und darauf müßte die GF Gl. (1.67) angewendet werden können. Probe aufs Exempel: In Anwendung von Gl. (1.59) erhält man für die Lösung von Gl. (1.71):

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \int_{0-}^x x_0(1 - x_0)s(x_0)dx_0 + \int_x^{1+} x(1 - x_0)s(x_0)dx_0 \\ &= -\int_{0-}^x x_0(1 - x_0)h_0\delta'(x_0)dx_0 + \int_x^{1+} x(1 - x_0)h_1\delta'(x_0 - 1)dx_0 \\ &= \frac{d}{dx_0} h_0x_0(1 - x_0)|_{x_0=0} - \frac{d}{dx_0} h_1x(1 - x_0)|_{x_0=1} \\ &= h_0(1 - x) + h_1x = h(x) \quad \text{in } 0 < x < 1. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Man erhält eine Funktion, die in  $0 < x < 1$  mit  $h(x)$  identisch ist! Berechnung von  $\nu(x)$  in anderer Form:

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \int_{0-}^{1+} G(x, x_0)s(x_0)dx_0 = \int_{0-}^{1+} G(x, x_0)[-h_0\delta'(x_0) + h_1\delta'(x_0 - 1)]dx_0 \\ &= h_0 \left. \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=0-} - h_1 \left. \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=1+}. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=0-} &= \text{(hier ist } x_0 < x) = \frac{\partial}{\partial x_0}[x_0(1-x)] = 1-x, \\ \left. \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=1+} &= \text{(hier ist } x_0 > x) = \frac{\partial}{\partial x_0}[x(1-x_0)] = -x. \end{aligned}$$

Damit erhält man die selbe Lösung wie früher.

### 1.3.3 Inhomogenes Problem, inhomogene Randbedingungen

Zu lösen ist:

$$Lw(x) = -\frac{d^2 w}{dx^2} = g(x) \quad w(0) = w_0 \neq 0, \quad w(1) = w_1 \neq 0. \quad (1.73)$$

Man löst zunächst die Differentialgleichung für die GF mit homogenen RB:

$$LG(x, x_0) = -\frac{d^2 G(x, x_0)}{dx^2} = \delta(x - x_0) \quad G(0, x_0) = 0, \quad G(1, x_0) = 0. \quad (1.74)$$

Die Lösung von Gl. (1.73) wird folgendermaßen aufgebaut:

$$w(x) = u(x) + h(x), \quad (1.75)$$

$$Lu(x) = -\frac{d^2 u}{dx^2} = g(x), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad \text{d. h. : } u(x) = \int_0^1 G(x, x_0)g(x_0)dx_0, \quad (1.76)$$

$$Lh(x) = -\frac{d^2 h}{dx^2} = 0 \quad h(0) = w_0, \quad h(1) = w_1. \quad (1.77)$$

Dabei wird das Problem Gl. (1.77) ersetzt durch das Problem

$$\begin{aligned} L\nu(x) &= -\frac{d^2 \nu(x)}{dx^2} = s(x) = -w_0\delta'(x) + w_1\delta'(x-1), \\ \nu(x) &= \int_{0-}^{1+} G(x, x_0)s(x_0)dx_0 = h(x) \quad \text{in } 0 < x < 1. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Damit wird die Lösung des inhomogenen Problems zu inhomogenen RB

$$w(x) = \int_{0-}^{1+} G(x, x_0)[g(x_0) + s(x_0)]dx_0 = u(x) + \nu(x). \quad (1.79)$$

Jetzt stellen sich folgende Fragen: Wie findet man zu gegebenen inhomogenen RB die symbolische Funktion  $s(x)$ ? Wie löst man die Differentialgleichung für die GF?

## 1.4 Vektoren und lineare Operatoren in abstrakten Räumen

Man definiert abstrakte Vektoren  $|\varphi\rangle, |\psi\rangle$  (sogenannte Ket-Vektoren oder Kets, die Bezeichnung geht auf Dirac zurück), deren Komponenten in einem unitären Raum durch komplexe Zahlen gegeben sind. Es können abzählbar endlich oder unendlich viele Komponenten vorhanden sein (je nach der Dimension des Raums). Die Komponenten dieser abstrakten Vektoren bezüglich einer im Raum gewählten Basis werden in einer Spaltenmatrix angeordnet.

$$|\varphi\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad |\psi\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (1.80)$$

Das Zeichen  $\hat{=}$  bedeutet „Entsprechung“: Dem Ket entsprechen die in der Spaltenmatrix zusammengefaßten Komponenten bezüglich einer im Raum gewählten Basis.

Im Grenzfall kann ein Raum nicht-abzählbar unendlich viele Dimensionen haben; in diesem Fall wird der Index der Komponenten eine kontinuierliche Variable  $x$ , die Spaltenmatrix wird eine Matrix mit „kontinuierlich unendlich vielen Zeilen“, eine Funktion:

$$|\varphi\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \downarrow \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \downarrow \end{pmatrix}. \quad (1.81)$$

Zu den Ket-Vektoren werden adjungierte Gebilde, sogenannte Bra-Vektoren oder Bras  $\langle\varphi|$ ,  $\langle\psi|$  definiert, deren Komponenten zu den adjungierten (hermitesch konjugierten) Matrizen führen sollen:

$$\begin{aligned} \langle\varphi| = \{|\varphi\rangle\}^\dagger &\hat{=} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}^\dagger = (\varphi_1^* \varphi_2^* \dots \varphi_n^*), \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \downarrow \end{pmatrix}^\dagger = (\varphi^*(x) \rightarrow \dots), \\ \langle\psi| = \{|\psi\rangle\}^\dagger &\hat{=} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}^\dagger = (\psi_1^* \psi_2^* \dots \psi_n^*), \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \downarrow \end{pmatrix}^\dagger = (\psi^*(x) \rightarrow \dots). \end{aligned} \quad (1.82)$$

Aus Gl. (1.80)–Gl. (1.82) definiert man als „inneres Produkt“ jene komplexe Zahl, die entsteht, wenn man (in dieser Reihenfolge) einen Bra mit einem Ket zu einer Bra(c)ket zusammenschiebt: Diese komplexe Zahl ist das Produkt der entsprechenden Matrizen der Komponenten. Es gilt:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^* = \langle\psi|\varphi\rangle^\dagger = \sum_{i=1}^n \varphi_i^* \psi_i = (\varphi_1^* \dots \varphi_n^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \text{oder} \quad = \int \varphi^*(x) \psi(x) dx. \quad (1.83)$$

Die Vektoren sollen alle endliche Länge haben, d. h.

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle^* = \sum_{i=1}^n |\varphi_i|^2, \quad \text{oder} \quad = \int |\varphi(x)|^2 dx \leq M. \quad (1.84)$$

Man beachte: Wird ein Produkt von Gebilden (Matrizen) adjungiert, so kommt man zum selben Ergebnis, wenn man die Adjungierten der Einzelgebilde in umgekehrter Reihenfolge multipliziert.

$$(G_1 G_2 G_3 \dots G_n)^\dagger = G_n^\dagger G_{n-1}^\dagger \dots G_3^\dagger G_2^\dagger G_1^\dagger. \quad (1.85)$$

Bei einer komplexen Zahl ( $1 \times 1$ -Matrix) sind die Operationen komplex konjugiert und hermitesch konjugiert identisch.

Die Komponenten  $\varphi_i$  des Kets  $|\varphi\rangle$  kann man als Komponenten von  $|\varphi\rangle$  in Richtung von Einheitskets  $|i\rangle$  auffassen, welche paarweise orthogonal sind.

$$|\varphi\rangle = \sum_i |i\rangle \varphi_i = \sum_i |i\rangle \langle i|\varphi\rangle, \quad \text{oder} \quad = \int |x\rangle dx \varphi(x) = \int |x\rangle dx \langle x|\varphi\rangle. \quad (1.86)$$

Analoges gilt für den Bra  $\langle\varphi|$ , den man durch Adjungieren von Gl. (1.86) unter Beachtung von Gl. (1.85) erhält.

$$\langle\varphi| = \sum_i \varphi_i^* \langle i| = \sum_i \langle\varphi|i\rangle \langle i|, \quad \text{oder} \quad = \int \varphi^*(x) dx \langle x| = \int \langle\varphi|x\rangle dx \langle x|. \quad (1.87)$$

Es gilt also die Schreibweise:

$$\begin{aligned} \langle i|\varphi\rangle &= \varphi_i, & \langle x|\varphi\rangle &= \varphi(x), \\ \langle\varphi|i\rangle &= \varphi_i^*, & \langle\varphi|x\rangle &= \varphi^*(x). \end{aligned} \quad (1.88)$$

Durch Vergleich der Gleichungsseiten in Gl. (1.86), Gl. (1.87) erhält man die Vollständigkeitsrelation ( $\underline{I}$  ist der Einheitsoperator, der alles unverändert läßt):

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = \underline{I}, \quad \text{oder} \quad \int |x\rangle dx \langle x| = \underline{I}. \quad (1.89)$$

Gl. (1.89) besagt auch, daß jeder Vektor  $|\varphi\rangle$  nach den Basisvektoren  $|i\rangle$  (bzw.  $|x\rangle$ ) entwickelt werden kann. Aus Gl. (1.86) folgt ferner durch linksseitiges Multiplizieren mit einem Basisvektor  $\langle j|$  (bzw.  $\langle x'|$ ):

$$\langle j|\varphi\rangle = \varphi_j = \sum_i \langle j|i\rangle \varphi_i, \quad \text{oder} \quad \langle x'|\varphi\rangle = \varphi(x') = \int \langle x'|x\rangle dx \varphi(x). \quad (1.90)$$

Daraus lassen sich die Orthogonalitätsrelationen der Basisvektoren ablesen:

$$\langle j|i\rangle = \delta_{ij}, \quad \text{oder} \quad \langle x'|x\rangle = \delta(x' - x). \quad (1.91)$$

Ein linearer Operator  $\underline{L}$  transformiert einen Ket  $|u\rangle$  in einen anderen Ket  $|g\rangle$ :

$$\underline{L}|u\rangle = |g\rangle. \quad (1.92)$$

Hat man eine Basis Gl. (1.91) gewählt, so können die sogenannten Matrixelemente eines linearen Operators  $\underline{L}$  wie folgt definiert werden:

$$L_{ij} = \langle i|\underline{L}|j\rangle, \quad \text{oder} \quad L(x, x') = \langle x|\underline{L}|x'\rangle. \quad (1.93)$$

Mit Hilfe dieser Matrixelemente läßt sich der auf Kets operierende abstrakte Operator  $\underline{L}$  äquivalent durch einen Operator  $L$  ersetzen, der auf die Komponenten  $u_i$  oder  $u(x)$  des Kets operiert; aus Gl. (1.92) folgt:

$$\begin{aligned} \underline{L}|u\rangle &= |g\rangle, & \underline{L}|u\rangle &= |g\rangle, \\ \langle i|\underline{L}|u\rangle &= \langle i|g\rangle, & \langle x|\underline{L}|u\rangle &= \langle x|g\rangle, \\ \langle i|\underline{L}|u\rangle &= \langle i|g\rangle, & \langle x|\underline{L}|u\rangle &= \langle x|g\rangle, \\ \sum_j \langle i|\underline{L}|j\rangle \langle j|u\rangle &= \langle i|g\rangle, & \int \langle x|\underline{L}|x'\rangle dx' \langle x'|u\rangle &= \langle x|g\rangle, \\ \sum_j L_{ij} u_j &= g_i & \int L(x, x') u(x') dx' &= g(x) \\ &= Lu_i & &= Lu(x) \\ &= \langle i|\underline{L}|u\rangle & &= \langle x|\underline{L}|u\rangle \\ &= L\langle i|u\rangle. & &= L\langle x|u\rangle. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Der zu  $\underline{L}$  adjungierte Operator  $\underline{L}^\dagger$  wird durch die zu Gl. (1.92) adjungierte Gleichung

$$\langle u|\underline{L}^\dagger = \langle g| \quad (1.95)$$

definiert. Aus Gl. (1.92), Gl. (1.95) folgt die Beziehung:

$$\left. \begin{aligned} \langle v|\underline{L}|u\rangle &= \langle v|g\rangle, \\ \langle u|\underline{L}^\dagger|v\rangle &= \langle g|v\rangle = \langle v|g\rangle^*, \end{aligned} \right\} \quad \langle v|\underline{L}|u\rangle = \langle u|\underline{L}^\dagger|v\rangle^*. \quad (1.96)$$

Gl. (1.96) hätte man auch direkt durch Adjungieren von  $\langle v|\underline{L}|u\rangle$  nach der Regel Gl. (1.85) erhalten. Die Anwendung dieser Schreibweise auf unsere Situation wird mit Beispielen erläutert.

### Beispiel 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x) \Phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle s|x\rangle dx \langle x|\Phi\rangle = \langle s|\underline{I}|\Phi\rangle = \langle s|\Phi\rangle. \quad (1.97)$$

Das Integral ist als inneres Produkt zweier abstrakter Vektoren  $|s\rangle$ ,  $|\Phi\rangle$  in einem Basissystem aufzufassen, für dessen Basisvektoren gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x\rangle dx \langle x| = \underline{I}, \quad \langle x|x'\rangle = \delta(x - x'). \quad (1.98)$$

## Beispiel 2

Es seien zwei verschiedene Basissysteme gegeben, das eine durch Gl. (1.98), das andere durch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f\rangle df \langle f| = \underline{I}, \quad \langle f|f'\rangle = \delta(f - f'). \quad (1.99)$$

Mit der Bezeichnung

$$\langle x|g\rangle = g(x), \quad \langle f|g\rangle = g_F(f) \quad (1.100)$$

gilt dann

$$\begin{aligned} \langle s|\Phi\rangle &= \langle s|\underline{I}|\Phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle s|f\rangle df \langle f|\Phi\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle s|x\rangle dx \langle x|\Phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x)\Phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} s_F^*(f)\Phi_F(f) df. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Das ist identisch mit Gl. (1.13). Die Fourier-Transformation Gl. (1.12) ist nichts anderes als die Darstellung desselben abstrakten Vektors  $|g\rangle$  bezüglich zweier verschiedener Basissysteme. Die Transformation der Komponenten dieses abstrakten Vektors erfolgt auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} g(x) &= \langle x|g\rangle = \langle x|\underline{I}|g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x|f\rangle df \langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x|f\rangle df g_F(f), \\ g_F(f) &= \langle f|g\rangle = \langle f|\underline{I}|g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f|x\rangle dx \langle x|g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f|x\rangle dx g(x). \end{aligned} \quad (1.102)$$

Aus Vergleich mit Gl. (1.12) folgt:

$$\langle x|f\rangle = \exp(2\pi jfx), \quad \langle f|x\rangle = \langle x|f\rangle^* = \exp(-2\pi jfx). \quad (1.103)$$

Die Transformation kann durchgeführt werden, wenn man die inneren Produkte  $\langle x|f\rangle$  der Basisvektoren der beiden Basissysteme kennt.

## Beispiel 3

Gegeben sei eine Gleichung in abstrakter oder in Komponentenschreibweise:

$$\underline{L}|u\rangle = |g\rangle, \quad \text{oder} \quad Lu(x) = g(x). \quad (1.104)$$

Es seien  $\underline{L}$ ,  $|g\rangle$  bekannt, der Vektor  $|u\rangle$  werde gesucht. Wenn der inverse Operator  $\underline{L}^{-1}$  existiert (für ihn wird die Bezeichnung  $\underline{L}^{-1} = \underline{G}$  gewählt; der Umkehroperator existiert dann, wenn die durch  $\underline{L}$  vermittelte Transformation keine Projektion des Vektors in einen niedriger-dimensionalen Raum war), so gilt für die Lösung

$$\underline{L}^{-1}\underline{L}|u\rangle = \underline{L}^{-1}|g\rangle = |u\rangle = \underline{G}|g\rangle. \quad (1.105)$$

Gl. (1.105) kann analog Gl. (1.94) für die Komponenten der abstrakten Vektoren bezüglich eines Basissystems angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \langle x|u\rangle &= \langle x|\underline{G}|g\rangle = \langle x|\underline{G}\underline{I}|g\rangle = \int \langle x|\underline{G}|x_0\rangle dx_0 \langle x_0|g\rangle \\ &= u(x) = \int G(x, x_0)g(x_0)dx_0. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Die Greensche Funktion (im folgenden gelegentlich mit GF abgekürzt) ist somit die Matrix des abstrakten Umkehroperators  $\underline{G} = \underline{L}^{-1}$ . Welcher Gleichung genügt  $\underline{G}$ ? Es ist sicher

$$\underline{L}\underline{L}^{-1} = \underline{L}\underline{G} = \underline{I},$$

das heißt

$$\langle x|\underline{L}\underline{G}|x_0\rangle = \langle x|\underline{I}|x_0\rangle = \langle x|x_0\rangle = \delta(x - x_0).$$

Schreibt man statt  $\underline{G}|x_0\rangle$  den Vektor  $|v\rangle$ , so kann der Ausdruck  $\langle x|\underline{L}\underline{G}|x_0\rangle = \langle x|\underline{L}|v\rangle$  nach Gl. (1.94) auch in der Form

$$L\langle x|v\rangle = L\langle x|\underline{G}|x_0\rangle = LG(x, x_0)$$

geschrieben werden. Damit hat man die Differentialgleichung für die GF:

$$LG(x, x_0) = \delta(x - x_0). \tag{1.107}$$

## Kapitel 2

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

### 2.1 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung und lineare Randbedingungen

Der allgemeinste lineare Differentialoperator zweiter Ordnung hat die Form

$$L = a(x) \frac{d^2}{dx^2} + b(x) \frac{d}{dx} + c(x). \quad (2.1)$$

Alle Funktionen  $u(x)$ , auf die  $L$  angewendet wird, sollen Komponenten von Vektoren  $|u\rangle$  endlicher Länge sein; auch die Funktionen  $Lu(x)$  (die Komponenten der Vektoren  $\underline{L}|u\rangle$ ) sollen dieser Bedingung genügen, d. h. z. B. für  $u(x)$ :

$$\langle u|u\rangle = \langle u|\underline{L}|u\rangle = \int \langle u|x\rangle dx \langle x|u\rangle = \int |u(x)|^2 dx \leq M. \quad (2.2)$$

Die Integralgrenzen legen den Bereich der Variablen  $x$  fest, in dem die Funktionen  $u(x)$ ,  $Lu(x)$  definiert sind.

Funktionen  $u(x)$ , für die  $Lu(x)$  bekannt ist, sind eindeutig durch lineare Randbedingungen (RB) festgelegt, die (z. B. für Funktionen, die im Bereich  $0 \leq x \leq 1$  interessieren) folgende allgemeine Form haben:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u'(0) \\ u'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Als Operatorbereich  $\mathcal{L}$  des Operators  $L$  bezeichnet man alle Funktionen  $u(x)$ , für die Gl. (2.2) mit speziellen RB Gl. (2.3) gilt, und für die  $Lu(x)$  wieder analog Gl. (2.2) integrierbar ist.

Der abstrakte Operator  $\underline{L}$  beinhaltet somit jeweils zwei Angaben: erstens den formalen Operator  $L$ , der auf die Komponenten  $u(x)$  von  $|u\rangle$  operiert, sowie den Operatorbereich (OB)  $\mathcal{L}$  von  $L$ , der Gl. (2.2) und die Randbedingungen für  $u(x)$  umfaßt.

$$\underline{L} \text{ umfaßt } \begin{cases} L & \text{formaler Operator,} \\ \mathcal{L} & \text{Operatorbereich.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Man bezeichnet RB als:

homogen:	$A = 0, B = 0.$
inhomogen:	wenn sie nicht homogen sind.
ungemischt:	$A = \alpha_1 u(0) + \alpha_3 u'(0),$ $B = \beta_2 u(1) + \beta_4 u'(1).$
gemischt:	wenn sie nicht ungemischt sind.
periodisch:	$u(0) = u(1), u'(0) = u'(1).$
RB 1. Art:	$A = \alpha_1 u(0), B = \beta_2 u(1).$
RB 2. Art:	$A = \alpha_3 u'(0), B = \beta_4 u'(1).$
RB 3. Art:	$A = \alpha_1 u(0) + \alpha_3 u'(0),$ $B = \beta_2 u(1) + \beta_4 u'(1).$
Anfangsbedingung:	$A = \alpha_1 u(0), B = \beta_3 u'(0),$
oder	$A = \alpha_2 u(1), B = \beta_4 u'(1).$

## 2.2 Adjungierter Operator und adjungierte Randbedingungen

Nach Gl. (1.96) gilt:

$$\begin{aligned} \langle v | \underline{L} | u \rangle &= \langle u | \underline{L}^\dagger | v \rangle^*, \\ \langle v | \underline{L} \underline{L} | u \rangle &= \langle u | \underline{L} \underline{L}^\dagger | v \rangle^*, \\ \int \langle v | x \rangle dx \langle x | \underline{L} | u \rangle &= \left\{ \int \langle u | x \rangle dx \langle x | \underline{L}^\dagger | v \rangle \right\}^*, \end{aligned}$$

oder mit Gl. (1.94):

$$\int v^*(x) L u(x) dx = \int u(x) \{ L^\dagger v(x) \}^* dx. \quad (2.5)$$

$L^\dagger$  operiert auf Funktionen  $v(x)$ . Es ist einzusehen, daß für ein gegebenes  $\underline{L}$  (also  $L$  plus  $\mathcal{L}$ ) die Beziehung Gl. (2.5) nur für ein bestimmtes  $L^\dagger$  und Funktionen  $v(x)$  zu erfüllen ist, die ganz bestimmten RB genügen: Dadurch ist  $\underline{L}^\dagger$  definiert.  $L^\dagger$  ist der zu  $L$  formal adjungierte Operator;  $\mathcal{L}^\dagger$  ist der zu  $\mathcal{L}$  adjungierte Operatorbereich, aus dem die Funktionen  $v(x)$  zu entnehmen sind; die Randbedingungen für die Funktionen  $v(x)$  werden als adjungierte Randbedingungen bezeichnet (adjungiert zu den Randbedingungen, welchen die Funktionen  $u(x)$  genügen).

$$\underline{L}^\dagger \quad \text{umfaßt} \quad \begin{cases} L^\dagger & \text{(zu } L \text{ formal adjungierter Operator),} \\ \mathcal{L}^\dagger & \text{(zu } \mathcal{L} \text{ adjungierter Operatorbereich).} \end{cases} \quad (2.6)$$

Für die Matrixelemente von  $\underline{L}$ ,  $\underline{L}^\dagger$  kann aus Gl. (1.96) sofort eine einfache Beziehung angegeben werden. Wegen

$$L(x, x') = \langle x | \underline{L} | x' \rangle, \quad L^\dagger(x, x') = \langle x | \underline{L}^\dagger | x' \rangle, \quad \langle x | \underline{L} | x' \rangle = \langle x' | \underline{L}^\dagger | x \rangle^*$$

gilt

$$L^\dagger(x, x') = \{ L(x', x) \}^*. \quad (2.7)$$

Die Matrix des adjungierten Operators erhält man, indem man die Matrix des Operators adjungiert (d. h. Zeilen und Spalten vertauscht und alle Elemente komplex konjugiert nimmt). Der adjungierte Operator kann aus Gl. (2.5), Gl. (2.6) ermittelt werden.

Man bezeichnet einen Operator als selbstadjungiert oder hermitesch, wenn gilt:

$$\underline{L} = \underline{L}^\dagger, \quad \text{d. h.} \quad \begin{cases} L = L^\dagger, & \text{der Operator ist formal selbstadjungiert,} \\ \mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger, & \text{der Operatorbereich ist selbstadjungiert.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Wie in Abschn. (1.3.2) plausibel gemacht wurde, beschäftigt man sich zweckmäßigerweise nur mit Funktionen, welche homogene RB erfüllen (auch wenn sie dann, wie z. B. die Funktion  $\nu(x)$  am Rand unstetig sind). Die tatsächliche, die inhomogenen RB erfüllende Funktion  $h(x)$  kann immer durch eine Funktion  $\nu(x)$  genähert werden, welche bei Annäherung an die Grenzen aus dem Inneren des Intervalls die richtigen Randwerte annimmt, aber exakt an den Grenzen selbst homogene RB erfüllt.

### 2.2.1 Beispiel 1

Im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  operiert  $L = a(x)d^2/dx^2$  auf Funktionen  $u(x)$ ;  $\mathcal{L}$  sei durch  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 0$  (sowie natürlich quadratintegrierbare Funktionen  $u(x)$ ,  $Lu(x)$ ) definiert. Man ermittle  $\underline{L}^\dagger$ . — Durch zweimalige partielle Integration, Beachtung der RB für  $u(x)$  sowie von Gl. (2.5) folgt:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 v^*(x) Lu(x) dx \\
&= \int_0^1 v^*(x) a(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} dx = \int_0^1 v^*(x) a(x) d \left[ \frac{du(x)}{dx} \right] \\
&= \left. \frac{du}{dx} v^*(x) a(x) \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{d}{dx} [a(x) v^*(x)] dx \\
&= u'(1) v^*(1) a(1) - u(x) \left. \frac{d}{dx} [a(x) v^*(x)] \right|_0^1 + \int_0^1 u(x) \frac{d^2}{dx^2} [a(x) v^*(x)] dx \\
&= \int_0^1 u(x) \left\{ \frac{d^2}{dx^2} [a^*(x) v(x)] \right\}^* dx + u'(1) v^*(1) a(1) - u(1) [a'(1) v^*(1) + a(1) v'^*(1)] \\
&= \int_0^1 u(x) \{ L^\dagger v(x) \}^* dx.
\end{aligned}$$

Aus dieser Beziehung liest man ab:

$$L^\dagger = \frac{d^2}{dx^2} [a^*(x) \dots], \quad \mathcal{L}^\dagger : \quad v(1) = 0, \quad v'(1) = 0. \quad (2.9)$$

Es gilt  $L^\dagger \neq L$ ,  $\mathcal{L}^\dagger \neq \mathcal{L}$ ; somit ist  $\underline{L}$  nicht selbstadjungiert.

Die Matrixelemente  $L(x, x')$  des Operators  $L$  erhält man auf folgende Weise:

$$Lu(x) = \int L(x, x') u(x') dx' = a(x) \frac{d^2 u}{dx^2} = a(x) \int \delta''(x' - x) u(x') dx'.$$

Aus dieser Beziehung liest man ab:

$$L(x, x') = a(x) \delta''(x' - x) = a(x) \frac{d^2}{dx'^2} \delta(x' - x). \quad (2.10)$$

Durch Anwendung von Gl. (2.7) könnte man daraus die Matrixelemente des adjungierten Operators und aus

$$L^\dagger v(x) = \int L^\dagger(x, x') v(x') dx'$$

schließlich wieder  $L^\dagger$  selbst erhalten.

### 2.2.2 Beispiel 2

In  $0 \leq x \leq 1$  sei  $L = b(x)d/dx$  gegeben,  $\mathcal{L}$  durch  $u(0) - 2u(1) = 0$ . Da hier ein Operator erster Ordnung vorliegt, genügt eine einzige RB. Man ermittle  $\underline{L}^\dagger$ . — In Anwendung von Gl. (2.5) erhält man

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 v^*(x)Lu(x)dx &= \int_0^1 v^*(x)b(x)\frac{du}{dx}dx = \int_0^1 b(x)v^*(x)du(x) \\
 &= u(x)b(x)v^*(x)|_0^1 - \int_0^1 u(x)\frac{d}{dx}[b(x)v^*(x)]dx \\
 &= \int_0^1 u(x)\left\{-\frac{d}{dx}[b^*(x)v(x)]\right\}^* dx + u(1)b(1)v^*(1) - u(0)b(0)v^*(0) \\
 &= \int_0^1 u(x)\left\{-\frac{d}{dx}[b^*(x)v(x)]\right\}^* dx + u(1)[b(1)v^*(1) - 2b(0)v^*(0)] \\
 &= \int_0^1 u(x)\{L^\dagger v(x)\}^* dx.
 \end{aligned}$$

Daraus liest man ab:

$$L^\dagger = -\frac{d}{dx}[b^*(x)\dots], \quad \mathcal{L}^\dagger : \quad b(1)v^*(1) - 2b(0)v^*(0) = 0. \quad (2.11)$$

### 2.2.3 Beispiel 3

Aus Gl. (2.9), Gl. (2.11) sieht man, daß der zu  $L$  nach Gl. (2.1) formal adjungierte Operator gegeben ist durch

$$L^\dagger = \frac{d^2}{dx^2}[a^*(x)\dots] - \frac{d}{dx}[b^*(x)\dots] + c^*(x). \quad (2.12)$$

Damit stellt sich heraus, daß der allgemeinste lineare Differentialoperator zweiter Ordnung Gl. (2.1) leider nicht formal selbstadjungiert ist. — Im folgenden wird gezeigt, daß man durch eine geeignete Umformung des linearen Differentialoperators zweiter Ordnung erreichen kann, daß wenigstens alle reellen linearen Differentialoperatoren zweiter Ordnung formal selbstadjungiert sind (das erleichtert das Lösen von Differentialgleichungen erheblich).

## 2.3 Gewichtsfunktionen. Operatoren im erweiterten Sinn.

Der allgemeinste lineare Differentialoperator zweiter Ordnung kann in folgender Form geschrieben werden:

$$L = -\frac{1}{r(x)}\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) = -\frac{p(x)}{r(x)}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{r(x)}\frac{dp(x)}{dx}\frac{d}{dx} + q(x). \quad (2.13)$$

Durch Vergleich mit Gl. (2.1) sieht man, wie  $a$ ,  $b$ ,  $c$  mit  $r$ ,  $p$ ,  $q$  zusammenhängen.

$r(x)$  sei eine reelle, positive Funktion (wenn  $r(x)$  das Vorzeichen wechselt, so muß  $L$  abschnittsweise zwischen zwei Nullstellen von  $r(x)$  so definiert werden, daß  $r(x)$  positiv ist). Es stellt sich als zweckmäßig heraus,  $r(x)$  als Gewichtsfunktion einzuführen, d. h. man definiert anstelle von Gl. (1.98) einen Satz von Basisvektoren, für die gilt

$$\int |x\rangle r(x) dx \langle x| = \underline{L}, \quad \langle x|x'\rangle = \frac{\delta(x-x')}{r(x)} = \frac{\delta(x-x')}{r(x')}. \quad (2.14)$$

Zu Gl. (2.14) ist zu sagen: Operatoren werden nie auf  $r(x)$  angewendet; bezüglich Operatoren verhält sich  $r(x)$  wie eine Konstante ( $r(x)$  ist eben nur bei der Integration über  $dx$  ein „Gewicht“,  $r(x)dx$ ). Demgemäß wird in  $\langle x|x' \rangle$  die Funktion  $r(x)$  geschrieben, falls  $\langle x|x' \rangle$  unter einem Integral steht und über  $x$  integriert wird; es wird  $r(x')$  genommen, falls über  $x'$  integriert wird.

Mit der neuen Beziehung Gl. (2.14) lauten die wichtigsten Relationen von Abschn. (1.4):

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle &= \int |x\rangle r(x) dx \langle x|\varphi\rangle = \int |x\rangle \varphi(x) r(x) dx, \\ \langle \varphi|\psi\rangle &= \langle \psi|\varphi\rangle^* = \langle \varphi|\underline{L}|\psi\rangle = \int \langle \varphi|x\rangle r(x) dx \langle x|\psi\rangle = \int \varphi^*(x) \psi(x) r(x) dx, \\ \langle \varphi|\varphi\rangle &= \int |\varphi(x)|^2 r(x) dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Mit Gl. (2.14) lautet jetzt Gl. (1.94):

$$\begin{aligned} \langle x|\underline{L}|u\rangle &= \langle x|g\rangle = \langle x|\underline{L}\underline{I}|u\rangle \\ &= Lu(x) = g(x) = \int \langle x|\underline{L}|x'\rangle r(x') dx' \langle x'|u\rangle = \int L(x, x') u(x') r(x') dx'. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die Umkehrung des Problems  $\underline{L}|u\rangle = |g\rangle$  lautet somit in Analogie zu Gl. (1.105) und unter sinn-gemäßer Anwendung von Gl. (2.16):

$$\begin{aligned} \underline{G}|g\rangle &= \underline{L}^{-1}|g\rangle = |u\rangle, \\ \langle x|\underline{G}|g\rangle &= \langle x|u\rangle = u(x) = Gg(x) = \int G(x, x_0) g(x_0) r(x_0) dx_0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Die Differentialgleichung für die GF wird damit:

$$\underline{L}\underline{G} = \underline{I} \quad \text{oder} \quad \langle x|\underline{L}\underline{G}|x_0\rangle = \langle x|\underline{L}\underline{I}\underline{G}|x_0\rangle = \langle x|x_0\rangle,$$

d. h.

$$\int \langle x|\underline{L}|x'\rangle r(x') dx' \langle x'|\underline{G}|x_0\rangle = \int L(x, x') G(x', x_0) r(x') dx' = LG(x, x_0) = \frac{\delta(x - x_0)}{r(x)},$$

also

$$LG(x, x_0) = \delta(x - x_0)/r(x). \quad (2.18)$$

Anstelle von Gl. (2.5) erhält man aus Gl. (1.96) mit Gl. (2.14) die Definition des adjungierten Operators:

$$\begin{aligned} \langle v|\underline{L}|u\rangle &= \langle u|\underline{L}^\dagger|v\rangle^*, \\ \langle v|\underline{L}\underline{L}|u\rangle &= \langle u|\underline{L}\underline{L}^\dagger|v\rangle^*, \\ \int \langle v|x\rangle r(x) dx \langle x|\underline{L}|u\rangle &= \left\{ \int \langle u|x\rangle r(x) dx \langle x|\underline{L}^\dagger|v\rangle \right\}^*, \\ \int v^*(x) \{Lu(x)\} r(x) dx &= \int u(x) \{L^\dagger v(x)\}^* r(x) dx. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Der Umkehroperator von  $\underline{L}^\dagger$  werde mit  $\underline{G}^\dagger$  bezeichnet; daß das zutrifft, folgt durch Adjungieren der Gleichung  $\underline{G}\underline{L} = \underline{L}\underline{G} = \underline{I}$ , also  $\underline{L}^\dagger \underline{G}^\dagger = \underline{G}^\dagger \underline{L}^\dagger = \underline{I}$ . Analog Gl. (2.18) folgt:

$$\underline{L}^\dagger \underline{G}^\dagger = \underline{I} \quad \text{oder} \quad \langle x|\underline{L}^\dagger \underline{G}^\dagger|x_0\rangle = \langle x|\underline{L}^\dagger \underline{I}\underline{G}^\dagger|x_0\rangle = \langle x|x_0\rangle,$$

d. h.

$$\int \langle x|\underline{L}^\dagger|x'\rangle r(x') dx' \langle x'|\underline{G}^\dagger|x_0\rangle = \int L^\dagger(x, x') G^\dagger(x', x_0) r(x') dx' = \delta(x - x_0)/r(x),$$

also

$$L^\dagger G^\dagger(x, x_0) = \delta(x - x_0)/r(x). \quad (2.20)$$

Wenn die Funktion  $G(x, x_0)$  aus dem Operatorbereich  $\mathcal{L}$  zu nehmen ist, so ist dementsprechend die Funktion  $G^\dagger(x, x_0)$  aus  $\mathcal{L}^\dagger$  zu nehmen (sie erfüllt die sogenannten adjungierten Randbedingungen). Wegen Gl. (2.7) gilt für die Matrixelemente

$$G^\dagger(x', x) = \{G(x, x')\}^*. \quad (2.21)$$

Mittels Gl. (2.19) wird zu  $L$  in der Form Gl. (2.13) der adjungierte Operator berechnet. Der zu  $q$  adjungierte Anteil ist  $q^*$ , weil offenbar

$$\int v^*(x)\{q(x)u(x)\}r(x)dx = \int u(x)\{q^*(x)v(x)\}^*r(x)dx. \quad (2.22)$$

Für den ersten Anteil von Gl. (2.13) gilt z. B. im Bereich  $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 v^*\{Lu\}r dx \\ &= - \int_0^1 v^* \frac{1}{r} \frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) r dx = - \int_0^1 v^* d \left( p \frac{du}{dx} \right) = - v^* p \frac{du}{dx} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{dv^*}{dx} p \frac{du}{dx} dx \\ &= \int_0^1 p \frac{dv^*}{dx} du - v^* p \frac{du}{dx} \Big|_0^1 = p \frac{dv^*}{dx} u \Big|_0^1 - \int_0^1 u \frac{d}{dx} \left( p \frac{dv^*}{dx} \right) dx - v^* p \frac{du}{dx} \Big|_0^1 \\ &= \int_0^1 u \left\{ -\frac{1}{r} \frac{d}{dx} \left( p^* \frac{dv^*}{dx} \right) \right\}^* r dx + p \left( u \frac{dv^*}{dx} - v^* \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^1 \\ &= \int_0^1 u \{L^\dagger v\}^* r dx + K[v^*(x), u(x)]_0^1 \\ &= \int_0^1 u \{L^\dagger v\}^* r dx + \int_0^1 \frac{d}{dx} K(v^*, u) dx. \end{aligned} \quad (2.23)$$

$K(v^*, u)$  wird als Konjunkt oder bilineare Kovariante der Funktionen  $v^*$ ,  $u$  bezeichnet:

$$K(v^*, u) = K(\langle v|x\rangle, \langle x|u\rangle) = -p(x) \left[ v^* \frac{du}{dx} - u \frac{dv^*}{dx} \right]. \quad (2.24)$$

Für den adjungierten Operator (siehe Gl. (2.5)) muß der letzte Term in Gl. (2.23) verschwinden; für den adjungierten Operator erhält man somit aus Gl. (2.23):

$$\langle v|\underline{L}|u\rangle = \langle u|\underline{L}^\dagger|v\rangle^* + \int_0^1 \frac{d}{dx} K(v^*, u) dx \quad \text{mit} \quad \int_0^1 \frac{dK(v^*, u)}{dx} dx = 0. \quad (2.25)$$

Der zu

$$\underline{L} \begin{cases} L = -\frac{1}{r} \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) + q, & r \text{ reell,} \\ u(x) & \text{aus dem Operatorbereich } \mathcal{L} \text{ (oft mit homogenen RB)} \end{cases} \quad (2.26)$$

adjungierte Operator  $\underline{L}^\dagger$  ist daher

$$\underline{L}^\dagger \begin{cases} L^\dagger = -\frac{1}{r} \frac{d}{dx} \left( p^* \frac{d}{dx} \right) + q^*, & r \text{ reell,} \\ v(x) & \text{aus } \mathcal{L}^\dagger, \text{ definiert durch } K(v^*, u)|_0^1 = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Wie man sieht, kann man Gl. (2.23) auch durch Integration der nachstehenden Beziehung (bei der Integration muß das „verzerrte“ Volumenelement  $r(x)dx$  verwendet werden) erhalten:

$$v^*(x)\{Lu(x)\} = u(x)\{L^\dagger v(x)\}^* + \frac{1}{r(x)}\frac{d}{dx}K(v^*, u). \quad (2.28)$$

Daraus entnimmt man für das Konjunkt:

1.  $K(v^*, u)$  ist eine Konstante, wenn  $u, v$  Lösungen von  $Lu(x) = 0, L^\dagger v(x) = 0$  sind.
2. Ist  $L = L^\dagger$  (formal selbstadjungierter Operator), so ist  $K(v^*, u)$  eine Konstante, wenn  $u, v$  Lösungen von  $Lu(x) = 0, Lv(x) = 0$  sind.
3. Ist  $L = L^\dagger$ , so ist für linear abhängige reelle Lösungen von  $Lu = 0, Lv = 0$  (d. h.  $u = \text{const} \cdot v$ ) das Konjunkt  $K = 0$ ; das sieht man durch Einsetzen in Gl. (2.24).

### 2.3.1 Operatoren im erweiterten Sinn

Eine wichtige Konsequenz von Gl. (2.25) und der Herleitung dieser Beziehung ist folgende: Es seien zwei Operatoren  $\underline{L}_I, \underline{L}$  definiert, die sich nur bezüglich ihres Operatorbereiches (bezüglich der RB für die Funktionen, auf die sie operieren) voneinander unterscheiden; dann gilt:

$$\begin{array}{lll} \underline{L}_I, & \text{gegeben durch } L, \mathcal{L}_I; & L \text{ operiert auf } w(x) \text{ aus } \mathcal{L}_I; \\ \underline{L}, & \text{gegeben durch } L, \mathcal{L}; & L \text{ operiert auf } u(x) \text{ aus } \mathcal{L}; \\ \underline{L}^\dagger, & \text{gegeben durch } L^\dagger, \mathcal{L}^\dagger; & L^\dagger \text{ operiert auf } v(x) \text{ aus } \mathcal{L}^\dagger. \end{array}$$

Wegen Gl. (2.25) gilt

$$\langle v|\underline{L}|u\rangle = \langle u|\underline{L}^\dagger|v\rangle^* + K(v^*, u)|_0^1, \quad K(v^*, u)|_0^1 = 0. \quad (2.29)$$

$$\langle v|\underline{L}_I|w\rangle = \langle w|\underline{L}^\dagger|v\rangle^* + K(v^*, w)|_0^1, \quad K(v^*, w)|_0^1 \neq 0. \quad (2.30)$$

Weil die Funktionen  $v(x), w(x)$  nicht aus adjungierten Bereichen stammen, ist

$$K(v^*, w)|_0^1 \neq 0.$$

Das Konjunkt in Gl. (2.30) enthält Randwerte von  $v$  und  $w$ ; transferiert man das Konjunkt mittels symbolischer Funktionen unter das Integral auf der linken Seite der Gleichung, so läßt sich ein Operator  $\underline{L}_e$  definieren:

$$\langle v|\underline{L}_e|w\rangle = \langle w|\underline{L}^\dagger|v\rangle^* = \langle v|\underline{L}_I|w\rangle - K(v^*, w)|_0^1. \quad (2.31)$$

Ähnlich wie in Abb. (1.1) berücksichtigt also der Operator  $\underline{L}_e$  die im Konjunkt enthaltenen inhomogenen Randwerte von Funktionen und deren Ableitungen durch Distributionen am Rand innerhalb des Intervalls, setzt aber am Rand selbst im Effekt homogene Randwerte. Daher kann die für homogene Randwerte definierte Greensche Funktion verwendet werden, es gilt

$$\underline{L}_e \underline{G} = \underline{I} = \underline{G} \underline{L}_e. \quad (2.32)$$

Man kann die Wirkung von  $\underline{L}_I$  auf  $|w\rangle$  als die Summe der Wirkungen von  $\underline{L}_e$  und von einem Störoperator  $\underline{L}_1$  auffassen,

$$\underline{L}_I = \underline{L}_e + \underline{L}_1. \quad (2.33)$$

Aus Gl. (2.31), Gl. (2.33) erhält man Beziehungen für den Operator im erweiterten Sinn  $\underline{L}_e$  und für den Störoperator  $\underline{L}_1$  (zur Abkürzung wird noch die Bezeichnung  $\underline{L}_1|w\rangle = -|s\rangle$  benutzt):

$$\begin{aligned} \langle v|\underline{L}_e|w\rangle &= \langle v|\underline{L}_I|w\rangle - K(v^*, w)|_0^1, \\ \langle v|\underline{L}_e|w\rangle &= \langle v|\underline{L}_I|w\rangle - \langle v|\underline{L}_1|w\rangle \\ &= \langle v|\underline{L}_I|w\rangle + \langle v|s\rangle, \\ \langle v|\underline{L}_1|w\rangle &= -\langle v|s\rangle = K((v|x), \langle x|w\rangle)|_0^1. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Es stellt sich heraus, daß  $L_1 w(x) = \langle x|\underline{L}_1|w\rangle = -s(x)$  eine symbolische Funktion ist. Bei Integrieren, unter denen symbolische Funktionen mit Singularitäten an den Integrationsgrenzen stehen, hat man als Integrationsgrenzen die Werte  $x_1 = 0-, x_2 = 1+$  zu wählen.

### 2.3.2 Formal selbstadjungierte Operatoren

Für  $r(x)$ ,  $p(x)$ ,  $q(x)$  reell sind die in Gl. (2.26), Gl. (2.27) definierten Operatoren  $L$ ,  $L^\dagger$  reell, und außerdem gilt  $L = L^\dagger$ , d. h. , diese Operatoren sind formal selbstadjungiert (das impliziert nicht  $\underline{L} = \underline{L}^\dagger$ , weil die Funktionen  $u(x)$  einem Operatorbereich  $\mathcal{L}$ , die Funktionen  $v(x)$  dagegen einem Operatorbereich  $\mathcal{L}^\dagger$  entstammen, für die im allgemeinen  $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}^\dagger$  gilt, selbst dann, wenn  $L = L^\dagger$  erfüllt ist).

Als Bereich  $\mathcal{L}$  wählt man immer Funktionen  $u(x)$ , welche homogene Randbedingungen erfüllen. Den adjungierten Operatorbereich  $\mathcal{L}^\dagger$ , dem die Funktionen  $v(x)$  zu entnehmen sind, berechnet man aus der Forderung

$$K(v^*, u)|_0^1 = -p \left( v^* \frac{du}{dx} - u \frac{dv^*}{dx} \right) \Big|_0^1 = -p \left\| \begin{array}{c} v^* \frac{dv^*}{dx} \\ u \frac{du}{dx} \end{array} \right\|_0^1 = 0. \quad (2.35)$$

Die Determinante heißt Wronskische Determinante; sie verschwindet, wenn die Funktionen  $u(x)$ ,  $v^*(x)$  linear abhängig sind.

Aus Gl. (2.35) rechnet man nach, daß für folgende homogene Randbedingungen  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$  gilt (sogenannte selbstadjungierte Randbedingungen, d. h. , die Funktionen  $u(x)$ ,  $v(x)$  erfüllen identische homogene Randbedingungen; da  $L = L^\dagger$  vorausgesetzt wurde, ist in diesem Fall, daß  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$  gilt, der abstrakte Operator  $\underline{L}$  ein selbstadjungierter Operator:  $\underline{L} = \underline{L}^\dagger$ ):

1. Homogene RB 1. Art:  $u(0) = u(1) = 0$ .
2. Homogene RB 2. Art:  $u'(0) = u'(1) = 0$ .
3. Homogene RB 3. Art:  $u(0) + c_1 u'(0) = 0$ ,  $u(1) + c_2 u'(1) = 0$ . Die Koeffizienten  $c_1$ ,  $c_2$  sind reell.
4. Periodische RB mit der Einschränkung  $p(0) = p(1)$ :  $u(0) = u(1)$ ,  $u'(0) = u'(1)$ .

Man beachte, daß homogene Anfangsbedingungen nicht selbstadjungiert sind: Ist der Operatorbereich  $\mathcal{L}$  durch die RB  $u(0) = u'(0) = 0$  definiert, so erhält man für den adjungierten Operatorbereich  $\mathcal{L}^\dagger$  die Bedingungen  $v(1) = v'(1) = 0$ .

## 2.4 Inhomogene Probleme mit inhomogenen Randbedingungen

Gegeben sei ein Operator  $\underline{L}_I$  durch den formalen Operator  $L$ , der auf Funktionen  $w(x)$  aus dem Operatorbereich  $\mathcal{L}_I$  operiert; der Operatorbereich ist durch inhomogene Randbedingungen für  $w(x)$  festgelegt. Das zu lösende Problem sei:

$$\underline{L}_I|w\rangle = |g\rangle, \quad \text{d. h.} \quad Lw(x) = g(x) \quad \text{mit } w(x) \text{ aus } \mathcal{L}_I. \quad (2.36)$$

Bekannt sei die Greensche Funktion für dasselbe inhomogene Problem für Randbedingungen derselben Struktur, die aber diesmal homogen statt inhomogen gewählt seien. Dieses Problem läßt sich durch einen abstrakten Operator  $\underline{L}$  erfassen, der durch denselben formalen Operator  $L$  gegeben ist: Dieser operiert aber nun auf Funktionen  $u(x)$  aus dem (homogenen) Bereich  $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}_I$ . Zu diesem Operator sei auch der adjungierte Operator  $\underline{L}^\dagger$  (durch  $L^\dagger$ ,  $\mathcal{L}^\dagger$  definiert) ermittelt worden. Es ist also bekannt:

$$\begin{aligned} \underline{L}|u\rangle &= |g\rangle, \quad \text{d. h.} \quad Lu(x) = g(x) \quad \text{mit } u(x) \text{ aus } \mathcal{L}, \\ \underline{G}\underline{L} &= \underline{L}\underline{G} = \underline{L}^\dagger \underline{G}^\dagger = \underline{G}^\dagger \underline{L}^\dagger = \underline{I}, \\ \underline{L}\underline{G}(x, x_0) &= \delta(x - x_0)/r(x) \quad \text{mit } G(x, x_0) \text{ aus } \mathcal{L} \text{ bezüglich } x, \\ \underline{L}^\dagger \underline{G}^\dagger(x, x_0) &= \delta(x - x_0)/r(x) \quad \text{mit } G^\dagger(x, x_0) \text{ aus } \mathcal{L}^\dagger \text{ bezüglich } x, \end{aligned} \quad (2.37)$$

Die Lösung des inhomogenen Problems zu homogenen Randbedingungen lautet (dabei wurde nach Gl. (2.21) berücksichtigt, daß  $G^\dagger(x', x) = \{G(x, x')\}^*$  gilt):

$$\begin{aligned} |u\rangle &= \underline{G}|g\rangle, \quad \text{d. h.} \\ u(x) &= \int_0^1 G(x, x_0)g(x_0)r(x_0)dx_0 = \int_0^1 [G^\dagger(x_0, x)]^* g(x_0)r(x_0)dx_0. \end{aligned}$$

Setzt man in Gl. (2.36) für den Operator  $\underline{L}_I$  den Ansatz Gl. (2.33) ein und verwendet den Umstand (siehe Gl. (2.32)), daß  $\underline{G}$  der Umkehroperator des Operators  $\underline{L}_e$  ist, so kann man das Problem wie folgt formulieren:

$$\underline{L}_I|w\rangle = |g\rangle = \underline{L}_e|w\rangle + \underline{L}_1|w\rangle. \quad (2.38)$$

Die formale Lösung erhält man durch Auflösen nach  $\underline{L}_e|w\rangle$  und Anwenden des Umkehroperators  $\underline{G}$  von links ( $\underline{G}\underline{L}_e = \underline{I}$ ):

$$|w\rangle = \underline{G}|g\rangle - \underline{G}\underline{L}_1|w\rangle. \quad (2.39)$$

Das ist tatsächlich die Lösung des inhomogenen Problems zu inhomogenen Randbedingungen, weil  $\underline{L}_1|w\rangle$  (siehe Gl. (2.34)) nur Randwerte der Lösungsfunktion  $w(x)$  enthält, deren Kenntnis vorausgesetzt ist. Die Lösungsfunktion  $w(x)$  erhält man, indem man die Bracket  $\langle x|w\rangle$  berechnet:

$$w(x) = \langle x|w\rangle = \langle x|\underline{G}|g\rangle - \langle x|\underline{G}\underline{L}_1|w\rangle. \quad (2.40)$$

Die Bedeutung der Klammer  $\langle x|\underline{G}\underline{L}_1|w\rangle$  folgt unmittelbar aus Gl. (2.34), indem man statt  $\langle v|$  den Bra  $\langle x|\underline{G}$  einsetzt und im Konjunkt anstelle der Variablen  $x$  (die bereits in  $\langle x|\underline{G}$  verwendet wurde) eine andere Variable  $x_0$  setzt:

$$\begin{aligned} -\langle x|\underline{G}\underline{L}_1|w\rangle &= -K (\langle x|\underline{G}|x_0\rangle, \langle x_0|w\rangle)|_{x_0=0}^{x_0=1} \\ &= -K [G(x, x_0), w(x_0)]|_{x_0=0}^{x_0=1}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Differentiationen im Konjunkt erfolgen nach der Variablen  $x_0$ . Damit ergibt sich die Lösung des inhomogenen Problems zu inhomogenen Randbedingungen aus Gl. (2.40) unter Beachtung von Gl. (2.41) und Gl. (2.17)

$$w(x) = \int_0^1 G(x, x_0)g(x_0)r(x_0)dx_0 - K [G(x, x_0), w(x_0)]|_{x_0=0}^{x_0=1}. \quad (2.42)$$

Statt der Greenschen Funktion  $G(x, x_0)$  kann auch  $[G^\dagger(x_0, x)]^*$  eingesetzt werden. Die Lösung besteht aus der Superposition von zwei Teilen: Der erste Anteil ist die Lösung des inhomogenen Problems zu homogenen Randbedingungen, der zweite Anteil löst das homogene Problem zu inhomogenen Randbedingungen; beide Anteile benötigen nur die Greensche Funktion zu homogenen Randbedingungen.

Sonderfall: Es kann sein, daß das inhomogene Problem zu homogenen Randbedingungen keine Lösung hat.  $\underline{L}|u\rangle = |g\rangle$  mit  $u(x)$  aus  $\mathcal{L}$  ist im allgemeinen nicht lösbar, wenn das Problem  $\underline{L}^\dagger|v\rangle = 0$  eine nichttriviale Lösung  $v(x)$  aus  $\mathcal{L}^\dagger$  besitzt. Aus  $\underline{L}|u\rangle = |g\rangle$  folgt dann nämlich

$$\langle v|\underline{L}|u\rangle = \langle v|g\rangle = \langle u|\underline{L}^\dagger|v\rangle^* = 0. \quad (2.43)$$

Eine Lösung existiert also nur dann, wenn „zufällig“  $\langle v|g\rangle$  ebenfalls verschwindet (Orthogonalität von  $|g\rangle$  und  $|v\rangle$ ).

### 2.4.1 Beispiel

Man löse

$$-\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad w(0) = w_0, \quad w(1) = w_1. \quad (2.44)$$

Es ist:

$$\begin{aligned} \underline{L}_I: & \quad L = -d^2/dx^2, \quad \mathcal{L}_I: \quad w(0) = w_0, \quad w(1) = w_1, \\ \underline{L}: & \quad L = -d^2/dx^2, \quad \mathcal{L}: \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \\ \underline{L}^\dagger: & \quad L^\dagger = L = -d^2/dx^2, \quad \mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}: \quad v(0) = 0, \quad v(1) = 0. \end{aligned}$$

Die Gewichtsfunktion ist  $r = 1$ . Zum Anschreiben der Lösung Gl. (2.42) braucht man  $G(x, x_0)$  oder  $G^\dagger(x, x_0)$ . Aus Gl. (2.37) folgt

$$-\frac{d^2 G(x, x_0)}{dx^2} = \delta(x - x_0), \quad G(0, x_0) = 0, \quad G(1, x_0) = 0. \quad (2.45)$$

Gl. (2.45) wurde schon früher gelöst; nach Gl. (1.66) war die Lösung

$$G(x, x_0) = \begin{cases} x_0(1-x) & 0 \leq x_0 < x, \\ x(1-x_0) & x < x_0 \leq 1. \end{cases} \quad (2.46)$$

Unter Bezug auf Gl. (2.24) erhält man ( $p(x) = 1$ )

$$\begin{aligned} K [G(x, x_0), w(x_0)] \Big|_{x_0=0}^{x_0=1} &= \\ &= - \left[ G(x, 1)w'(1) - w(1) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x_0} \Big|_{x_0=1} \right] + \left[ G(x, 0)w'(0) - w(0) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x_0} \Big|_{x_0=0} \right] \\ &= w_1 \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x_0} \Big|_{x_0=1} - w_0 \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x_0} \Big|_{x_0=0} \\ &= w_1 \frac{\partial}{\partial x_0} [x(1-x_0)] \Big|_{x_0=1} - w_0 \frac{\partial}{\partial x_0} [x_0(1-x)] \Big|_{x_0=0} \\ &= -w_1 x - w_0(1-x). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Damit ist die Lösung in der Form von Gl. (2.42):

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_0^1 G(x, x_0)g(x_0)dx_0 + w_0(1-x) + w_1x \\ &= \int_0^x x_0(1-x)g(x_0)dx_0 + \int_x^1 x(1-x_0)g(x_0)dx_0 + w_0(1-x) + w_1x. \end{aligned} \quad (2.48)$$

## 2.5 Berechnung der Greenschen Funktion

Es wurde gezeigt, daß nur Greensche Funktionen benötigt werden, welche homogene RB erfüllen. Zu lösen sind daher Gleichungen der Form

$$LG(x, x_0) = \frac{\delta(x - x_0)}{r(x)} = -\frac{1}{r(x)} \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dG(x, x_0)}{dx} \right] + q(x)G(x, x_0). \quad (2.49)$$

$G(x, x_0)$  ist aus  $\mathcal{L}$  zu nehmen (charakterisiert durch homogene Randbedingungen).  $G(x, x_0)$  ist eine stetige Funktion (das folgt durch zweimalige Integration über  $\delta(x - x_0)$ ), hat aber bei  $x = x_0$

einen Sprung in der ersten Ableitung.  $q(x)$  soll keine  $\delta$ -Anteile enthalten. Aus Gl. (2.49) folgt für den Sprung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -p(x) \frac{dG(x, x_0)}{dx} \Big|_{x=x_0-\varepsilon}^{x=x_0+\varepsilon} \right\} = 1. \quad (2.50)$$

$G(x, x_0)$  ist außer bei  $x = x_0$  eine Lösung der homogenen Gleichung  $LG = 0$ .

### 2.5.1 $G(x, x_0)$ für ungemischte Randbedingungen

Man sucht zwei Funktionen  $h_1(x)$ ,  $h_2(x)$  mit folgenden Eigenschaften:

- $h_1(x)$  ist irgendeine Lösung von  $LG = 0$ , welche die homogene RB bei  $x = 0$  erfüllt.
- $h_2(x)$  ist irgendeine Lösung von  $LG = 0$ , welche die homogene RB bei  $x = 1$  erfüllt.

Dann ist

$$F(x, x_0) = \begin{cases} h_1(x)h_2(x_0) & 0 \leq x < x_0, \\ h_1(x_0)h_2(x) & x_0 < x \leq 1, \end{cases} \quad (2.51)$$

eine stetige Funktion, welche außer bei  $x = x_0$  die Gleichung  $LF(x, x_0) = 0$  erfüllt, und außerdem die zu  $\mathcal{L}$  gehörenden homogenen RB erfüllt. Der Sprung der ersten Ableitung ist ( $p$  sei stetig)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -p \frac{dF}{dx} \Big|_{x=x_0+\varepsilon} + p \frac{dF}{dx} \Big|_{x=x_0-\varepsilon} \right\} = -p(x_0)[h_1(x_0)h_2'(x_0) - h_2(x_0)h_1'(x_0)] = K(h_1, h_2)|_{x=x_0}.$$

$K(h_1, h_2)$  ist eine Konstante, falls der Operator formal selbstadjungiert ist ( $L = L^\dagger$ : formale Selbstadjungiertheit genügt, d. h.  $r, p, q$  reell), weil dann  $h_1, h_2$  Lösungen von  $Lh = 0$  sind (siehe Bemerkung nach Gl. (2.28)). Wegen Gl. (2.50) muß aber der Sprung 1 sein; daher ist

$$G(x, x_0) = \frac{h_1(x)h_2(x_0)H(x_0 - x) + h_1(x_0)h_2(x)H(x - x_0)}{K(h_1, h_2)|_{x=x_0}}, \quad 0 \leq x_0 \leq 1. \quad (2.52)$$

### Beispiel

Man löse

$$-\frac{d^2G(x, x_0)}{dx^2} = \delta(x - x_0), \quad G(0, x_0) = 0, \quad G(1, x_0) = 0.$$

Geeignete Lösungen von  $-d^2h/dx^2 = 0$  sowie die GF lauten:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= x & K(h_1, h_2) &= (1-x) - x(-1) = 1. \\ h_2(x) &= 1-x \end{aligned}$$

$$G(x, x_0) = x(1-x_0)H(x_0 - x) + x_0(1-x)H(x - x_0) \quad 0 \leq x_0 \leq 1. \quad (2.53)$$

### 2.5.2 $G(x, x_0)$ für gemischte Randbedingungen

In diesem Fall kann man nicht sofort Lösungen von  $Lh = 0$  angeben, welche die RB erfüllen. Sind aber  $h_1, h_2$  irgendwelche linear unabhängige Lösungen von  $Lh = 0$ , so kann man ansetzen

$$G(x, x_0) = c_1h_1(x) + c_2h_2(x) + \frac{h_1(x)h_2(x_0)H(x_0 - x) + h_1(x_0)h_2(x)H(x - x_0)}{K(h_1, h_2)|_{x=x_0}} \quad 0 \leq x_0 \leq 1. \quad (2.54)$$

$c_1, c_2$  sind aus den homogenen RB zu ermitteln, die  $G$  erfüllen muß (sollte bei der Berechnung von  $c_1, c_2$  die Koeffizientendeterminante null werden, so muß man andere Lösungen  $h_1, h_2$  nehmen).

## Beispiel

$$-\frac{d^2 G(x, x_0)}{dx^2} = \delta(x - x_0), \quad G(0, x_0) = 0, \quad G'(0, x_0) = 0$$

ist zu lösen. Man nimmt zwei linear unabhängige Lösungen von  $Lh = 0$ , z. B.

$$\begin{aligned} h_1(x) &= 1 \\ h_2(x) &= x \end{aligned} \quad K(h_1, h_2)|_{x=x_0} = -1$$

und erhält

$$G(x, x_0) = c_1 + c_2 x - x_0 H(x_0 - x) - x H(x - x_0) = \begin{cases} c_1 + c_2 x - x_0 & 0 \leq x < x_0, \\ c_1 + c_2 x - x & x_0 < x \leq 1. \end{cases} \quad (2.55)$$

Nun werden die homogenen Randbedingungen verwendet:

$$\left. \begin{aligned} G(0, x_0) = 0 &= c_1 - x_0, \\ G'(0, x_0) = 0 &= c_2, \end{aligned} \right\} \text{ d. h. } c_1 = x_0, \quad c_2 = 0.$$

Damit lautet das Ergebnis

$$G(x, x_0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < x_0 \\ x_0 - x & x_0 < x \leq 1 \end{cases} = (x_0 - x)H(x - x_0), \quad 0 \leq x_0 \leq 1. \quad (2.56)$$

Eine GF, die in einem der beiden Teilbereiche verschwindet, nennt man eine kausale Greensche Funktion, und zwar aus folgendem Grund:  $dw(x) = G(x, x_0)g(x_0)r(x_0)dx_0$  ist der Beitrag einer „Ursache“  $g(x_0)$  an der Stelle  $x_0$  zur „Wirkung“  $w(x)$  an der Stelle  $x$ : Die RB sind im gegebenen Fall offenbar so, daß Ursachen bei  $x_0$  nur Wirkungen bei  $x > x_0$  hervorrufen können (ist  $x$  die Zeitvariable, so ist die Bezeichnung „kausal“ unmittelbar einsichtig).

### 2.5.3 Die Berechnung von $G(x, x_0)$ mittels Fouriertransformation

Diese Methode ist besonders dann vorteilhaft, wenn das Problem vermuten läßt, daß es sich um eine kausale GF handeln wird.

## Beispiel

Löse

$$-\frac{d^2 G(x, x_0)}{dx^2} = \delta(x - x_0), \quad G(0, x_0) = 0, \quad G'(0, x_0) = 0. \quad (2.57)$$

Wegen Gl. (1.12), Gl. (1.23) erhält man für die Fourier-Transformierte  $G_F(f, x_0)$  und deren Rücktransformation  $G(x, x_0)$ :

$$\begin{aligned} 4\pi^2 f^2 G_F(f, x_0) &= e^{-2\pi j f x_0}, \\ G_F(f, x_0) &= \frac{\exp(-2\pi j f x_0)}{4\pi^2 f^2}, \\ G(x, x_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[2\pi j f(x-x_0)]}{4\pi^2 f^2} df. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Diese naiv ermittelte Lösung ist sinnlos: Nach Gl. (1.33) und Gl. (1.34) kann man nach  $G_F$  nicht auflösen, ohne eine Vorschrift anzugeben, wie an der Stelle  $f = 0$  zu verfahren ist. Wenn man dennoch so vorgeht, erhält man ein uneigentliches Integral, welches sinnlos ist. Im Vertrauen auf die Existenz einer sinnvollen Lösung von Gl. (2.57) kann man versuchen, das uneigentliche Integral Gl. (2.58) durch geeignete Interpretation des Integrationsweges zu regularisieren, d. h. zu einem

eigentlichen Integral zu machen (wie man ohne Probieren eine Lösung findet, wird im nächsten Abschnitt gezeigt). Der Integrand zeigt in der Umgebung von  $f = 0$  folgendes Verhalten:

$$\frac{\exp[2\pi j f(x - x_0)]}{4\pi^2 f^2} = \frac{1}{4\pi^2 f^2} + \frac{j(x - x_0)}{2\pi f} - \frac{(x - x_0)^2}{2} + \dots \quad (2.59)$$

Abb. (2.1) zeigt in einer komplexen  $f$ -Ebene den gewählten Integrationsweg  $C$  (die „richtige“ Wahl, das heißt jene, die zu einer Funktion  $G(x, x_0)$  führt, welche die Randbedingungen erfüllt, wird sich nachträglich bestätigen). Der Integrand hat bei  $f = 0$  einen Pol 2. Ordnung und einen Pol

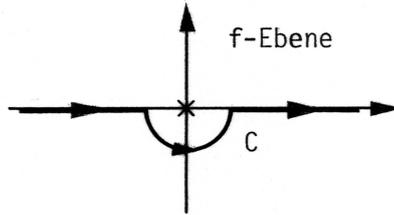


Abbildung 2.1: Zur gewünschten kausalen Greenschen Funktion führender Integrationsweg  $C$  für das Integral Gl. (2.58) in der komplexen  $f$ -Ebene

1. Ordnung mit dem Residuum  $j(x - x_0)/(2\pi)$ . Der Integrationsweg ist so zu legen, daß  $G(x, x_0)$  die richtigen RB erfüllt: Man kann Gl. (2.58) als Hauptwertintegral, als Integral oberhalb des Pols oder unterhalb des Pols interpretieren. Zum Ziel führt die Interpretation

$$G(x, x_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_C \frac{e^{2\pi j f(x-x_0)}}{f^2} df. \quad (2.60)$$

Beweis der Behauptung: Für  $x - x_0 < 0$  kann man durch Schließen des Integrationsweges über die untere Halbebene sofort angeben, daß das Umlaufintegral verschwindet (es wird ja kein Pol 1. Ordnung umschlossen). Da das Integral über den unendlich großen Halbkreis in der unteren Halbebene verschwindet (für  $\Im(f) < 0$ ,  $x - x_0 < 0$ ,  $|f| \rightarrow \infty$  verschwindet der Integrand wie  $\exp(-|f|)/|f|^2$ ), verschwindet auch das Integral über die in Abb. (2.1) gezeigte Kurve  $C$ . Daher ist

$$G(x, x_0) = 0 \quad \text{für} \quad x - x_0 < 0, \quad (2.61)$$

und erfüllt somit die RB  $G(0, x_0) = 0$ ,  $G'(0, x_0) = 0$ . Für  $x - x_0 > 0$  kann man Gl. (2.60) berechnen, indem man den Integrationsweg über die obere Halbebene schließt, da für  $x - x_0 > 0$ ,  $\Im(f) > 0$  der Integrand in der oberen Halbebene wie  $\exp(-|f|)/|f|^2$  verschwindet. Dann ist

$$\oint = 2\pi j \sum \text{Residuen} = 2\pi j \frac{j(x - x_0)}{2\pi} = x_0 - x = G(x, x_0), \quad x - x_0 > 0. \quad (2.62)$$

Damit ist  $G$  gefunden. Das Ergebnis wurde schon in Gl. (2.56) berechnet.

## 2.5.4 $G(x, x_0)$ für Differentialgleichungen erster Ordnung

Das Verfahren mit der GF läßt sich sinngemäß auf lineare Differentialgleichungen anderer als 2. Ordnung übertragen. Dies wird anhand eines speziellen Falls einer Differentialgleichung 1. Ordnung diskutiert.

Zu lösen sei (es kann natürlich bloß eine einzige RB gestellt werden)

$$Lw(x) = \frac{dw}{dx} + jk_0 w = 0, \quad w(x_1) = w_1 \neq 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2. \quad (2.63)$$

Die Lösung ist nach Gl. (2.42)

$$w(x) = -K[G(x, x_0), w(x_0)]|_{x_0=x_1}^{x_0=x_2}. \quad (2.64)$$

Die GF genügt der Differentialgleichung

$$\frac{dG(x, x_0)}{dx} + jk_0 G(x, x_0) = \delta(x - x_0), \quad G(x_1, x_0) = 0. \quad (2.65)$$

Die homogene Gleichung Gl. (2.65) hat Lösungen  $\exp(-jk_0 x)$ , die RB bei  $x_1$  ist daher nur für eine multiplikative Konstante zu erfüllen, die für  $x_1 \leq x < x_0$  den Wert Null hat:

$$G(x, x_0) = \begin{cases} 0 & x_1 \leq x < x_0, \\ c \exp(-jk_0 x) & x_0 < x \leq x_2. \end{cases} \quad (2.66)$$

Man sieht, daß nun die GF selbst unstetig ist. Die Größe des Sprunges erhält man, indem man Gl. (2.65) über eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$  integriert.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{G(x, x_0)|_{x=x_0+\varepsilon} - G(x, x_0)|_{x=x_0-\varepsilon}\} = 1 = c e^{-jk_0 x_0}. \quad (2.67)$$

Daher ist die GF:

$$G(x, x_0) = \begin{cases} 0 & x_1 \leq x < x_0, \\ \exp[-jk_0(x - x_0)] & x_0 < x \leq x_2. \end{cases} \quad (2.68)$$

Für das Konjunkt kann jetzt nicht Gl. (2.24) verwendet werden. Man geht auf die allgemeine Definition Gl. (2.25) mit  $r = 1$  zurück:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} v^* L u dx &= \int_{x_1}^{x_2} v^* \left( \frac{d}{dx} + jk_0 \right) u dx = \int_{x_1}^{x_2} v^* du + \int_{x_1}^{x_2} jk_0 v^* u dx \\ &= v^* u|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} u \frac{dv^*}{dx} dx + \int_{x_1}^{x_2} jk_0 v^* u dx = \int_{x_1}^{x_2} u \left\{ \left( -\frac{d}{dx} - jk_0 \right) v \right\}^* dx + v^* u|_{x_1}^{x_2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} u \{L^\dagger v\}^* dx + K(v^*, u)|_{x_1}^{x_2}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Daraus kann man  $L^\dagger$  ablesen, ferner den zu  $\mathcal{L}$  (gegeben durch  $u(x_1) = 0$ ) adjungierten Operatorbereich  $\mathcal{L}^\dagger$  (gegeben durch  $v(x_2) = 0$ ). Es ist

$$L^\dagger = -\frac{d}{dx} - jk_0, \quad K(v^*, u) = v^* u. \quad (2.70)$$

Damit wird die gesuchte Lösung Gl. (2.64):

$$\begin{aligned} w(x) &= -G(x, x_0)w(x_0)|_{x_0=x_1}^{x_0=x_2} = -G(x, x_2)w(x_2) + G(x, x_1)w(x_1) \\ &= G(x, x_1)w(x_1) = w_1 e^{-jk_0(x-x_1)}, \quad x > x_1. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Bei einer in positive  $x$ -Richtung laufenden Welle (eine solche beschreibt für die in der Elektrotechnik gebräuchliche Zeitabhängigkeit  $\exp(j\omega t)$  die Gl. (2.63)) kann aus einer Angabe bei  $x = x_1$  eine Fortpflanzung nur in Richtung  $x > x_1$  erfolgen. Wie sich aber  $w(x_1)$  nach  $x > x_1$  fortpflanzt, beschreibt Gl. (2.71); die kausale GF

$$G(x, x_0) = \begin{cases} \exp[-jk_0(x - x_0)] & x > x_0, \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

nennt man daher auch einen „Propagator“, welcher angibt, wie eine Ursache bei  $x_0$  an Stellen  $x > x_0$  Wirkungen hervorruft.

Die GF soll noch mit Hilfe der Fourier-Transformation gefunden werden. Wenn man Gl. (2.65) transformiert (siehe die nach Gl. (1.13) stehende Bemerkung), so erhält man:

$$-j(k - k_0)G_F(k, x_0) = e^{jkx_0}. \quad (2.72)$$

Wenn man aus Gl. (2.72) wieder  $G_F(k, x_0)$  „naiv“ berechnet (durch  $(k - k_0)$  dividiert), so erhält man für  $G(x, x_0)$  wieder ein uneigentliches Integral, dessen Integrand an der Stelle  $k = k_0$  einen Pol erster Ordnung besitzt:

$$G(x, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_F(k, x_0) e^{-jkx} \frac{dk}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[jk(x_0 - x)]}{k - k_0} dk. \quad (2.73)$$

Auch hier kann das Integral durch eine geeignete Interpretation des Integrationsweges regularisiert werden und zu einer GF führen, welche die geforderte Randbedingung erfüllt. Der Integrationsweg

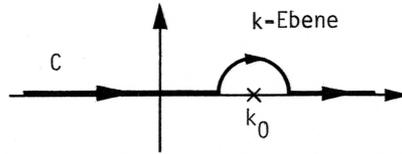


Abbildung 2.2: Integrationsweg C für das Integral Gl. (2.73), der zur richtigen Greenschen Funktion führt

ist in Abb. (2.2) gezeichnet. Für  $x_0 - x > 0$  schließt man den Integrationsweg im Unendlichen der oberen Halbebene (dort verschwindet der Integrand). Da auch das Umlaufintegral den Wert Null besitzt, gilt  $G(x, x_0) = 0$  für  $x < x_0$ . Weil  $G(x_1, x_0) = 0$  sein muß ( $x_1$  ist der Anfang des Intervalls, in dem die Lösung gesucht wird), muß auch  $G(x, x_0) = 0$  in  $x_1 \leq x < x_0$  sein, d. h. für  $x < x_0$ : Mit dem gewählten Integrationsweg C wird die Randbedingung erfüllt.

Für  $x > x_0$ , d. h.  $x_0 - x < 0$  schließt man den Integrationsweg im Unendlichen der unteren Halbebene; dort verschwindet der Integrand und damit wird das gesuchte Integral gleich dem Umlaufintegral. Mit Hilfe des Residuensatzes folgt:

$$\begin{aligned} \oint &= -2\pi j \sum \text{Residuen} = -2\pi j \left[ -\frac{1}{2\pi j} e^{jk_0(x_0 - x)} \right] \\ &= e^{jk_0(x_0 - x)} = G(x, x_0), \quad x > x_0. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Damit ist der Propagator gefunden.

Die richtige Lösung kann natürlich auch ohne „Probieren“ gefunden werden. Gemäß Gl. (1.33), Gl. (1.34) ist die richtige Auflösung von Gl. (2.72)

$$G_F(k, x_0) = j e^{jkx_0} P \left( \frac{1}{k - k_0} \right) + j e^{jkx_0} c \delta(k - k_0). \quad (2.75)$$

Die willkürliche Konstante  $c$  muß so bestimmt werden, daß die Greensche Funktion

$$\begin{aligned} G(x, x_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G_F(k, x_0) e^{-jkx} \frac{dk}{2\pi} \\ &= \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P \left( \frac{1}{k - k_0} \right) e^{jk(x_0 - x)} dk + \frac{jc}{2\pi} e^{jk_0(x_0 - x)} \end{aligned} \quad (2.76)$$

die Randbedingung erfüllt. Es läßt sich zeigen, daß dieser Ausdruck folgendermaßen umgeformt werden kann:

$$G(x, x_0) = e^{jk_0(x_0-x)} \left[ -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_0-x) + \frac{jc}{2\pi} \right]. \quad (2.77)$$

Für die Randbedingung  $G(x_1, x_0) = 0$  ist aber wegen  $x_1 \leq x < x_0$  und somit  $x < x_0$  der Funktionswert  $\operatorname{sgn}(x_0-x) = 1$ , und somit folgt aus Gl. (2.77)

$$\frac{jc}{2\pi} = \frac{1}{2}. \quad (2.78)$$

Die Greensche Funktion lautet somit

$$G(x, x_0) = e^{jk_0(x_0-x)} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_0-x) \right]. \quad (2.79)$$

Dieses Ergebnis ist mit Gl. (2.74) identisch. Es besteht somit kein Bedarf, uneigentliche Integrale zu regularisieren, wenn bei der Berechnung von  $G_F(k, x_0)$  korrekt verfahren wird, siehe Gl. (2.75). Das Integral in Gl. (2.76) wird folgendermaßen berechnet:

1. Man substituiert die neue Variable  $v = k - k_0$ .
2. Man verwendet die Definition des Hauptwerts Gl. (1.29).
3. Man schreibt statt  $\sin[v(x_0-x)]$  den Ausdruck  $\sin[v|x_0-x|] \operatorname{sgn}(x_0-x)$ .
4. Man substituiert  $u = v|x_0-x|$ .
5. Das Integral  $\int_0^\infty \sin x dx/x$  hat den Wert  $\pi/2$ .

Man erhält:

$$\begin{aligned} \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\frac{1}{k-k_0}\right) e^{jk(x_0-x)} dk &= \frac{j}{2\pi} e^{jk_0(x_0-x)} \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\frac{1}{v}\right) e^{jv(x_0-x)} dv \\ &= -\frac{1}{\pi} e^{jk_0(x_0-x)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin[v(x_0-x)]}{v} dv \\ &= -\frac{1}{\pi} e^{jk_0(x_0-x)} \operatorname{sgn}(x_0-x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon|x_0-x|}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \\ &= -\frac{1}{\pi} e^{jk_0(x_0-x)} \operatorname{sgn}(x_0-x) \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = -\frac{1}{2} e^{jk_0(x_0-x)} \operatorname{sgn}(x_0-x) \end{aligned}$$

Damit ist Gl. (2.78) bewiesen.

# Kapitel 3

## Eigenfunktionen

### 3.1 Entwicklung nach Eigenfunktionen

Gegeben seien die Operatoren  $\underline{L}$  ( $L, \mathcal{L}$  zu homogenen RB) und  $\underline{L}^\dagger$  ( $L^\dagger, \mathcal{L}^\dagger$ ). In den Gleichungen

$$\begin{aligned}\underline{L}|u_k\rangle &= \lambda_k|u_k\rangle, \\ \underline{L}^\dagger|v_l\rangle &= \mu_l|v_l\rangle,\end{aligned}\tag{3.1}$$

bezeichnet man die abstrakten Vektoren  $|u_k\rangle, |v_l\rangle$  als Eigenkets der Operatoren  $\underline{L}, \underline{L}^\dagger$ , und die im allgemeinen komplexen Zahlen  $\lambda_k, \mu_l$  als die zugehörigen Eigenwerte.

Für jede Operatorfunktion, die in eine Potenzreihe entwickelbar ist

$$f(\underline{L}) = \sum_i c_i \underline{L}^i, \quad h(\underline{L}^\dagger) = \sum_i b_i (\underline{L}^\dagger)^i,\tag{3.2}$$

beweist man durch wiederholte Anwendung von  $\underline{L}$  bzw.  $\underline{L}^\dagger$  auf Gl. (3.1) die Beziehungen

$$\begin{aligned}f(\underline{L})|u_k\rangle &= f(\lambda_k)|u_k\rangle, \\ h(\underline{L}^\dagger)|v_l\rangle &= h(\mu_l)|v_l\rangle.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Die Funktionen  $\langle x|u_k\rangle = u_k(x), \langle x|v_l\rangle = v_l(x)$  heißen Eigenfunktionen von  $L$  (aus dem Operatorbereich  $\mathcal{L}$ ) bzw. von  $L^\dagger$  (aus dem Bereich  $\mathcal{L}^\dagger$ ). Aus Gl. (3.1) erhält man

$$\left. \begin{aligned}\langle v_l|\underline{L}|u_k\rangle &= \lambda_k \langle v_l|u_k\rangle, \\ \langle u_k|\underline{L}^\dagger|v_l\rangle &= \mu_l \langle u_k|v_l\rangle,\end{aligned} \right\} \text{ und wegen } \langle v_l|\underline{L}|u_k\rangle = \langle u_k|\underline{L}^\dagger|v_l\rangle^*$$

folgt daraus die Beziehung

$$(\lambda_k - \mu_l^*) \langle v_l|u_k\rangle = 0.\tag{3.4}$$

Wenn  $\langle u_k|v_l\rangle \neq 0$  ist (dann können die Vektoren immer so normiert werden, daß ihr inneres Produkt den Wert Eins annimmt), dann muß  $\lambda_k = \mu_l^*$  sein. Bezeichnet man diese Eigenwerte mit demselben Index, so sieht man: Es gibt jeweils Eigenkets  $|u_k\rangle$  von  $\underline{L}$  zum Eigenwert  $\lambda_k$  und Eigenkets  $|v_k\rangle$  von  $\underline{L}^\dagger$  zum Eigenwert  $\mu_k = \lambda_k^*$ . Die Menge der Eigenwerte heißt Eigenwertspektrum.

Ist aber  $l \neq k$ , also  $\lambda_k \neq \mu_l^*$ , so muß  $\langle v_l|u_k\rangle = 0$  sein: Die Eigenvektoren  $|u_k\rangle$  von  $\underline{L}$  und  $|v_l\rangle$  von  $\underline{L}^\dagger$  sind orthogonal für  $l \neq k$ .

Die Indizes  $l, k$  können diskrete Werte annehmen; dann gibt es eine abzählbare Menge von diskreten Eigenwerten  $\lambda_k, \mu_l$  und Eigenfunktionen  $u_k(x), v_l(x)$ . Die Indizes können aber auch kontinuierlich aus einem Wertebereich kommen; dann schreibt man für die nicht abzählbare Menge der Eigenwerte auch  $\lambda(k), \mu(l)$  und für die Eigenfunktionen  $u(k, x), v(l, x)$ . Die Orthogonalitätsrelationen schreibt man allgemein

$$\langle v_l|u_k\rangle = \delta(l, k) = \begin{cases} \delta_{lk} & l, k \text{ diskret,} \\ \delta(l - k) & l, k \text{ kontinuierlich.} \end{cases}\tag{3.5}$$

Die zum kontinuierlichen Spektrum gehörenden Kets (sogenannte Dirac-Kets) sind nicht auf Eins normierbar. Gl. (3.5) in anderer Schreibweise:

$$\begin{aligned} \int \langle v_l | x \rangle r(x) dx \langle x | u_k \rangle &= \int v_l^*(x) u_k(x) r(x) dx = \delta_{lk}, \\ \int \langle v_l | x \rangle r(x) dx \langle x | u_k \rangle &= \int v^*(l, x) u(k, x) r(x) dx = \delta(l - k). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Jeder Ket des Raumes kann nach den diskreten und/oder kontinuierlichen Eigenkets von  $\underline{L}$  oder  $\underline{L}^\dagger$  entwickelt werden, z. B.

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle &= \sum_k |u_k\rangle \alpha_k + \int |u_k\rangle \alpha(k) dk = \sum_k^{\cdot} |u_k\rangle \alpha(k) dk, \\ |\varphi\rangle &= \sum_l |v_l\rangle \beta_l + \int |v_l\rangle \beta(l) dl = \sum_l^{\cdot} |v_l\rangle \beta(l) dl. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Entwicklungskoeffizienten  $\alpha_k, \beta_l$  erhält man mittels der Orthogonalitätsrelation Gl. (3.5), z. B. :

$$\langle v_l | \varphi \rangle = \sum_k^{\cdot} \langle v_l | u_k \rangle \alpha(k) dk = \sum_k^{\cdot} \delta(l, k) \alpha(k) dk = \begin{cases} \alpha_l & l \text{ diskret,} \\ \alpha(l) & l \text{ kontinuierlich.} \end{cases} \quad (3.8)$$

Analoge Ausdrücke erhält man, wenn man die zweite Gleichung in Gl. (3.7) von links mit  $\langle u_k |$  multipliziert. Setzt man die Entwicklungskoeffizienten von Gl. (3.8) in Gl. (3.7) ein, so folgt

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle &= \sum_k |u_k\rangle \langle v_k | \varphi \rangle + \int |u_k\rangle dk \langle v_k | \varphi \rangle = \sum_k^{\cdot} |u_k\rangle dk \langle v_k | \varphi \rangle, \\ |\varphi\rangle &= \sum_l |v_l\rangle \langle u_l | \varphi \rangle + \int |v_l\rangle dl \langle u_l | \varphi \rangle = \sum_l^{\cdot} |v_l\rangle dl \langle u_l | \varphi \rangle, \\ \langle v_k | \varphi \rangle &= \int \langle v_k | x' \rangle r(x') dx' \langle x' | \varphi \rangle = \begin{cases} \int v_k^*(x') \varphi(x') r(x') dx' & k \text{ diskret,} \\ \int v^*(k, x') \varphi(x') r(x') dx' & k \text{ kontinuierlich.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für  $\langle u_l | \varphi \rangle$ . Durch Vergleich der linken und rechten Seiten in Gl. (3.9) erhält man eine Beziehung für den Einheitsoperator, die sogenannte Vollständigkeitsrelation:

$$\begin{aligned} \sum_k^{\cdot} |u_k\rangle dk \langle v_k | &= \sum_k |u_k\rangle \langle v_k | + \int |u_k\rangle dk \langle v_k | = \underline{I}, \\ \sum_l^{\cdot} |v_l\rangle dl \langle u_l | &= \sum_l |v_l\rangle \langle u_l | + \int |v_l\rangle dl \langle u_l | = \underline{I}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Bildet man von Gl. (3.10) die Matrixelemente  $\langle x | \underline{I} | x' \rangle$ , so erhält man (siehe Gl. (2.14) und die nach Gl. (2.14) folgende Bemerkung)

$$\begin{aligned} \frac{\delta(x - x')}{r(x)} &= \frac{\delta(x - x')}{r(x')} \\ &= \sum_k^{\cdot} u(k, x) v^*(k, x') dk = \sum_k u_k(x) v_k^*(x') + \int u(k, x) v^*(k, x') dk \\ &= \sum_l^{\cdot} v(l, x) u^*(l, x') dl = \sum_l v_l(x) u_l^*(x') + \int v(l, x) u^*(l, x') dl. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Gl. (3.11) sagt dasselbe wie Gl. (3.9): Jede Funktion läßt sich entwickeln, wenn man den Einheitsoperator (die Delta-Funktion) nach Eigenkets (Eigenfunktionen) entwickelt hat; z. B. :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int \delta(x - x') \varphi(x') dx' \\ &= \sum_k u_k(x) \int v_k^*(x') \varphi(x') r(x') dx' + \int dk u(k, x) \int v^*(k, x') \varphi(x') r(x') dx'. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Bemerkung: Die Eigenfunktionen berechnet man aus Gründen der Einfachheit zu homogenen RB, z. B. für  $u_k(x) = 0$  bei  $x = 0, x = 1$ . Die Entwicklung einer Funktion  $\varphi(x)$  nach Gl. (3.12), welche die Randwerte  $\varphi(x) \neq 0$  bei  $x = 0, x = 1$  besitzt, kann dann aber offenbar nicht die richtigen Randwerte liefern, weil Gl. (3.12) bei  $x = 0, x = 1$  immer den Wert Null gibt. Es zeigt sich aber — siehe folgendes Beispiel 2 — daß die richtigen Randwerte erreicht werden, wenn man sich den Grenzen aus dem Inneren des Intervalls annähert (s. Abschn. (1.3.2) bei der Besprechung der Eigenschaften der dort verwendeten Funktion  $\nu(x)$ ).

### 3.1.1 Speziell für Hermitesche Operatoren geltende Beziehungen

Wenn  $\underline{L} = \underline{L}^\dagger$  gilt (d. h.  $L = L^\dagger, \mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$ , für den Operatorbereich werden z. B. homogene RB 1., 2. oder 3. Art vorgegeben), dann ist  $|u_k\rangle = |v_k\rangle$ , und die Eigenwerte  $\lambda_k = \mu_k$  sind reell, weil  $\underline{L}|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle = \underline{L}^\dagger|u_k\rangle$ , und somit ist der Ausdruck

$$\langle u_k | \underline{L} | u_k \rangle = \lambda_k \langle u_k | u_k \rangle = \langle u_k | \underline{L}^\dagger | u_k \rangle = \langle u_k | \underline{L}^\dagger | u_k \rangle^*$$

reell. In diesem Fall lauten die Orthogonalitäts- und die Vollständigkeitsrelation

$$\langle u_l | u_k \rangle = \delta(l, k), \quad \sum_k |u_k\rangle dk \langle u_k| = \underline{I}. \quad (3.13)$$

Ordnet man die Eigenwerte nach der Größe, so geben größere Eigenwerte eine größere Änderungsgeschwindigkeit der Eigenfunktion: Bei gegebenen RB haben höhere Eigenfunktionen eine größere Anzahl von Nullstellen in dem Intervall, in dem sie definiert sind. Dieser Umstand kann zur Näherungsbestimmung eines Eigenwertes verwendet werden: In  $\underline{L}|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle$  sei der Eigenvektor  $|u_k\rangle$  nicht bekannt. Nimmt man als Schätzvektor den Näherungsvektor  $|\varphi\rangle = |u_k\rangle + \varepsilon|g\rangle$ , so berechnet man leicht, daß

$$\frac{\langle \varphi | \underline{L} | \varphi \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle} = \lambda_k + O(\varepsilon^2). \quad (3.14)$$

Will man z. B.  $\lambda_2$ , so nimmt man statt der unbekanntenen Funktion  $u_2(x)$  irgendeine Funktion  $\varphi(x)$ , welche die RB erfüllt und innerhalb des Intervalls zwei Nullstellen besitzt, und erhält aus Gl. (3.14) einen Näherungswert für  $\lambda_2$ , der desto besser ist, je besser die geschätzte Funktion  $\varphi(x)$  die Eigenfunktion  $u_2(x)$  annähert.

### 3.1.2 Beispiel für Eigenfunktionen

Gegeben sei

$$\underline{L}: \quad L = -d^2/dx^2; \quad \mathcal{L}: \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = u(1). \quad (3.15)$$

Für den adjungierten Operator folgt aus Gl. (2.27) sofort  $L^\dagger = -d^2/dx^2$ , für den adjungierten Operatorbereich erhält man aus Gl. (2.24), Gl. (2.25)

$$\begin{aligned} K(v^*, u)|_0^1 &= u(1)v'^*(1) - v^*(1)u'(1) - u(0)v'^*(0) + v^*(0)u'(0) \\ &= u'(0)v'^*(1) - v^*(1)u'(1) + v^*(0)u'(0) \\ &= u'(0)[v^*(0) + v'^*(1)] - u'(1)v^*(1) = 0, \end{aligned}$$

d. h.

$$\underline{L}^\dagger: \quad L^\dagger = -d^2/dx^2; \quad \mathcal{L}^\dagger: \quad v^*(1) = 0, \quad v'^*(1) = -v^*(0). \quad (3.16)$$

Man erhält für den Operator  $\underline{L}$ :

$$\begin{array}{ll} u'' + \lambda u = 0 & \text{Differentialgleichung,} \\ u(x) = C \sin(x\sqrt{\lambda}) & \text{Lösung für } u(0) = 0, \\ \sqrt{\lambda} = \sin \sqrt{\lambda} & \text{Eigenwertgleichung für } u'(0) = u(1). \end{array} \quad (3.17)$$

Eigenfunktionen sind alle Funktionen  $\sin(x\sqrt{\lambda})$  mit  $\lambda$  aus Gl. (3.17). Man muß immer prüfen, ob  $\lambda = 0$  tatsächlich ein Eigenwert ist: Das ist nur dann der Fall, wenn für  $\lambda = 0$  eine nichttriviale Eigenfunktion zu den vorgegebenen RB existiert. Hier:  $\lambda_0 = 0$  ist eine Lösung von Gl. (3.17). Die Eigenfunktion müßte der Differentialgleichung  $u_0'' = 0$  genügen, d. h.  $u_0(x) = a + bx$ .  $u_0(0) = 0$  verlangt  $a = 0$ , d. h.  $u_0(x) = bx$ ;  $u'(0) = u(1)$  führt auf  $b = b$ , d. h.  $u_0(x) = bx$  ist eine nichttriviale Eigenfunktion,  $\lambda_0 = 0$  ein Eigenwert. Man wählt z. B.  $b = 1$ , d. h.

$$u_0(x) = x, \quad \lambda_0 = 0. \quad (3.18)$$

Für die anderen Eigenwerte (EW) setzt man  $\lambda = k^2$  bzw.  $\lambda = -k^2$  ( $k$  reell). Damit prüft man, ob positive und negative reelle Eigenwerte existieren.  $k = \sin k$  hat nur die Lösung  $k = 0$ ;  $k = \sinh k$  hat ebenfalls nur die Lösung  $k = 0$ :  $\lambda_0 = 0$  ist daher der einzige reelle EW, alle anderen sind komplex. Man setzt:

$$\sqrt{\lambda_k} = \alpha_k + j\beta_k, \quad u_k(x) = \sin[x(\alpha_k + j\beta_k)], \quad (3.19)$$

und erhält aus der Eigenwertgleichung Gl. (3.17)

$$\alpha_k = \sin \alpha_k \cosh \beta_k, \quad \beta_k = \cos \alpha_k \sinh \beta_k. \quad (3.20)$$

Gl. (3.20) ist numerisch zu lösen. Für den adjungierten Operator  $\underline{L}^\dagger$  erhält man:

$$\begin{array}{ll} v'' + \mu v = 0 & \text{Differentialgleichung,} \\ v(x) = C \sin[(1-x)\sqrt{\mu}] & \text{Lösung für } v^*(1) = 0, \\ (\sqrt{\mu})^* = \sin(\sqrt{\mu})^* & \text{Eigenwertgleichung für } v^*(0) = -v'^*(1). \end{array} \quad (3.21)$$

Dabei wurde die Beziehung

$$[\sin(a + jb)]^* = \sin[(a + jb)^*]$$

verwendet. Durch Vergleich mit Gl. (3.17) sieht man, daß die Eigenwertgleichungen für  $\sqrt{\lambda}$  und  $(\sqrt{\mu})^*$  identisch sind. Daher gilt:

$$\begin{array}{ll} v_0(x) = 1 - x, & \mu_0 = \lambda_0 = 0, \\ v_k(x) = \sin[(1-x)(\alpha_k - j\beta_k)], & (\sqrt{\mu_k})^* = \sqrt{\lambda_k} = \alpha_k + j\beta_k. \end{array} \quad (3.22)$$

Für die Normierungsintegrale Gl. (3.5) erhält man:

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_0^*(x) u_0(x) dx &= \int_0^1 (1-x)x dx = \frac{1}{6}, \\ \int_0^1 v_l^*(x) u_k(x) dx &= \int_0^1 \sin[(1-x)(\alpha_l + j\beta_l)] \sin[x(\alpha_k + j\beta_k)] dx \\ &= \frac{1}{2} [1 - \cos(\alpha_k + j\beta_k)] \delta_{kl}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Man setzt daher jetzt als neue, normierte Eigenfunktionen:

$$\begin{array}{ll} u_0(x) = x, & v_0(x) = 6(1-x), \\ u_k(x) = \sin[x(\alpha_k + j\beta_k)], & v_k(x) = \frac{2}{1 - \cos(\alpha_k - j\beta_k)} \sin[(1-x)(\alpha_k - j\beta_k)]. \end{array}$$

Für die Entwicklung einer Funktion  $\varphi(x)$  z. B. nach den Funktionen  $u_k(x)$  erhält man aus Gl. (3.9):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= u_0(x) \langle v_0 | \varphi \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \langle v_k | \varphi \rangle, \\ \langle v_0 | \varphi \rangle &= \int_0^1 v_0^*(x) \varphi(x) dx = \int_0^1 6(1-x) \varphi(x) dx, \\ \langle v_k | \varphi \rangle &= \int_0^1 v_k^*(x) \varphi(x) dx = \int_0^1 \frac{2 \sin[(1-x)(\alpha_k + j\beta_k)]}{1 - \cos(\alpha_k + j\beta_k)} \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (3.24)$$

### 3.1.3 Beispiel zur Entwicklung nach Eigenfunktionen

$$\left. \begin{array}{l} \underline{L}: L = -d^2/dx^2, \quad \mathcal{L}: u(0) = 0, u(\pi) = 0, \\ \underline{L}^\dagger: L = -d^2/dx^2, \quad \mathcal{L}^\dagger: v(0) = 0, v(\pi) = 0, \end{array} \right\} \text{ d. h. } \underline{L} = \underline{L}^\dagger. \quad (3.25)$$

Die Gleichungen  $u'' + \lambda u = 0$  und  $v'' + \lambda v = 0$  haben für  $\lambda = 0$  keine nichttriviale Lösung zu den gegebenen RB, ergo ist  $\lambda = 0$  kein Eigenwert. Lösungen für  $\lambda \neq 0$ , die  $u(0) = v(0) = 0$  erfüllen, sind Funktionen  $\sin(x\sqrt{\lambda})$ . Die zweite RB erfüllen jene, für die  $\pi\sqrt{\lambda} = k\pi$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  gilt. Die normierten Eigenfunktionen sind

$$u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad \lambda_k = k^2. \quad (3.26)$$

Nach Gl. (3.11) gilt

$$\delta(x - x') = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \sin(kx) \sin(kx'). \quad (3.27)$$

Nach diesen Eigenfunktionen soll folgende Funktion entwickelt werden:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad \text{d. h. } \varphi(0) = \pi/2, \varphi(\pi) = 0. \quad (3.28)$$

Aus Gl. (3.27), Gl. (3.28) folgt

$$\varphi(x) = \int_{0-}^{\pi+} \delta(x - x') \varphi(x') dx' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \sin(kx) \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\pi - x') \sin(kx') dx' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}. \quad (3.29)$$

Offensichtlich erhält man in Gl. (3.29), wenn man  $x = 0$ ,  $x = \pi$  setzt, die Funktionswerte  $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ , im Gegensatz zu Gl. (3.28)! Die Reihenentwicklung Gl. (3.29) zeigt eine ungerade Funktion; setzt man sie in den Bereich  $x < 0$  fort, so erhält man eine unstetige Funktion, die nach Fourier entwickelt wird. Die Reihe nimmt an der Unstetigkeitsstelle den Wert  $[\varphi(0+) + \varphi(0-)]/2 = 0$  an. Die Funktion  $\varphi(x)$  ist in Abb. (3.1) dargestellt. Die Reihe Gl. (3.29)

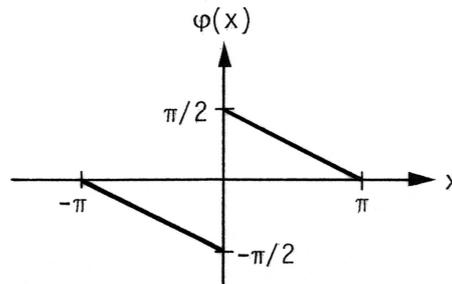


Abbildung 3.1: Darstellung der Funktion  $\varphi(x)$  von Gl. (3.28), welche für Werte  $x < 0$  gemäß der Reihe von Gl. (3.29) als ungerade Funktion fortgesetzt wurde

nimmt den richtigen Grenzwert an, wenn man sich dem Wert  $x = 0$  vom Inneren des Intervalls nähert.

Beweis dieser Behauptung: Die Funktion

$$f(\zeta) = \frac{\pi \cos(\pi\zeta)}{\sin(\pi\zeta)} \quad (3.30)$$

der komplexen Variablen  $\zeta$  hat bei  $\zeta = k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Pole erster Ordnung mit dem Residuum 1, da

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow k} \frac{\pi \cos(\pi\zeta)}{\sin(\pi\zeta)} &= \lim_{\zeta \rightarrow k} \frac{\pi \cos(\pi\zeta)}{\sin[(\zeta - k)\pi + k\pi]} \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow k} \frac{\pi \cos(\pi\zeta)}{\sin[(\zeta - k)\pi] \cos(k\pi) + \cos[(\zeta - k)\pi] \sin(k\pi)} \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow k} \frac{\pi}{\sin[(\zeta - k)\pi]} = \lim_{\zeta \rightarrow k} \frac{\pi}{(\zeta - k)\pi - \frac{1}{3!}(\zeta - k)^3\pi^3 + \dots} \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow k} \frac{1}{\zeta - k} \frac{1}{1 - O[(\zeta - k)^2]} = \lim_{\zeta \rightarrow k} \frac{1}{\zeta - k}. \end{aligned}$$

Damit gilt aber:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\pi \cos(\pi\zeta)}{\sin(\pi\zeta)} \frac{\sin(\zeta x)}{\zeta} d\zeta. \quad (3.31)$$

Der Integrationsweg in der komplexen  $\zeta$ -Ebene ist in Abb. (3.2) eingezeichnet: Er umfaßt im Gegenuhreigersinn alle Pole bei den Werten  $\zeta = 1, 2, 3, \dots$

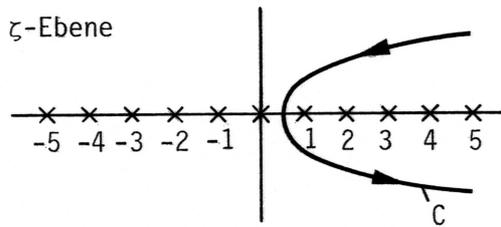


Abbildung 3.2: Integrationsweg für das Integral von Gl. (3.31) in der komplexen  $\zeta$ -Ebene

In komplexen Integralen sind Produkte von Winkelfunktionen unangenehm. Addiert man zu Gl. (3.31) auf der rechten Seite das Integral

$$-\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\pi \sin(\pi\zeta)}{\sin(\pi\zeta)} \frac{\cos(\zeta x)}{\zeta} d\zeta = 0,$$

so hat man ein Integral hinzugefügt, dessen Integrand innerhalb der Kurve C keinen Pol erster Ordnung besitzt, und welches infolgedessen den Wert Null hat. Damit erhält man für  $\varphi(x)$  folgende Darstellung:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_1} \frac{\pi \sin[\zeta(x - \pi)]}{\zeta \sin(\pi\zeta)} d\zeta. \quad (3.32)$$

Im Integral Gl. (3.32) kann man  $\zeta$  durch  $(-\zeta)$  ersetzen, ohne daß sich der Wert des Integrals dadurch ändert. Daher konnte man den in Abb. (3.2) gezeigten Integrationsweg C durch den Integrationsweg  $C_1$  ersetzen, der in Abb. (3.3) dargestellt ist. Abb. (3.4) zeigt einen geschlossenen, im Uhrzeigersinn durchlaufenen Integrationsweg  $C_2$ . Integriert man den Integranden von Gl. (3.32) über diesen Weg, so verschwindet das Integral, weil der Integrand innerhalb des von  $C_2$  berandeten Bereichs keinen Pol erster Ordnung besitzt. Mit der Bezeichnung der Punkte gemäß Abb. (3.4) kann man schreiben (als Integrand ist der von Gl. (3.32) einzusetzen, das Umlaufintegral wird in der oberen Halbebene längs eines Halbkreises mit dem Radius  $R = |\zeta| \rightarrow \infty$  geschlossen)

$$\oint_{C_2} = 0 = \int_{C_1} + \int_A^B + \int_B^D + \int_D^E + \int_E^G + \int_G^F + \int_F^A.$$

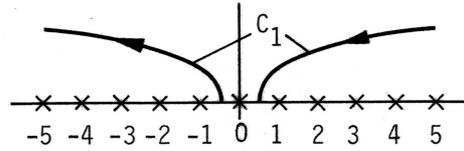


Abbildung 3.3: Der Integrationsweg längs der nicht geschlossenen Kurve  $C_1$  ersetzt den Integrationsweg  $C$  von Abb. (3.2), siehe das Integral von Gl. (3.32)

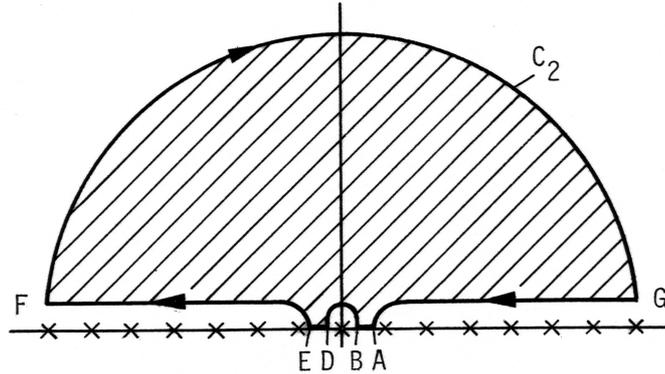


Abbildung 3.4: Das Umlaufintegral längs  $C_2$  verschwindet; es enthält als Bestandteil das Integral längs des in Abb. (3.3) gezeigten Weges  $C_1$

Weil der Integrand längs der reellen Achse eine ungerade Funktion ist, gilt

$$\int_A^B + \int_D^E = 0.$$

Damit erhält man für das gesuchte Integral längs  $C_1$  von Gl. (3.32):

$$\int_{C_1} = - \int_B^D - \int_F^G. \quad (3.33)$$

Zuerst wird der Wert des Integrals über einen Halbkreis mit dem Radius  $\varepsilon \rightarrow 0$  oberhalb des Pols bei  $\zeta = 0$  berechnet: Wie nachstehend gezeigt wird, liefert dieses Integral von B nach D, siehe auch Abb. (3.4), den Wert  $j\pi(\pi - x)$ :

$$\begin{aligned} - \int_B^D &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{\pi \sin[\varepsilon e^{j\varphi}(x - \pi)]}{\varepsilon e^{j\varphi} \sin(\pi \varepsilon e^{j\varphi})} j \varepsilon e^{j\varphi} d\varphi \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi j \pi \frac{\varepsilon e^{j\varphi}(x - \pi) - \dots}{\pi \varepsilon e^{j\varphi} - \dots} d\varphi \\ &= -j \int_0^\pi (x - \pi) d\varphi = -j\pi(x - \pi). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Von dem Integral, welches sich vom Punkt F zum Punkt G längs des Halbkreises im Unendlichen erstreckt, siehe Abb. (3.4), läßt sich zeigen, daß es für einen bestimmten Wertebereich des

Parameters  $x$  verschwindet. Das Integral von Gl. (3.32) wird dazu elementar umgeformt:

$$\begin{aligned}
& \int_{\text{F}}^{\text{G}} \frac{\sin[\zeta(x-\pi)]d\zeta}{\zeta \sin(\pi\zeta)} \\
&= \int_{\text{F}}^{\text{G}} \frac{e^{j\zeta(x-\pi)} - e^{-j\zeta(x-\pi)}}{e^{j\pi\zeta} - e^{-j\pi\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta} \\
&= \int_{\text{F}}^{\text{G}} \frac{e^{j\zeta x} d\zeta}{\zeta (e^{2j\pi\zeta} - 1)} - \int_{\text{F}}^{\text{G}} \frac{e^{-j\zeta(x-2\pi)} d\zeta}{\zeta (e^{2j\pi\zeta} - 1)}. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Das erste Integral verschwindet längs des Integrationsweges für  $|\zeta| \rightarrow \infty$ , wenn  $x > 0$  gilt; das zweite Integral verschwindet längs dieses Integrationsweges, wenn  $x - 2\pi < 0$  ist. Diese beiden Bedingungen sind somit im Intervall  $0 < x < 2\pi$  gleichzeitig erfüllt. Aus Gl. (3.32) folgt somit unter Verwendung der Aussagen von Gl. (3.33)–Gl. (3.35) das Ergebnis

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{1}{2}(\pi - x), \quad 0 < x < 2\pi. \tag{3.36}$$

Wenn man eine Funktion mit inhomogenen Randwerten nach Eigenfunktionen entwickelt, welche homogenen Randwerten genügen, werden die Randwerte nicht richtig wiedergegeben (hier im Beispiel erhält man durch formales Einsetzen von  $x = 0$  in Gl. (3.36) einmal den Randwert null, einmal den Randwert  $\pi/2$ ). Wie aber aus der Rechnung folgt, werden die richtigen Randwerte asymptotisch erreicht, wenn man sich aus dem Inneren des Bereichs an den Rand annähert (der Grenzwert der Summe in Gl. (3.36) nimmt den Wert  $\pi/2$  an, wenn man von  $x > 0$  gegen die Stelle  $x = 0$  geht).

## 3.2 Die Spektraldarstellung von Operatorfunktionen

Gegeben seien  $\underline{L}$ ,  $\underline{L}^\dagger$ , sowie deren Eigenfunktionen und Eigenwerte, und damit die Orthogonalitätsrelationen Gl. (3.5) und die Vollständigkeitsrelationen Gl. (3.10). Damit kann die Frage beantwortet werden, wie eine Operatorfunktion  $f(\underline{L})$  oder  $f(\underline{L}^\dagger)$  auf einen beliebigen Vektor  $|g\rangle$  des Raums wirkt. Mit Gl. (3.10) folgt

$$\begin{aligned}
|g\rangle &= \sum_k^f |u_k\rangle dk \langle v_k | g \rangle = \sum_l^f |v_l\rangle dl \langle u_l | g \rangle, \\
f(\underline{L})|g\rangle &= \sum_k^f f(\underline{L})|u_k\rangle dk \langle v_k | g \rangle = \sum_k^f |u_k\rangle f(\lambda_k) dk \langle v_k | g \rangle, \\
f(\underline{L}^\dagger)|g\rangle &= \sum_l^f f(\underline{L}^\dagger)|v_l\rangle dl \langle u_l | g \rangle = \sum_l^f |v_l\rangle f(\mu_l) dl \langle u_l | g \rangle.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Bildet man von Gl. (3.37) die Bracket mit  $\langle x|$  und beachtet die Schreibweise Gl. (1.94), Gl. (2.14), Gl. (2.18), so folgt z. B. für ein diskretes Eigenwertspektrum

$$\begin{aligned}
f(L)g(x) &= \sum_k u_k(x) f(\lambda_k) \int v_k^*(x_0) g(x_0) r(x_0) dx_0, \\
f(L^\dagger)g(x) &= \sum_l v_l(x) f(\mu_l) \int u_l^*(x_0) g(x_0) r(x_0) dx_0.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Durch Vergleich der linken und rechten Seiten in Gl. (3.37) ergibt sich die sogenannte Spektraldarstellung der Operatorfunktionen  $f(\underline{L})$ ,  $f(\underline{L}^\dagger)$ :

$$\begin{aligned} f(\underline{L}) &= \sum_k^f |u_k\rangle f(\lambda_k) dk \langle v_k|, \\ f(\underline{L}^\dagger) &= \sum_l^f |v_l\rangle f(\mu_l) dl \langle u_l|. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Diese Beziehungen wurden mittels Gl. (3.2), Gl. (3.3) abgeleitet, d. h. für Fälle, in denen die Operatorfunktion in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Man kann nun Gl. (3.39) von rechts nach links lesen, und für beliebige Funktionen  $f(\lambda_k)$ ,  $f(\mu_l)$  (die auch verallgemeinerte Funktionen sein können) eine Operatorfunktion definieren, z. B.

$$\int |u_k\rangle \delta(\lambda_k - \lambda) dk \langle v_k| = (\text{Definition}) = \delta(\underline{L} - \lambda \underline{L}). \quad (3.40)$$

Schreibt man in Gl. (3.38)  $g(x) = \int \delta(x - x_0) g(x_0) dx_0$ , so erhält man durch Vergleich der rechten und linken Seiten

$$\begin{aligned} f(\underline{L})\delta(x - x_0) &= \sum_k u_k(x) f(\lambda_k) v_k^*(x_0) r(x_0), \\ f(\underline{L}^\dagger)\delta(x - x_0) &= \sum_l v_l(x) f(\mu_l) u_l^*(x_0) r(x_0). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Gl. (3.41) hätte man auch direkt aus Gl. (3.11) erhalten können.

### 3.2.1 Inversion von Operatoren

Die Spektraldarstellung ist beim Aufsuchen von Umkehroperatoren nützlich. Es sei das Problem

$$\underline{L}|\varphi\rangle = |g\rangle \quad (3.42)$$

zu lösen. Man löst zunächst die Probleme

$$\underline{L}|u_k\rangle = \lambda_k |u_k\rangle, \quad \underline{L}^\dagger |v_l\rangle = \mu_l |v_l\rangle. \quad (3.43)$$

Aus Gl. (3.39) ist der Umkehroperator zu  $\underline{L}$

$$f(\underline{L}) = \underline{L}^{-1} = \underline{G} = \sum_k^f \frac{|u_k\rangle dk \langle v_k|}{\lambda_k}. \quad (3.44)$$

Der Umkehroperator existiert nur dann, wenn kein Eigenwert  $\lambda_k = 0$  vorhanden ist (gewisse Probleme lassen sich nicht eindeutig umkehren: z. B. entsprechen einer Projektion auf die  $xy$ -Ebene unendlich viele Vektoren im Raum). Mit Gl. (3.44) ist die Lösung von Gl. (3.42)

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle &= \underline{G}|g\rangle = \sum_k^f \frac{|u_k\rangle dk \langle v_k|g\rangle}{\lambda_k}, \\ \varphi(x) &= \sum_k^f \frac{u_k(x) dk \int v_k^*(x_0) g(x_0) r(x_0) dx_0}{\lambda_k}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Gl. (3.44) ist eine Entwicklung von  $G(x, x_0)$  nach Eigenfunktionen von  $\underline{L}$ ,  $\underline{L}^\dagger$ :

$$G(x, x_0) = \langle x|\underline{G}|x_0\rangle = \sum_k^f \frac{u_k(x) dk v_k^*(x_0)}{\lambda_k}. \quad (3.46)$$

### 3.3 Grundgedanke der Störungsrechnung

Bekannt sei die Lösung von

$$\underline{L}|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle, \quad \underline{L} = \underline{L}^\dagger, \quad \text{d. h. } \lambda_k = \mu_k, \quad |u_k\rangle = |v_k\rangle. \quad (3.47)$$

Gesucht sei die Lösung von

$$\underline{L}_I|w\rangle = \beta|w\rangle, \quad |w\rangle =? \quad \beta =? \quad (3.48)$$

Man betrachtet  $\underline{L}_I$  als eine Störung von  $\underline{L}$ ; in seiner Wirkung auf  $|w\rangle$  ist  $\underline{L}$  als erweiterter Operator  $\underline{L}_e$  zu interpretieren (siehe Gl. (2.30)):

$$\underline{L}_I = \underline{L}_e + \underline{L}_1. \quad (3.49)$$

$\underline{L}_1$  sei ein „kleiner“ Operator. Aus Gl. (3.48), Gl. (3.49) folgt

$$(\underline{L}_e + \underline{L}_1)|w\rangle = \beta|w\rangle. \quad (3.50)$$

Aus Gl. (3.50) folgt mit der Vollständigkeitsrelation in der Form von Gl. (3.13)

$$\underline{L}_1|w\rangle = \sum_k |u_k\rangle \langle u_k | \underline{L}_1 |w\rangle = (\beta \underline{I} - \underline{L}_e)|w\rangle. \quad (3.51)$$

Die Lösung ist (man beachte Gl. (3.3))

$$|w\rangle = (\beta \underline{I} - \underline{L}_e)^{-1} \sum_k |u_k\rangle \langle u_k | \underline{L}_1 |w\rangle = \sum_k |u_k\rangle \frac{\langle u_k | \underline{L}_1 |w\rangle}{\beta - \lambda_k}. \quad (3.52)$$

Jetzt muß man spezifizieren, welche der Lösungen  $|w\rangle$  von Gl. (3.48) man haben will: z. B. jene, die bei Verschwinden der Störung  $\underline{L}_1 \rightarrow 0$  die Eigenschaft  $|w\rangle \rightarrow |u_n\rangle$ ,  $\beta \rightarrow \lambda_n$  besitzt. Der Term mit  $k = n$  wird aus der Summe herausgezogen, der Koeffizient von  $|u_n\rangle$  soll den Wert 1 haben:

$$\begin{aligned} |w\rangle &= |u_n\rangle \frac{\langle u_n | \underline{L}_1 |w\rangle}{\beta - \lambda_n} + \sum_{k \neq n} |u_k\rangle \frac{\langle u_k | \underline{L}_1 |w\rangle}{\beta - \lambda_k} \\ &= |u_n\rangle + \sum_{k \neq n} |u_k\rangle \frac{\langle u_k | \underline{L}_1 |w\rangle}{\beta - \lambda_k}, \\ \beta &= \lambda_n + \langle u_n | \underline{L}_1 |w\rangle. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Die Beziehungen in Gl. (3.53) werden iterativ gelöst. Die  $(\nu + 1)$ -te Näherung erhält man, indem man auf den rechten Seiten die  $\nu$ -te Näherung einsetzt. Als nullte Näherung verwendet man

$$|w_0\rangle = |u_n\rangle, \quad \beta^{(0)} = \lambda_n.$$

Damit folgt aus Gl. (3.53):

$$|w_{\nu+1}\rangle = |u_n\rangle + \sum_{k \neq n} |u_k\rangle \frac{\langle u_k | \underline{L}_1 |w_\nu\rangle}{\beta^{(\nu)} - \lambda_k}, \quad \beta^{(\nu+1)} = \lambda_n + \langle u_n | \underline{L}_1 |w_\nu\rangle. \quad (3.54)$$

Speziell für die erste Näherung gilt

$$|w_1\rangle = |u_n\rangle + \sum_{k \neq n} |u_k\rangle \frac{\langle u_k | \underline{L}_1 |u_n\rangle}{\lambda_n - \lambda_k}, \quad \beta^{(1)} = \lambda_n + \langle u_n | \underline{L}_1 |u_n\rangle. \quad (3.55)$$

Man beachte, daß die  $|u_k\rangle$  die normierten Eigenkets sind! Benötigt man für einen hermiteschen Operator  $\underline{L} = \underline{L}^\dagger$  einen Eigenwert  $\lambda_n$ , ohne daß man die Eigenfunktionen berechnen will, so kann man nach Gl. (3.14) einen Schätzwert finden mit

$$|\varphi\rangle = |u_n\rangle + \varepsilon|g\rangle, \quad (3.56)$$

$$\frac{\langle \varphi | \underline{L} | \varphi \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle} = \lambda_n + O(\varepsilon^2). \quad (3.57)$$

Auch „schlechte“ Kets  $|\varphi\rangle$  liefern eine gute Näherung, da der Fehler von der Ordnung  $O(\varepsilon^2)$  ist.

### 3.3.1 Beispiel zur Störungsrechnung

Gegeben sei die Lösung des Eigenwertproblems des Operators

$$\underline{L}: L = -d^2/dx^2 = L^\dagger, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger: \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Der Operator ist hermitesch. Die Eigenfunktionen lauten

$$u_k(x) = \sqrt{2} \sin(x\sqrt{\lambda_k}) = \sqrt{2} \sin(k\pi x), \\ \lambda_k = (k\pi)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.58)$$

Gesucht wird die Lösung des gestörten Problems für den Operator

$$\underline{L}_I: L = -d^2/dx^2, \quad \mathcal{L}_I: \quad w(0) + \alpha w'(0) = 0, \quad w(1) = 0. \quad (3.59)$$

Dabei ist  $\alpha \ll 1$  vorausgesetzt. Im vorliegenden Fall könnte man die Lösung von Gl. (3.59) auch ohne Störungsrechnung finden: Es sind die Funktionen  $w_n(x) \sim \sin[(1-x)\sqrt{\beta_n}]$ , die Eigenwerte genügen der Gleichung  $\sin\sqrt{\beta_n} = \alpha\sqrt{\beta_n} \cos\sqrt{\beta_n}$ . Hier soll aber eine Näherungslösung durch Anwenden von Gl. (3.55) gefunden werden.

Die Bedeutung von  $\langle u_k | \underline{L}_I | w \rangle$  kann aus Gl. (2.32) entnommen werden. Unter Verwendung der Eigenfunktionen  $u_k(x)$  aus Gl. (3.58) und der Randbedingungen für  $w(x)$  von Gl. (3.59) erhält man:

$$\langle u_k | \underline{L}_I | w \rangle = K [u_k^*(x), w(x)] \Big|_{x=0}^{x=1} = \left( w \frac{du_k^*}{dx} - u_k^* \frac{dw}{dx} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ = -k\pi\sqrt{2}w(0) = k\pi\alpha\sqrt{2}w'(0). \quad (3.60)$$

Zum Einsetzen in Gl. (3.55) ist statt  $w(x)$  die Funktion  $u_n(x)$  zu nehmen:

$$\langle u_k | \underline{L}_I | u_n \rangle = k\pi\alpha\sqrt{2}u_n'(0) = 2\pi^2kn\alpha, \\ \langle u_n | \underline{L}_I | u_n \rangle = 2\pi^2n^2\alpha. \quad (3.61)$$

Mit Gl. (3.61) folgt aus Gl. (3.55) das Ergebnis

$$|w_1\rangle = |u_n\rangle + \sum_{\substack{k \neq n \\ k=1}}^{\infty} |u_k\rangle \frac{2\alpha nk}{n^2 - k^2}, \quad \beta^{(1)} = n^2\pi^2(1 + 2\alpha). \quad (3.62)$$

$w_1(x)$  erhält man, indem man in Gl. (3.62) die Bracket mit dem Bra  $\langle x |$  bildet und die übliche Schreibweise  $w_1(x) = \langle x | w_1 \rangle$ ,  $u_n(x) = \langle x | u_n \rangle$ ,  $u_k(x) = \langle x | u_k \rangle$  verwendet.

### 3.3.2 Näherungen für Eigenwerte

Für den Operator

$$\underline{L}: L = -d^2/dx^2, \quad \mathcal{L}: \quad u(0) = u(1) = 0, \quad \underline{L} = \underline{L}^\dagger, \quad (3.63)$$

ist der niedrigste Eigenwert zu suchen. Nach Gl. (3.58) ist das der Wert  $\lambda = \pi^2$ . Es soll aber Gl. (3.57) angewendet werden. Man nimmt eine Funktion  $\varphi(x)$ , welche  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$  erfüllt, und im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  (außer an den Rändern zufolge der RB) keine Nullstelle hat, z. B.  $\varphi(x) = x(1-x)$ . Aus Gl. (3.57) wird

$$\frac{\int_0^1 \varphi^*(x) \left( -\frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) dx}{\int_0^1 |\varphi(x)|^2 dx} = \frac{\int_0^1 x(1-x)2dx}{\int_0^1 x^2(1-x)^2 dx} = 10 = \lambda + O(\varepsilon^2). \quad (3.64)$$

Die Abschätzung gibt den Wert 10 statt des korrekten Wertes  $\pi^2$  (der Fehler beträgt -1,32%!).

### 3.4 Beziehung zur Schrödingergleichung

Die Aufgabe

$$Lu(x) = \lambda u(x), \quad \mathcal{L}: \text{homogene RB}, \quad L = -\frac{1}{r} \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) + q \quad (3.65)$$

heißt Sturm-Liouvillesches Problem. Man kann es auf die Form

$$\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} + [\lambda - Q(\xi)]y(\xi) = 0 \quad (3.66)$$

bringen. Gl. (3.66) ist aus der Quantentheorie als Schrödingergleichung bekannt, über deren Näherungslösungen eine Fülle von Literatur existiert. Dabei wurde substituiert:

$$u(x) = \frac{y(\xi)}{\sqrt[4]{rp}}, \quad \xi = \int \sqrt{\frac{r}{p}} dx, \quad Q = \frac{1}{\sqrt[4]{rp}} \frac{d^2 \sqrt[4]{rp}}{d\xi^2} + q. \quad (3.67)$$

$\lambda$  ist ein Maß für die Gesamtenergie,  $Q(\xi)$  ein Maß für die potentielle Energie. Gl. (3.66) hat in Gebieten, in denen sich  $Q$  prozentual wenig ändert und in denen  $\lambda - Q \neq 0$  ist, die Näherungslösungen (sie gehen für  $\xi \rightarrow \infty$  bzw. für  $\xi \rightarrow -\infty$  gegen den Wert  $y(\xi) = 1$ , falls  $|Q(\xi)|$  im Unendlichen verschwindet)

$$y(\xi) = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{\lambda - Q(\xi)}} \exp \left[ \pm j \int_{\mp\infty}^{\xi} \sqrt{\lambda - Q(z)} dz \right]. \quad (3.68)$$

Gl. (3.68) ist die sogenannte WKBJ-Lösung (Wentzel, Kramers, Brillouin, Jeffreys). Man sieht, daß für  $|\xi| \rightarrow \infty$  unter den oben erwähnten Bedingungen asymptotische Lösungen folgender Form existieren:

$$y(\xi) = \exp[\pm j\xi\sqrt{\lambda}]. \quad (3.69)$$

Ausgedrückt durch die ursprünglichen Größen lauten diese Lösungen

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{rp}} \exp \left[ \pm j\sqrt{\lambda} \int \sqrt{\frac{r}{p}} dx \right]. \quad (3.70)$$

#### Anmerkung

Eine Differentialgleichung für Eigenfunktionen der Form Gl. (3.65) kann immer in eine äquivalente Integralgleichung umgeformt werden, weil die Beziehung  $\underline{L}|u\rangle = \lambda|u\rangle$  mit  $\underline{LG} = \underline{I}$  immer in folgende Form gebracht werden kann:

$$|u\rangle = \lambda \underline{G}|u\rangle, \quad u(x) = \lambda \int_a^b G(x, x_0) u(x_0) r(x_0) dx_0. \quad (3.71)$$

### 3.5 Die Greensche Funktion $G_\lambda(x, x_0)$

Wenn die Lösungen der Eigenwertprobleme

$$\begin{aligned} \underline{L}|u_k\rangle &= \lambda_k|u_k\rangle, & \underline{L} &: L, \mathcal{L} \text{ (homogene RB)}, \\ \underline{L}^\dagger|v_l\rangle &= \mu_l|v_l\rangle, & \underline{L}^\dagger &: L^\dagger, \mathcal{L}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.72)$$

bekannt sind, kann die Greensche Funktion  $G_\lambda(x, x_0)$ , definiert durch

$$\underline{G}_\lambda = (\underline{L} - \lambda \underline{I})^{-1}, \quad \text{d. h.} \quad (\underline{L} - \lambda \underline{I}) \underline{G}_\lambda = \underline{I}, \quad (3.73)$$

angegeben werden; mit dieser Greenschen Funktion können Probleme der Art  $(\underline{L} - \lambda \underline{I})|u\rangle = |g\rangle$  gelöst werden. Nach Gl. (3.39) gilt:

$$\begin{aligned}\underline{G}_\lambda &= (\underline{L} - \lambda \underline{I})^{-1} = \oint_k \frac{|u_k\rangle dk \langle v_k|}{\lambda_k - \lambda} = - \sum_k \frac{|u_k\rangle \langle v_k|}{\lambda - \lambda_k} - \int \frac{|u_k\rangle dk \langle v_k|}{\lambda - \lambda(k)}, \\ G_\lambda(x, x_0) &= \langle x | \underline{G}_\lambda | x_0 \rangle = - \sum_k \frac{u_k(x) v_k^*(x_0)}{\lambda - \lambda_k} - \int \frac{u(k, x) v^*(k, x_0)}{\lambda - \lambda(k)} dk.\end{aligned}\quad (3.74)$$

Die Funktion  $G_\lambda(x, x_0)$  erfüllt bezüglich  $x$  die Randbedingungen von  $\mathcal{L}$ . Aus Gl. (3.74) sieht man: Für  $\lambda = 0$  erhält man die übliche Funktion  $G(x, x_0)$ . Aus  $G_\lambda(x, x_0)$  kann man aber Information über die Lösung der Eigenwertprobleme Gl. (3.72) erhalten, denn

1. Bei  $\lambda = \lambda_k$  hat  $G_\lambda$  einen Pol erster Ordnung. Aus der Lage der Pole erster Ordnung von  $G_\lambda$  erhält man das diskrete Spektrum des Operators  $\underline{L}$  (und damit wegen  $\mu_k = \lambda_k^*$  auch das von  $\underline{L}^\dagger$ ).
2. Die Residuen von  $G_\lambda$  bei  $\lambda = \lambda_k$  haben den Wert  $-u_k(x) v_k^*(x_0)$ ; daraus kann man die Eigenfunktionen von  $\underline{L}$  und  $\underline{L}^\dagger$  ablesen.
3. Das kontinuierliche Spektrum  $\lambda = \lambda(k)$  (falls vorhanden) führt zu einem Verzweigungsschnitt von  $G_\lambda$ . Ist  $\underline{L} = \underline{L}^\dagger$ , so sind die Eigenwerte reell und der Verzweigungsschnitt liegt auf der reellen Achse der komplexen  $\lambda$ -Ebene.

Wenn man  $G_\lambda$  in der komplexen  $\lambda$ -Ebene über ein Gebiet integriert, welches alle diskreten Pole enthält, so erhält man aus Gl. (3.74) und mit der Vollständigkeitsrelation Gl. (3.10), Gl. (3.11)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi j} \oint \underline{G}_\lambda d\lambda &= - \sum_k |u_k\rangle \langle v_k| = \int |u_k\rangle dk \langle v_k| - \underline{I}, \\ \frac{1}{2\pi j} \oint G_\lambda(x, x_0) d\lambda &= - \sum_k u_k(x) v_k^*(x_0) = \int u(k, x) v^*(k, x_0) dk - \frac{\delta(x-x_0)}{r(x)} \\ &= \int u(k, x) v^*(k, x_0) dk - \frac{\delta(x-x_0)}{r(x_0)}.\end{aligned}\quad (3.75)$$

$r(x)$  bzw.  $r(x_0)$  steht wieder, je nachdem, ob bei Anwendung der Formel über  $x$  oder  $x_0$  integriert wird. Hat man  $\delta(x-x_0)$ , so läßt sich wie in Gl. (3.12) wieder jede Funktion nach Eigenfunktionen entwickeln. Zur Erläuterung werden zwei Beispiele durchgerechnet.

### 3.5.1 Beispiel zum diskreten Spektrum

Gegeben ist  $\underline{L} = \underline{L}^\dagger$  mit  $L = -d^2/dx^2$ ,  $\mathcal{L}: u(0) = u(1) = 0$ . Man ermittle die Eigenfunktionen und die Eigenwerte aus der Funktion  $G_\lambda$ . Aus Gl. (3.73) folgt

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - \lambda\right) G_\lambda(x, x_0) = \delta(x-x_0), \quad G_\lambda(0, x_0) = G_\lambda(1, x_0) = 0, \quad G_\lambda \text{ aus } \mathcal{L}.\quad (3.76)$$

Aus Gl. (2.52) erhält man mit

$$h_1(x) = \sin(x\sqrt{\lambda}), \quad h_2(x) = \sin[(1-x)\sqrt{\lambda}]$$

$$K(h_1, h_2)|_{x=x_0} = (h_2 h_1' - h_1 h_2')|_{x=x_0} = \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}$$

die GF  $G_\lambda(x, x_0)$

$$\begin{aligned}G_\lambda(x, x_0) &= \frac{\sin(x\sqrt{\lambda}) \sin[(1-x_0)\sqrt{\lambda}] H(x_0-x)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \\ &\quad + \frac{\sin(x_0\sqrt{\lambda}) \sin[(1-x)\sqrt{\lambda}] H(x-x_0)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}, \quad 0 \leq x_0 \leq 1.\end{aligned}\quad (3.77)$$

Bei  $\lambda = 0$  ist kein Pol vorhanden,  $\lambda = 0$  ist daher kein EW. Es ist kein Verzweigungsschnitt vorhanden, d. h. es existiert kein kontinuierliches Spektrum. Diskrete Pole liegen bei  $\lambda = \lambda_k = k^2\pi^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , sie sind einfach.

Bildet man in der  $\lambda$ -Ebene das Umlaufintegral über einen Kreis mit dem Radius  $R \rightarrow \infty$ , so umfaßt man alle Pole. Das Umlaufintegral hat den Wert  $2\pi j$  mal der Summe aller Residuen, man muß daher die Residuen an den Stellen  $\lambda_k = k^2\pi^2$  berechnen: Dazu werden in Gl. (3.77) die Winkelfunktionen aufgespalten:

$$G_\lambda = \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})[\sin\sqrt{\lambda}\cos(x_0\sqrt{\lambda}) - \cos\sqrt{\lambda}\sin(x_0\sqrt{\lambda})]H(x_0 - x)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}} + \frac{\sin(x_0\sqrt{\lambda})[\sin\sqrt{\lambda}\cos(x\sqrt{\lambda}) - \cos\sqrt{\lambda}\sin(x\sqrt{\lambda})]H(x - x_0)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}.$$

Die beiden Terme, aus denen man  $\sin\sqrt{\lambda}$  kürzen kann, haben keinen Pol mehr; zur Berücksichtigung bleiben die anderen beiden Terme, die von der Form  $aH(x_0 - x) + aH(x - x_0) = a$  sind:

$$\begin{aligned} G_\lambda &= \text{regulärer Anteil} - \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})\sin(x_0\sqrt{\lambda})\cos\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}} \\ &= \text{r.A.} - \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})\sin(x_0\sqrt{\lambda})\cos\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}\sin[(\sqrt{\lambda} - k\pi) + k\pi]} = \text{r.A.} - \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})\sin(x_0\sqrt{\lambda})\cos\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda} - k\pi)\cos(k\pi)} \\ &= \text{in Polnähe} \approx \text{r.A.} - \frac{\sin(k\pi x)\sin(k\pi x_0)}{k\pi\sin(\sqrt{\lambda} - k\pi)} = \text{r.A.} - \frac{\sin(k\pi x)\sin(k\pi x_0)}{k\pi(\sqrt{\lambda} - k\pi)} \\ &= \text{r.A.} - \frac{\sin(k\pi x)\sin(k\pi x_0)(\sqrt{\lambda} + k\pi)}{k\pi(\lambda - k^2\pi^2)} = \text{r.A.} - \frac{2\sin(k\pi x)\sin(k\pi x_0)}{\lambda - k^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Das Residuum bei  $\lambda = k^2\pi^2$  ist daher  $-2\sin(k\pi x)\sin(k\pi x_0)$ . Aus Gl. (3.75) folgt:

$$-\frac{1}{2\pi j} \oint G_\lambda(x, x_0)d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} 2\sin(k\pi x)\sin(k\pi x_0) = \delta(x - x_0), \quad (3.78)$$

$$u_k(x) = v_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x). \quad (3.79)$$

Da mit Gl. (3.78) die Vollständigkeitsrelation gegeben ist, kann jede Funktion im Intervall  $0 < x < 1$  nach den Funktionen  $u_k(x)$  oder  $v_k(x)$  entwickelt werden (von null verschiedene Randwerte werden im Grenzwert bei Annäherung an  $x = 0$ ,  $x = 1$  aus dem Inneren des Intervalls erreicht).

### 3.5.2 Beispiel zum kontinuierlichen Spektrum

Gegeben ist

$$\underline{L} = \underline{L}^\dagger, \quad L = -d^2/dx^2, \quad \mathcal{L}: \quad u(0) = 0, \quad \int_0^\infty |u|^2 dx < M.$$

Aus Gl. (3.73) folgt:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - \lambda\right) G_\lambda(x, x_0) = \delta(x - x_0), \quad G_\lambda(0, x_0) = 0, \quad G_\lambda(\infty, x_0) = 0. \quad (3.80)$$

Zum Einsetzen in Gl. (2.52) wählt man

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \sin(x\sqrt{\lambda}), \\ h_2(x) &= \exp(jx\sqrt{\lambda}), \end{aligned} \quad K(h_1, h_2)|_{x=x_0} = (h_2 h_1' - h_1 h_2')|_{x=x_0} = \sqrt{\lambda}. \quad (3.81)$$

$h_1(x)$  erfüllt die Randbedingung bei  $x = 0$ . Damit die Funktion  $h_2(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  die Randbedingung erfüllt, muß  $\sqrt{\lambda}$  einen positiven Imaginärteil besitzen. Das ist ( $\varepsilon > 0$  sei ein kleiner, positiver

Wert) dann der Fall, wenn  $\varepsilon < \arg \lambda < 2\pi - \varepsilon$  gilt: Die positive reelle Achse einer komplexen  $\lambda$ -Ebene ist dadurch ausgeschlossen. Die Greensche Funktion  $G_\lambda$  ist somit

$$\begin{aligned} G_\lambda(x, x_0) &= \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})e^{jx_0\sqrt{\lambda}}H(x_0 - x) + \sin(x_0\sqrt{\lambda})e^{jx\sqrt{\lambda}}H(x - x_0)}{\sqrt{\lambda}} \\ &= \frac{e^{j(x+x_0)\sqrt{\lambda}}}{2j\sqrt{\lambda}} - \frac{e^{j(x_0-x)\sqrt{\lambda}}}{2j\sqrt{\lambda}}H(x_0 - x) - \frac{e^{j(x-x_0)\sqrt{\lambda}}}{2j\sqrt{\lambda}}H(x - x_0). \end{aligned} \quad (3.82)$$

$G_\lambda$  besitzt keine diskreten Pole in der komplexen  $\lambda$ -Ebene ( $\lambda = 0$  ist kein Pol), und somit hat der Operator  $\underline{L} = \underline{L}^\dagger$  weder diskrete Eigenwerte noch diskrete Eigenfunktionen. Die Funktionen  $\sin(x\sqrt{\lambda})/\sqrt{\lambda}$  sind nicht mehrdeutig (eine Reihenentwicklung enthält nur ganzzahlige Potenzen von  $\lambda$ ), wohl aber die Funktion  $\exp(jx\sqrt{\lambda})$ .

Die Funktion  $w(\lambda) = \sqrt{\lambda}$  ist mehrdeutig. Setzt man  $\lambda = R \exp(j\varphi)$  ( $R$  konstant,  $\varphi$  variabel), so erhält man im Bereich

$$\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon \quad \text{für} \quad w_1(\lambda) = \sqrt{R}e^{j\varepsilon/2} \dots - \sqrt{R}e^{-j\varepsilon/2}, \quad (3.83)$$

aber für die identischen Werte von  $\lambda$  im Bereich

$$2\pi + \varepsilon < \varphi < 4\pi - \varepsilon \quad \text{für} \quad w_2(\lambda) = -\sqrt{R}e^{j\varepsilon/2} \dots \sqrt{R}e^{-j\varepsilon/2}. \quad (3.84)$$

Ver mehrt man  $\varphi$  um weitere Vielfache von  $2\pi$ , so wiederholen sich die Funktionswerte für  $w(\lambda)$  von Gl. (3.83) bzw. Gl. (3.84). Es sind somit jedem Wert von  $\lambda = R \exp(j\varphi)$  zwei verschiedene Funktionswerte  $w_1(\lambda)$ ,  $w_2(\lambda)$  zugeordnet: Man kann sie auf zwei getrennte Blätter der  $\lambda$ -Ebene schreiben, die man längs der positiven reellen Achse aufschneidet (Verzweigungsschnitt) und kreuzweise so verbindet, wie dies in Abb. (3.5) gezeigt ist. Umkreist man den Punkt  $\lambda = 0$ , so bewegt man sich

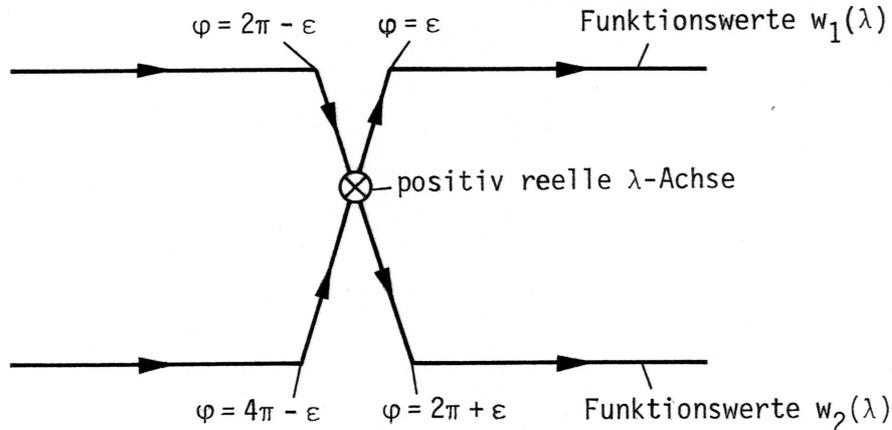


Abbildung 3.5: Die beiden Blätter der komplexen  $\lambda$ -Ebene, auf denen jeweils die Funktionswerte von  $w = \sqrt{\lambda}$  aufgetragen sind; für  $\lambda$  ist  $\lambda = R \exp(j\varphi)$  gesetzt

für  $\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon$  im ersten Blatt, welches mit den Funktionswerten  $w_1(\lambda)$  nach Gl. (3.83) belegt ist, wechselt dann in das zweite, mit den Funktionswerten  $w_2(\lambda)$  gemäß Gl. (3.84) belegte Blatt; nach einer nochmaligen Umkreisung des Ursprungs,  $2\pi + \varepsilon < \varphi < 4\pi - \varepsilon$  wechselt man in das erste Blatt zurück. Beim Berechnen von Umlaufintegralen ist darauf zu achten, daß nicht irrtümlich ein Verzweigungsschnitt übersprungen wird.

Eine axonometrische Darstellung der zur Funktion  $w = \sqrt{\lambda}$  gehörenden zweiblättrigen Riemannschen Fläche zeigt Abb. (3.7) am Ende dieses Kapitels.

Im gegebenen Fall von  $G_\lambda(x, x_0)$  gemäß Gl. (3.82) war  $\varepsilon < \arg \lambda < 2\pi - \varepsilon$  vorausgesetzt. Ein Umlaufintegral über  $G_\lambda$ , welches einen Verzweigungsschnitt längs der positiv reellen  $\lambda$ -Achse

besitzt, hat daher im ersten Blatt der  $\lambda$ -Ebene zu verlaufen. Wegen Gl. (3.75) und weil keine diskreten Pole vorhanden sind, folgt

$$\frac{1}{2\pi j} \oint G_\lambda(x, x_0) d\lambda = 0 = \int u(k, x) v^*(k, x_0) dk - \delta(x - x_0). \quad (3.85)$$

Als Integrationsweg wählt man den in Abb. (3.6) gezeigten, der entlang der Ufer des Verzweigungsschnittes verläuft und über den Kreisbogen im Unendlichen der  $\lambda$ -Ebene geschlossen wird. Das

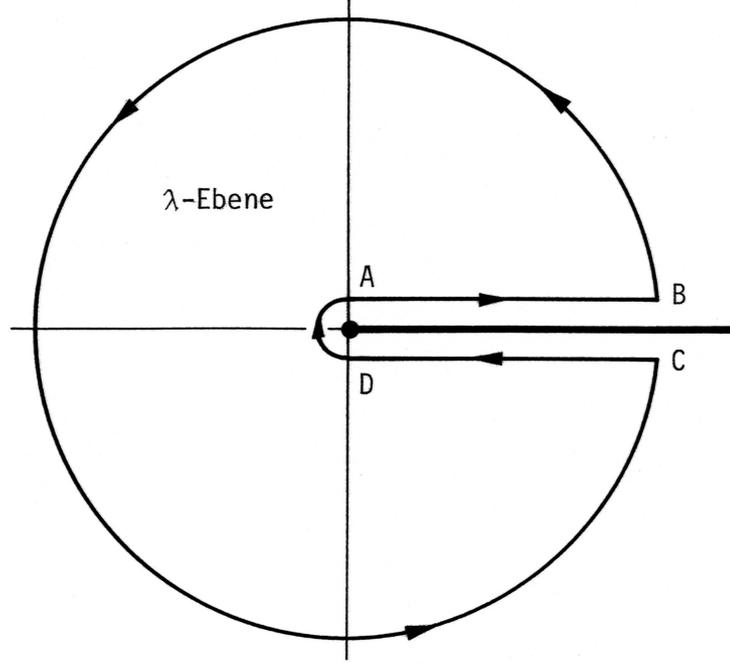


Abbildung 3.6: Integrationsweg für  $G_\lambda$  von Gl. (3.85) in der komplexen  $\lambda$ -Ebene. Er liegt im ersten Blatt der  $\lambda$ -Ebene mit  $\varepsilon < \arg \lambda < 2\pi - \varepsilon$

Integral der Funktion Gl. (3.82) über den Kreisbogen von B nach C verschwindet für  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon < \arg \lambda < 2\pi - \varepsilon$ , wenn die in den Exponenten vorkommenden Werte von  $x + x_0$ ,  $x_0 - x$ ,  $x - x_0$  jeweils positiv sind. In den Anteilen, welche die  $H$ -Funktionen enthalten, ist das sicher der Fall; der Punkt  $x = x_0 = 0$  sei zunächst ausgeschlossen (da die Eigenfunktionen im Bereich  $x \geq 0$ ,  $x_0 \geq 0$  gesucht werden, ist  $x + x_0 \leq 0$  dann ebenfalls unmöglich). Ebenso verschwindet das Integral über den Halbkreis von D nach A für  $\lambda = r \exp(j\varphi)$  mit  $r \rightarrow 0$ , weil dann  $d\lambda/\sqrt{\lambda} \rightarrow 0$  gilt. Aus Gl. (3.85) bleibt

$$0 = \int_A^B G_\lambda(x, x_0) d\lambda + \int_C^D G_\lambda(x, x_0) d\lambda. \quad (3.86)$$

Im ersten Integral ist  $\lambda = R + jr$ , im zweiten Integral gilt  $\lambda = R - jr$  mit  $0 \leq R < \infty$ ,  $r > 0$ ,  $r \rightarrow 0$ . Die Greensche Funktion nimmt dort folgende Werte an:

$$G_\lambda^{(+)}(x, x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} G_\lambda(x, x_0)|_{\lambda=R+jr}, \quad R \geq 0, \quad \text{oberes Ufer}, \quad (3.87)$$

$$G_\lambda^{(-)}(x, x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} G_\lambda(x, x_0)|_{\lambda=R-jr}, \quad R \geq 0, \quad \text{unteres Ufer}. \quad (3.88)$$

Aus Gl. (3.86) folgt

$$0 = \frac{1}{2\pi j} \oint G_\lambda(x, x_0) d\lambda = \frac{1}{2\pi j} \int_0^\infty [G_\lambda^{(+)}(x, x_0) - G_\lambda^{(-)}(x, x_0)] dR. \quad (3.89)$$

Bildet man mit der Greenschen Funktion Gl. (3.82) die Grenzwerte von Gl. (3.87), Gl. (3.88), so erhält man folgendes Ergebnis

$$\begin{aligned} G_\lambda^{(+)}(x, x_0) &= \frac{\sin(x\sqrt{R})e^{jx_0\sqrt{R}}H(x_0 - x) + \sin(x_0\sqrt{R})e^{jx\sqrt{R}}H(x - x_0)}{\sqrt{R}}, \\ G_\lambda^{(-)}(x, x_0) &= \frac{\sin(-x\sqrt{R})e^{-jx_0\sqrt{R}}H(x_0 - x) + \sin(-x_0\sqrt{R})e^{-jx\sqrt{R}}H(x - x_0)}{(-\sqrt{R})}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Daraus folgt für den Integranden von Gl. (3.89)

$$\frac{1}{2\pi j} \left[ G_\lambda^{(+)}(x, x_0) - G_\lambda^{(-)}(x, x_0) \right] = \frac{1}{\pi\sqrt{R}} \sin(x\sqrt{R}) \sin(x_0\sqrt{R}), \quad (3.91)$$

und aus Gl. (3.89) erhält man mit der Substitution  $R = k^2$

$$0 = \frac{1}{2\pi j} \oint G_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx_0) dk. \quad (3.92)$$

Dieses Ergebnis gilt unter der Voraussetzung, daß  $x \neq x_0$ ,  $x \neq 0$ ,  $x > 0$ ,  $x_0 > 0$  ist; das Verschwinden des Integrals über  $G_\lambda$  längs des unendlichen Kreisbogens wurde mit dem Verschwinden von  $G_\lambda$  für  $\varepsilon < \arg \lambda < 2\pi - \varepsilon$  begründet, was nach Gl. (3.82) aber voraussetzt, daß die genannten Bedingungen für  $x, x_0$  erfüllt sind.

Welchen Wert nimmt das Integral von Gl. (3.92) an, wenn man diese Bedingungen fallen läßt? Ersetzt man in Gl. (3.92) die Sinusfunktionen durch Exponentialfunktionen und substituiert  $k = 2\pi\kappa$ , so erhält man:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(kx) \sin(kx_0) dk \\ &= - \int_0^\infty \left[ e^{2\pi j\kappa(x+x_0)} + e^{-2\pi j\kappa(x+x_0)} - e^{2\pi j\kappa(x-x_0)} - e^{-2\pi j\kappa(x-x_0)} \right] d\kappa \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi j\kappa(x+x_0)} d\kappa + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi j\kappa(x-x_0)} d\kappa \\ &= \delta(x - x_0) - \delta(x + x_0). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Durch Vergleich mit Gl. (3.85) liest man ab, daß im Bereich  $0 \leq x < \infty$  die Eigenfunktionen durch  $u(k, x) = v(k, x) = \sqrt{2/\pi} \sin(kx)$ ,  $0 \leq k < \infty$  gegeben sind. Die Vollständigkeitsrelation lautet

$$\delta(x - x_0) = \delta(x + x_0) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(kx) \sin(kx_0) dk. \quad (3.94)$$

Multipliziert man sie mit einer Funktion  $g(x_0)$  und integriert formal über den Bereich  $-\infty < x_0 < \infty$ , so erhält man das Ergebnis

$$g(x) = g(-x) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(kx) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_0) \sin(kx_0) dx_0 \right] dk. \quad (3.95)$$

Zunächst wurden Eigenfunktionen nur für das Intervall  $0 \leq x < \infty$  gefunden, und es können Funktionen nur in diesem Intervall entwickelt werden. Für jede Funktion mit  $g(x) = 0$  für  $x < 0$ ,  $g(x) \neq 0$  für  $x > 0$  ist für  $x > 0$  Gl. (3.95) die richtige Entwicklung, da  $g(-x) = 0$ ; ein Randwert

$g(0) \neq 0$  wird wieder richtig wiedergegeben, wenn man sich der Stelle  $x = 0$  von  $x > 0$  asymptotisch nähert (alle Eigenfunktionen  $\sin(kx)$  verschwinden für  $x = 0$ , ergo darf der Randpunkt nicht naiv eingesetzt werden).

Wenn man die Funktionen  $\sin(kx)$  für  $x < 0$  extrapoliert, so zeigt Gl. (3.95), daß nicht mehr beliebige Funktionen  $g(x)$  im Intervall  $-\infty < x < \infty$  nach Funktionen  $\sin(kx)$  entwickelt werden können: Das ist einleuchtend, weil die Funktionen  $\sin(kx)$  ungerade sind. Gl. (3.95) sagt aber gerade aus, daß  $[g(x) - g(-x)]/2$ , also der ungerade Anteil einer beliebigen Funktion  $g(x)$  nach den Funktionen  $\sin(kx)$  entwickelbar ist. Die Transformation ist die Fourier-Sinustransformation, der Ausdruck in der eckigen Klammer von Gl. (3.95) ist das Fourier-Sinusspektrum einer Funktion  $g(x)$ .

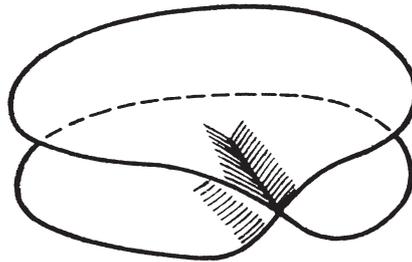


Abbildung 3.7: Die beiden Blätter der komplexen  $\lambda$ -Ebene, auf denen jeweils die Funktionswerte von  $w = \sqrt{\lambda}$  aufgetragen sind.

# Kapitel 4

## Partielle Differentialgleichungen

### 4.1 Deltafunktionen in mehreren Dimensionen

In einem  $n$ -dimensionalen kartesischen Raum sind kartesische Koordinaten  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) gegeben. Das Volumenelement wird als  $d\tau = dx_1 dx_2 \dots dx_n$  bezeichnet.

Die Funktionen  $\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \xi_i(x_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  transformieren auf andere orthogonale Koordinaten. Mit der Funktionaldeterminante

$$D = \det \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} \quad (4.1)$$

läßt sich das Volumen eines  $n$ -dimensionalen Bereichs (die Grenzen der Integrale sind entsprechend zu wählen) folgendermaßen ausdrücken:

$$\int d\tau = \iiint \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n = \iiint \dots \int |D| d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \quad (4.2)$$

Man unterscheidet zwei Fälle.

Fall 1: Im betrachteten Punkt gilt  $D \neq 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \delta(x_1 - x_{10}) \delta(x_2 - x_{20}) \dots \delta(x_n - x_{n0}) &= \delta(x_i - x_{i0}) \\ &= \frac{1}{|D|} \delta(\xi_1 - \xi_{10}) \delta(\xi_2 - \xi_{20}) \dots \delta(\xi_n - \xi_{n0}) = \frac{1}{|D|} \delta(\xi_i - \xi_{i0}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Man beachte die als Abkürzung gewählte Schreibweise  $\delta(x_i - x_{i0})$ . Wenn es sich speziell um Vektoren in einem dreidimensionalen Raum handelt, werden sie als  $\vec{x}$  bezeichnet;  $\vec{x} \hat{=} (x_1, x_2, x_3)$  oder  $\vec{r} \hat{=} (x, y, z)$  ist der Ortsvektor im dreidimensionalen Raum. Die Abkürzung  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  steht also für das Produkt von drei Deltafunktionen  $\delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$ . Das Volumenelement im dreidimensionalen Raum wird als  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$  oder  $dV = dx dy dz$  bezeichnet.

Fall 2: Im betrachteten Punkt ist  $D = 0$ . Dann ist der Punkt durch die Koordinaten  $\xi_{i0}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) definiert, wogegen die Koordinaten  $\xi_{i0}$  ( $i = k+1, k+2, \dots, n$ ) beliebige Werte annehmen können (man bezeichnet sie deshalb als ignorable Koordinaten). Man definiert eine Größe  $D_k$ , indem man die Funktionaldeterminante  $D$  über den gesamten Wertebereich der ignorablen Koordinaten integriert:

$$D_k = \iiint \dots \int D d\xi_{k+1} d\xi_{k+2} \dots d\xi_n. \quad (4.4)$$

Damit erhält man für solche Punkte

$$\delta(x_i - x_{i0}) = \frac{1}{|D_k|} \delta(\xi_1 - \xi_{10}) \delta(\xi_2 - \xi_{20}) \dots \delta(\xi_k - \xi_{k0}). \quad (4.5)$$

### 4.1.1 Zylinderkoordinaten

Kartesische Koordinaten  $\vec{r}^{\wedge}(x, y, z)$  werden auf Zylinderkoordinaten transformiert ( $\xi_1 = \rho$ ,  $\xi_2 = \varphi$ ,  $\xi_3 = z$ ). Man erhält mit Gl. (4.1) aus

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

die Funktionaldeterminante und das Volumenelement

$$D = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho, \quad dV = \rho d\rho d\varphi dz. \quad (4.6)$$

### 4.1.2 Kugelkoordinaten

Kartesische Koordinaten  $\vec{r}^{\wedge}(x, y, z)$  werden auf Kugelkoordinaten transformiert ( $\xi_1 = r$ ,  $\xi_2 = \vartheta$ ,  $\xi_3 = \varphi$ ). Mit

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

folgt für die Funktionaldeterminante Gl. (4.1) und für das Volumenelement

$$D = \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \vartheta, \quad dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi. \quad (4.7)$$

### 4.1.3 Die $\delta$ -Funktion in Kugelkoordinaten

In Anwendung von Gl. (4.3) folgt unter Beachtung von Gl. (4.7) für die Deltafunktion in Kugelkoordinaten in einem Punkt mit  $D \neq 0$

$$\begin{aligned} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) &= \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \delta(r - r_0)\delta(\vartheta - \vartheta_0)\delta(\varphi - \varphi_0). \end{aligned} \quad (4.8)$$

### 4.1.4 Beispiel für eine ignorable Koordinate

Für einen Punkt auf der  $z$ -Achse gilt in Kugelkoordinaten  $\vartheta = 0$  (für  $z > 0$ ) und  $\vartheta = \pi$  (für  $z < 0$ ). An allen Punkten  $z \neq 0$  auf der  $z$ -Achse ist somit  $D = r^2 \sin \vartheta = 0$ . Die Koordinate  $\varphi$  ist ignorable. Aus Gl. (4.4) folgt

$$D_k = \int_0^{2\pi} r^2 \sin \vartheta d\varphi = 2\pi r^2 \sin \vartheta$$

und somit in Anwendung von Gl. (4.5)

$$\begin{aligned} \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0) &= \frac{\delta(r - r_0)\delta(\vartheta)}{2\pi r^2 \sin \vartheta}, \quad z_0 > 0, \\ \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0) &= \frac{\delta(r - r_0)\delta(\vartheta - \pi)}{2\pi r^2 \sin \vartheta}, \quad z_0 < 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

### 4.1.5 Beispiel für zwei ignorable Koordinaten

Im Koordinatenursprung gilt  $r = 0$ , die Koordinaten  $\vartheta$ ,  $\varphi$  sind ignorable. Ferner ist  $D = r^2 \sin \vartheta = 0$ . Nach Gl. (4.4) ist

$$D_k = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} r^2 \sin \vartheta d\vartheta = 4\pi r^2,$$

und aus Gl. (4.5) folgt für die Deltafunktion im Ursprung

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}. \quad (4.10)$$

Es ist zu beachten, daß bei Integration von Gl. (4.3) über den gesamten Raum das Ergebnis 1 lautet. Dabei kann es vorkommen, daß in den transformierten Koordinaten  $\xi_i$  eine Deltafunktion ihre Singularität gerade an der Integralgrenze erreicht: In diesem Fall ist, wie in Gl. (1.52) begründet, die Integrationsgrenze so abzuändern, daß die Singularität „zur Gänze“ noch im Integrationsintervall liegt. So erhält man z. B. aus Gl. (4.10)

$$\begin{aligned} \int \delta(\vec{r}) dV &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z) dx dy dz = 1 \\ &= \int_{0-}^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} r^2 \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \int_{0-}^{\infty} \delta(r) dr = 1. \end{aligned}$$

## 4.2 Lineare Operatoren und Randbedingungen

In Analogie zu den Beziehungen Gl. (1.89), Gl. (1.91) erhält man mit der Schreibweise von Abschn. (4.1) für die Anwendung auf  $n$ -dimensionale kartesische Räume als Vollständigkeits- und Orthogonalitätsrelation

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_i\rangle d\tau \langle x_i| &= \underline{1} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1, x_2, \dots, x_n\rangle dx_1 dx_2 \dots dx_n \langle x_1, x_2, \dots, x_n|, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \langle x_i | x_{i0} \rangle &= \delta(x_i - x_{i0}) \\ &= \delta(x_1 - x_{10}) \delta(x_2 - x_{20}) \dots \delta(x_n - x_{n0}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Für Gewichtsfunktionen ist somit hier  $r(x_i) = 1$  vorausgesetzt. Von den auf die Komponenten  $u(x_i) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  abstrakter Vektoren  $|u\rangle$  operierenden formalen Operatoren  $L$  sei vorausgesetzt, daß sie skalar sind und höchstens zweite Ableitungen nach den  $x_i$  enthalten. Sie operieren auf Skalarfunktionen. In Analogie zu Gl. (1.94) gilt somit:

$$\begin{aligned} |g\rangle &= \underline{L}|u\rangle, \\ \langle x_i | g \rangle &= g(x_i) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \langle x_i | \underline{L}|u\rangle = Lu(x_i) = Lu(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \int \langle x_i | \underline{L}|x'_i\rangle d\tau' \langle x'_i | u \rangle = \int L(x_i, x'_i) u(x'_i) d\tau', \\ L(x_i, x'_i) &= \langle x_i | \underline{L}|x'_i\rangle = L(x_1, x_2, \dots, x_n; x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \\ \langle g | x_i \rangle &= \langle x_i | g \rangle^* = g^*(x_i). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Sind die  $x_i$  Koordinaten in einem dreidimensionalen Raum, verwendet man wieder die in Abschn. (4.1) verabredete Schreibweise, also z. B.  $\langle \vec{x} | u \rangle = u(\vec{x}) = u(x_1, x_2, x_3)$ .

Der Gaußsche Integralsatz läßt sich auf einen  $n$ -dimensionalen Raum verallgemeinern. Es gilt im dreidimensionalen Raum ( $dF$  Flächenelement,  $\vec{e}$  nach außen orientierter Normalenvektor der Hüllfläche)

$$\begin{aligned}\int \nabla \cdot \vec{A} dV &= \int \operatorname{div} \vec{A} dV = \oint \vec{A} \cdot \vec{e} dF, \\ \int dV \nabla \dots &= \oint dF \vec{e} \dots\end{aligned}\tag{4.14}$$

Die zweite Schreibweise deutet an, daß die Beziehung richtig bleibt, wenn auf beiden Seiten der Gleichung anstelle der Punkte dieselbe Operation durchgeführt wird.

In  $n$  Dimensionen wird der Nablavektor durch das Symbol  $\partial_i = \partial/\partial x_i$  ersetzt; der Betrag des Flächenelements einer  $(n-1)$ -dimensionalen Hyperfläche, welche einen  $n$ -dimensionalen Bereich begrenzt, wird als  $d\sigma$  angeschrieben;  $e_i$  ist der nach außen orientierte Normalenvektor der Hyperfläche. Es gilt ferner die Vereinbarung der analytischen Schreibweise, daß über alle Indizes, die paarweise vorkommen, über  $i = 1, 2, \dots, n$  summiert wird (dies gilt nicht für Indizes, die in Argumenten von verschiedenen Bras, Kets oder Funktionen vorkommen, vergleiche Gl. (4.13)!). Damit lautet der zu Gl. (4.14) analoge Satz

$$\begin{aligned}\int \partial_i A_i d\tau &= \oint A_i e_i d\sigma, \\ \int d\tau \partial_i \dots &= \oint d\sigma e_i \dots\end{aligned}\tag{4.15}$$

Analog zu den in Abschn. (2.1) aufgestellten Forderungen sollen die Vektoren  $|u\rangle$  und  $\underline{L}|u\rangle$  endliche Länge haben.

Der abstrakte Operator  $\underline{L}$  legt fest:

1. Den formalen Operator  $L$ , der auf Komponenten  $u(x_i) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  von  $|u\rangle$  operiert.
2. Den Operatorbereich  $\mathcal{L}$ , wodurch auf einer geschlossenen  $(n-1)$ -dimensionalen Hyperfläche für  $u(x_i)$  bestimmte Randbedingungen festgelegt werden.

Die Randbedingungen können homogen oder inhomogen sein. Sie heißen:

1. Randbedingungen 1. Art (Dirichlet-Bedingungen): Dabei ist  $u(x_i)$  auf der Hyperfläche gegeben.
2. Randbedingungen 2. Art (Neumann-Bedingungen): Dabei ist die Normalenableitung von  $u$  auf der Hyperfläche gegeben, also  $e_i \partial_i u$ ; für diesen Ausdruck verwendet man oft auch die symbolische Schreibweise  $\partial u / \partial e$  (siehe auch den folgenden Kommentar).
3. Randbedingungen 3. Art: In diesem Fall ist auf der Hyperfläche eine Linearkombination  $u + \alpha \partial u / \partial e$  gegeben.
4. Anfangsbedingungen (Cauchy-Bedingungen): Identifiziert man eine der Koordinaten (z. B.  $x_n$ ) mit der Zeitvariablen, so kann auf einer Hyperebene  $x_n = \text{const}$  die Funktion  $u(x_i)$  und  $\partial u / \partial x_n$  gegeben sein.

Kommentar zur Normalenableitung: Bezeichnet man das Linienelement einer Raumkurve im  $n$ -dimensionalen Raum mit  $ds$ ,

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 = dx_j dx_j$$

und beachtet, daß der Tangentenvektor einer Raumkurve  $x_i = x_i(s)$  durch  $e_i = dx_i/ds$  gegeben ist, so gilt für eine Funktion  $u(x_i)$  ( $e_i$  sei jetzt die Richtung der Flächennormale)

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = e_i \partial_i u = \frac{\partial u}{\partial e}.$$

Im dreidimensionalen Raum ist  $\partial_i u$  gerade  $\text{grad}u$ , und daher schreibt man für die Normalenableitung

$$\partial u / \partial e = \vec{e} \cdot \text{grad}u.$$

Es hängt von der Art des Operators  $\underline{L}$  ab, durch welche Randbedingungen für  $u(x_i) = \langle x_i | u \rangle$  die Lösung des Problems  $\underline{L}|u\rangle = |g\rangle$  eindeutig festgelegt ist. Dazu einige Beispiele:

1.  $L = \nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  im dreidimensionalen Raum ist ein sogenannter elliptischer Operator. Die Eindeutigkeit der Lösungen verlangt Randbedingungen erster, zweiter oder dritter Art.
2.  $L = \nabla^2 - a^2 \partial/\partial t = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 - a^2 \partial/\partial t$  (der Operator der Wärmeleitungsgleichung) ist ein sogenannter parabolischer Operator. Die Lösungen sind eindeutig bestimmt, wenn für  $t = t_1$  an allen Raumpunkten  $(x, y, z)$  eines dreidimensionalen Bereichs die Größe  $u(x, y, z, t_1)$  gegeben ist, und wenn ferner zu allen Zeiten auf der Hüllfläche dieses dreidimensionalen Bereichs Randbedingungen erster, zweiter oder dritter Art vorgeschrieben sind.
3.  $L = \nabla^2 - (1/c^2) \partial^2/\partial t^2$  (der Operator der Wellengleichung) ist ein hyperbolischer Operator. Für eindeutige Lösungen muß zu einem Zeitpunkt  $t = t_1$  an allen Raumpunkten  $(x, y, z)$  eines dreidimensionalen Bereichs sowohl  $u$  als auch  $\partial u/\partial t$  vorgegeben sein, ferner muß zu allen Zeiten auf der Hüllfläche dieses dreidimensionalen Bereichs eine Randbedingung erster, zweiter oder dritter Art vorgeschrieben sein.

### 4.3 Adjungierter Operator. Operatoren im erweiterten Sinn

Der adjungierte Operator  $\underline{L}^\dagger$  ist durch Gl. (1.96) definiert. Bei seiner Berechnung (etwa analog Gl. (2.23) durch partielle Integration) spielen die Randwerte eine Rolle. In Verallgemeinerung von Gl. (2.23), Gl. (2.25) kann man in einem  $n$ -dimensionalen Raum schreiben (man beachte den Gaußschen Satz Gl. (4.15))

$$\begin{aligned} \langle v | \underline{L} | u \rangle &= \langle u | \underline{L}^\dagger | v \rangle^* + \int \partial_i K_i(v^*, u) d\tau \\ &= \langle u | \underline{L}^\dagger | v \rangle^* + \oint e_i K_i(v^*, u) d\sigma, \\ \text{mit} \quad \int \partial_i K_i(v^*, u) d\tau &= \oint e_i K_i(v^*, u) d\sigma = 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Für den Fall, daß es sich um einen dreidimensionalen Bereich handelt, sind wegen Gl. (4.14) die Integrale über  $\text{div} \vec{K}(v^*, u) dV$  bzw. über  $\vec{e} \cdot \vec{K}(v^*, u) dF$  zu bilden. Das Konjunkt Gl. (2.24) wird im  $n$ -dimensionalen Raum zu einem Konjunktvektor. Aus Gl. (4.16) sieht man, daß der Konjunktvektor nicht eindeutig festgelegt ist: Man kann immer einen Anteil hinzufügen, für dessen  $n$ -dimensionale Divergenz  $\partial_i K_i = 0$  gilt.

Für die Operatoren  $\underline{L}$ ,  $\underline{L}^\dagger$  und einen Operator  $\underline{L}_I$  gilt wieder:

1.  $\underline{L}$  ist gegeben durch den formalen Operator  $L$ , der auf Funktionen  $u(x_i)$  operiert (die Komponenten von  $|u\rangle$ ); der Operatorbereich  $\mathcal{L}$  wird so gewählt, daß für  $u(x_i)$  homogene Randbedingungen gelten.
2.  $\underline{L}^\dagger$  ist definiert durch den formal adjungierten Operator  $L^\dagger$ , der auf Funktionen  $v(x_i)$  operiert (die Komponenten von  $|v\rangle$ ); der adjungierte Operatorbereich  $\mathcal{L}^\dagger$  ist so zu wählen, daß mit den Funktionen  $u(x_i)$  aus  $\mathcal{L}$  und den Funktionen  $v(x_i)$  aus  $\mathcal{L}^\dagger$  gerade die Bedingung von Gl. (4.16) für das Konjunkt erfüllt ist.

3. Der Operator  $\underline{L}_I$  ist gegeben (siehe früher vor Gl. (2.29)) durch den formalen Operator  $L$ , der aber jetzt auf Funktionen  $w(x_i)$  operiert (auf die Komponenten von  $|w\rangle$ ); der Operatorbereich  $\mathcal{L}_I$  ist so gewählt, daß die Funktionen  $w(x_i)$  inhomogene Randbedingungen erfüllen, die aber von derselben Struktur sind, wie die homogenen Randbedingungen für die Funktionen  $u(x_i)$  aus  $\mathcal{L}$ .

Analog zu Gl. (2.29) gilt

$$\begin{aligned}\langle v|\underline{L}_I|w\rangle &= \langle w|\underline{L}^\dagger|v\rangle^* + \int \partial_i K_i(v^*, w) d\tau \\ &= \langle w|\underline{L}^\dagger|v\rangle^* + \oint e_i K_i(v^*, w) d\sigma, \\ \text{mit} \quad \int \partial_i K_i(v^*, w) d\tau &= \oint e_i K_i(v^*, w) d\sigma \neq 0.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Analog zu Gl. (2.30) kann man durch formales Adjungieren der sinnvollen Zahl  $\langle w|\underline{L}^\dagger|v\rangle$  einen Operator  $\underline{L}_e$  (Operator im erweiterten Sinn) in seiner Wirkung auf  $|w\rangle$  definieren:

$$\langle w|\underline{L}^\dagger|v\rangle^* = \langle v|\underline{L}_e|w\rangle.\tag{4.18}$$

Aus der Definition Gl. (4.18) erhält man mit Gl. (4.17) wieder einen zu Gl. (2.32) analogen Ausdruck für den erweiterten Operator:

$$\begin{aligned}\langle v|\underline{L}_e|w\rangle &= \langle v|\underline{L}_I|w\rangle - \int_{(+)} \partial_i K_i(v^*, w) d\tau \\ &= \langle v|\underline{L}_I|w\rangle - \oint e_i K_i(v^*, w) d\sigma \\ &= \langle v|\underline{L}_I|w\rangle - \langle v|\underline{L}_1|w\rangle = \langle v|\underline{L}_I|w\rangle + \langle v|s\rangle, \\ \langle v|\underline{L}_1|w\rangle &= -\langle v|s\rangle \\ &= \int_{(+)} \partial_i K_i(\langle v|x_i\rangle, \langle x_i|w\rangle) d\tau \\ &= \oint e_i K_i(\langle v|x_i\rangle, \langle x_i|w\rangle) d\sigma.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Dabei wurde analog Gl. (2.31) der Operator  $\underline{L}_I$  wieder als eine Störung von  $\underline{L}_e$  betrachtet,  $\underline{L}_I = \underline{L}_e + \underline{L}_1$ . Da im Integranden symbolische Funktionen auftreten können, welche ihre Singularitäten gerade am Rand des Integrationsbereichs haben, sind in Analogie zu Gl. (2.33) die Volumenintegrale wieder „bis etwas außerhalb des Bereichs“ zu erstrecken. Das ist durch das an der unteren Integrationsgrenze symbolisch angebrachte Pluszeichen in Gl. (4.19) angedeutet.

### 4.3.1 Beispiel 1: Der Konjunktvektor und der Operator $L^\dagger$

Gegeben sei der Operator

$$\underline{L}: \quad L = p(x_i) \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \mathcal{L}: \quad u(0, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq 1.\tag{4.20}$$

Man ermittle  $\underline{L}^\dagger$ . Aus Gl. (4.16) folgt

$$\begin{aligned}\int v^* p \frac{\partial u}{\partial x_1} d\tau &= \iiint \dots \int dx_2 dx_3 \dots dx_n \int_0^1 v^* p \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 \\ &= \iiint \dots \int dx_2 dx_3 \dots dx_n \left\{ v^* p u \Big|_{x_1=0}^{x_1=1} - \int_0^1 u \frac{\partial}{\partial x_1} (p v^*) dx_1 \right\} \\ &= \int u \left[ -\frac{\partial}{\partial x_1} (p^* v) \right]^* d\tau + \int \frac{\partial}{\partial x_1} (p v^* u) d\tau.\end{aligned}$$

Durch Vergleich mit Gl. (4.16) liest man ab, daß der Konjunktvektor nur eine Komponente in Richtung der 1-Achse hat (alle anderen Komponenten können null gesetzt werden),

$$K_i \hat{=} (pv^*u, 0, 0, \dots, 0), \quad (n \text{ Komponenten}). \quad (4.21)$$

Ferner sieht man durch Vergleich mit Gl. (4.16), daß der Ausdruck

$$\iint \dots \int dx_2 dx_3 \dots dx_n [pv^*u|_{x_1=1} - pv^*u|_{x_1=0}] = 0 \quad (4.22)$$

erfüllt sein muß. Daraus kann man  $v(1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$  für den adjungierten Operatorbereich ablesen. Das Ergebnis für den zu Gl. (4.20) adjungierten Operator lautet somit:

$$\underline{L}^\dagger : \quad L^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x_1} [p^*(x_i) \dots], \quad \mathcal{L}^\dagger : \quad v(1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0. \quad (4.23)$$

Es soll noch gezeigt werden, daß man den adjungierten Operatorbereich auch aus dem Verschwinden des Hüllenintegrals  $\oint e_i K_i d\sigma$ , siehe Gl. (4.16), hätte ermitteln können.

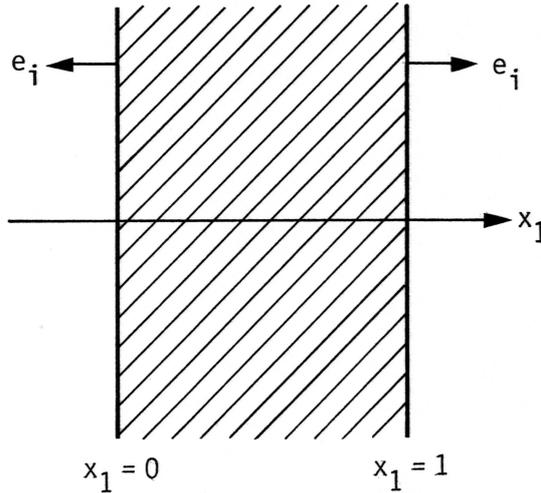


Abbildung 4.1: Schraffiert ist der  $n$ -dimensionale Bereich zwischen den beiden Hyperebenen  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = 1$ . Der Normalenvektor  $e_i$  ist nach außen orientiert

Abb. (4.1) zeigt, daß dieses Hüllenintegral über die Berandung des Bereichs  $0 \leq x_1 \leq 1$  (siehe Definition von  $\underline{L}$ , Gl. (4.20)) zu erstrecken ist. Auf der Hyperebene  $x_1 = 0$  sind die Komponenten des Normalenvektors  $e_i \hat{=} (-1, 0, 0, \dots, 0)$ ; auf der Hyperebene  $x_1 = 1$  sind sie  $e_i \hat{=} (1, 0, 0, \dots, 0)$ . Für das  $(n-1)$ -dimensionale Flächenelement gilt in beiden Fällen  $d\sigma = dx_2 dx_3 \dots dx_n$ . Damit folgt für das Hüllenintegral unter Verwendung des Konjunktvektors Gl. (4.21)

$$\oint e_i K_i d\sigma = 0 = \int d\sigma [-pv^*u|_{x_1=0} + pv^*u|_{x_1=1}].$$

Diese Bedingung ist identisch mit der bereits in Gl. (4.23) angeschriebenen Beziehung.

Analog berechnet man die formal adjungierten Operatoren  $L^\dagger$  und die Komponenten des Kon-

junktvektors  $K_i(v^*, u)$  auch für zweite Ableitungen. Die sich ergebenden Ausdrücke lauten:

$L$	$L^\dagger$	$K_i(v^*, u)$
$p(x_i) \frac{\partial}{\partial x_1}$	$-\frac{\partial}{\partial x_1}[p^*(x_i) \dots]$	$(pv^*u, 0, 0, \dots, 0)$
$p(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$	$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}[p^*(x_i) \dots]$	$\left( pv^* \frac{\partial u}{\partial x_2}, -u \frac{\partial(v^*p)}{\partial x_1}, 0, 0, \dots, 0 \right)$
$p(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$	$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}[p^*(x_i) \dots]$	$\left( pv^* \frac{\partial u}{\partial x_1} - u \frac{\partial(v^*p)}{\partial x_1}, 0, 0, \dots, 0 \right)$

(4.24)

Die entsprechenden Ausdrücke für höhere Ableitungen finden sich in [8, Bd. 1, S. 874–876].

### 4.3.2 Beispiel 2: Der Laplace-Operator

Gegeben sei der Laplace-Operator im dreidimensionalen Raum

$$\underline{L}: \quad L = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \mathcal{L}: \quad u = 0 \text{ am Rand (homogene RB 1. Art)}. \quad (4.25)$$

Aus Gl. (4.24) sieht man sofort, daß der Operator formal selbstadjungiert ist,  $L = L^\dagger$ . Aus Gl. (4.24) liest man für den Konjunktvektor ab ( $p = 1$ )

$$\vec{K}(v^*, u) = v^* \text{grad} u - u \text{grad} v^* \hat{=} \left( v^* \frac{\partial u}{\partial x_1} - u \frac{\partial v^*}{\partial x_1}, v^* \frac{\partial u}{\partial x_2} - u \frac{\partial v^*}{\partial x_2}, v^* \frac{\partial u}{\partial x_3} - u \frac{\partial v^*}{\partial x_3} \right). \quad (4.26)$$

Die adjungierten Randbedingungen folgen aus Gl. (4.16) mit Gl. (4.26) und der in Abschn. (4.2) für die Normalenableitung vereinbarten Schreibweise  $\vec{e} \cdot \text{grad} u = \partial u / \partial e$ :

$$\oint \vec{e} \cdot \vec{K}(v^*, u) dF = 0 = \oint \left( v^* \frac{\partial u}{\partial e} - u \frac{\partial v^*}{\partial e} \right) dF. \quad (4.27)$$

Für  $u$  aus  $\mathcal{L}$  (d. h.  $u = 0$  am Rand des Bereichs) wird die Forderung Gl. (4.27) erfüllt, indem man auch  $v = 0$  am Rand verlangt. Damit ist aber auch  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$ , der Laplace-Operator ist für homogene Randbedingungen erster Art ein selbstadjungierter Operator.

$$\underline{L}^\dagger: \quad L^\dagger = L = \Delta, \quad \mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}: \quad v = 0 \text{ am Rand}. \quad (4.28)$$

Durch Einsetzen in Gl. (4.27) weist man leicht nach, daß auch homogene Randbedingungen 2. Art und 3. Art (mit einem reellen Koeffizienten) selbstadjungierte Randbedingungen sind.

### 4.3.3 Beispiel 3: Der Operator der Wellengleichung

In einem Volumen  $V$  des dreidimensionalen Raumes werden in einem Zeitintervall  $t_1 \leq t \leq t_2$  Lösungen der Wellengleichung gesucht. Der Operator  $\underline{L}$  sei definiert durch:

$$\begin{aligned} L &= \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \mathcal{L} &: \quad u(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{am Rand von } V, \\ &\quad u(\vec{x}, t)|_{t=t_1} = \frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_1} = 0 \quad \text{in allen Punkten in } V. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Der Operatorbereich  $\mathcal{L}$  ist durch homogene Randbedingungen 1. Art bezüglich der Raumvariablen  $x_1, x_2, x_3$  und durch homogene Cauchy-Bedingungen bezüglich der Zeitvariablen  $t$  festgelegt. Für

die Berechnung von  $\underline{L}^\dagger$  denkt man sich  $t = x_4$  als eine vierte kartesische Koordinate eingeführt. Aus Gl. (4.24) sieht man sofort, daß  $L$  formal selbstadjungiert ist,  $L = L^\dagger$ . Der vierdimensionale Konjunktvektor kann ebenfalls aus Gl. (4.24) abgelesen werden; seine Komponenten in Richtung der Achsen  $x_1, x_2, x_3$  sind mit denen von Gl. (4.26) identisch. Daher gilt unter Verwendung der abkürzenden Schreibweise  $\partial_1 = \partial/\partial x_1, \partial_2 = \partial/\partial x_2, \partial_3 = \partial/\partial x_3, \partial_t = \partial/\partial t$

$$K_i \hat{=} (v^* \partial_1 u - u \partial_1 v^*, v^* \partial_2 u - u \partial_2 v^*, v^* \partial_3 u - u \partial_3 v^*, -v^* \partial_t u / c^2 + u \partial_t v^* / c^2). \quad (4.30)$$

Mit Gl. (4.30) folgt aus Gl. (4.16)

$$\begin{aligned} \int \partial_i K_i(v^*, u) d\tau &= \iiint \partial_i K_i(v^*, u) dV dt = 0 \\ &= \iiint [\partial_1(v^* \partial_1 u - u \partial_1 v^*) + \partial_2(v^* \partial_2 u - u \partial_2 v^*) + \partial_3(v^* \partial_3 u - u \partial_3 v^*) \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \partial_t(-v^* \partial_t u + u \partial_t v^*)] dV dt \\ &= \iiint \left[ \operatorname{div}(v^* \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v^*) + \frac{1}{c^2} \partial_t(-v^* \partial_t u + u \partial_t v^*) \right] dV dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \oint \left( v^* \frac{\partial u}{\partial e} - u \frac{\partial v^*}{\partial e} \right) dF + \frac{1}{c^2} \int \left( -v^* \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial v^*}{\partial t} \right) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} dV. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen für die Funktion  $u(\vec{x}, t)$  liest man aus Gl. (4.31) ab: Das erste Integral verschwindet zu allen Zeiten, wenn  $v(\vec{x}, t) = 0$  an allen Randpunkten des dreidimensionalen Bereichs erfüllt ist; das zweite Integral verschwindet dann, wenn sowohl  $v(\vec{x}, t)$  als auch  $\partial v(\vec{x}, t)/\partial t$  an allen Punkten des dreidimensionalen Raumes für  $t = t_2$  verschwinden. Damit erhält man für den adjungierten Operator:

$$\begin{aligned} L^\dagger &= \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \mathcal{L}^\dagger &: v(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{am Rand von } V, \\ &\quad v(\vec{x}, t)|_{t=t_2} = \frac{\partial v(\vec{x}, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_2} = 0 \quad \text{in allen Punkten in } V. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Durch Vergleich mit Gl. (4.29) sieht man, daß der Operator formal selbstadjungiert ist,  $L = L^\dagger$ . Es gilt aber  $\mathcal{L}^\dagger \neq \mathcal{L}$  zufolge der nicht selbstadjungierten homogenen Cauchy-Bedingungen.

#### 4.3.4 Beispiel 4: Der Operator der Wärmeleitungsgleichung

Lösungen der Wärmeleitungsgleichung werden im Volumen  $V$  des dreidimensionalen Raumes im Zeitbereich  $t_1 \leq t \leq t_2$  gesucht. Der Operator  $\underline{L}$  ist definiert durch:

$$\begin{aligned} L &= \Delta - a^2 \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathcal{L} &: u(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{am Rand von } V, \\ &\quad u(\vec{x}, t_1) = 0 \quad \text{in allen Punkten in } V. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Für den Konjunktvektor sind die ersten drei Komponenten identisch mit denen in Gl. (4.30), für die vierte Komponente ( $t = x_4$  wird wieder als kartesische Koordinate in einem vierdimensionalen Raum gedeutet) liest man aus Gl. (4.24) den Wert  $-a^2 v^* u$  ab. Somit ist

$$K_i \hat{=} (v^* \partial_1 u - u \partial_1 v^*, v^* \partial_2 u - u \partial_2 v^*, v^* \partial_3 u - u \partial_3 v^*, -a^2 v^* u). \quad (4.34)$$

Den adjungierten Operatorbereich erhält man analog Gl. (4.31). Man hat in Gl. (4.31) nur folgende Änderung vorzunehmen:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -v^* \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial v^*}{\partial t} \right) \quad \text{ersetzen durch} \quad \frac{\partial}{\partial t} (-a^2 v^* u). \quad (4.35)$$

Damit erhält man die Bedingung

$$\begin{aligned}
\int \partial_i K_i(v^*, u) d\tau &= \iint \partial_i K_i(v^*, u) dV dt = 0 \\
&= \iint [\operatorname{div}(v^* \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v^*) + \partial_t(-a^2 v^* u)] dV dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \oint \left( v^* \frac{\partial u}{\partial e} - u \frac{\partial v^*}{\partial e} \right) dF + \int (-a^2 v^* u) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} dV.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Aus den gegebenen Randbedingungen für  $u(\vec{x}, t)$  aus Gl. (4.33) liest man aus Gl. (4.36) die für  $v(\vec{x}, t)$  zu fordernden Randbedingungen ab. Das Ergebnis lautet unter Beachtung von Gl. (4.24)

$$\begin{aligned}
L^\dagger &= \Delta + a^2 \frac{\partial}{\partial t}, \\
\mathcal{L}^\dagger &: v(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{am Rand von } V, \\
&\quad v(\vec{x}, t_2) = 0 \quad \text{in allen Punkten in } V.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Der Operator ist nicht selbstadjungiert, es gilt sowohl  $L \neq L^\dagger$  als auch  $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}^\dagger$ .

## 4.4 Die Lösung von inhomogenen Problemen zu inhomogenen Randbedingungen

Die Formulierung und Lösung des Problems erfolgt analog zu Abschn. (2.4); die Schreibweise wird dadurch vereinfacht, daß hier als Gewichtsfunktion  $r(x_i) = 1$  angenommen wurde. Der abstrakte Operator  $\underline{L}_I$  ist durch  $L, \mathcal{L}_I$  (inhomogene Randbedingungen) definiert. Zu lösen ist

$$\underline{L}_I |w\rangle = |g\rangle, \quad \text{d. h.} \quad Lw(x_i) = g(x_i) \quad \text{mit } w(x_i) \text{ aus } \mathcal{L}_I. \tag{4.38}$$

Der Operator  $\underline{L}$  (gegeben durch  $L, \mathcal{L}$ ; der Operatorbereich  $\mathcal{L}$  hat homogene Randbedingungen derselben Struktur wie in  $\mathcal{L}_I$ ) und  $\underline{L}^\dagger$  ( $L^\dagger, \mathcal{L}^\dagger$ ) seien ebenfalls ermittelt. Bekannt sei die Lösung des inhomogenen Problems zu homogenen Randbedingungen

$$\begin{aligned}
\underline{L}|u\rangle &= |g\rangle, \quad \text{d. h.} \quad Lu(x_i) = g(x_i) \quad \text{mit } u(x_i) \text{ aus } \mathcal{L}, \\
|u\rangle &= \underline{G}|g\rangle, \quad \text{mit} \quad \underline{GL} = \underline{LG} = \underline{L}^\dagger \underline{G}^\dagger = \underline{G}^\dagger \underline{L}^\dagger = \underline{I}, \\
u(x_i) &= \int G(x_i, x_{i0}) g(x_{i0}) d\tau_0 = \int [G^\dagger(x_{i0}, x_i)]^* g(x_{i0}) d\tau_0.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Die Greenschen Funktionen sind Lösungen von

$$\begin{aligned}
LG(x_i, x_{i0}) &= \delta(x_i - x_{i0}), & G(x_i, x_{i0}) &\quad \text{bezüglich } x_i \text{ aus } \mathcal{L}, \\
L^\dagger G^\dagger(x_i, x_{i0}) &= \delta(x_i - x_{i0}), & G^\dagger(x_i, x_{i0}) &\quad \text{bezüglich } x_i \text{ aus } \mathcal{L}^\dagger.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Der Operator  $\underline{L}_I = \underline{L}_e + \underline{L}_1$  wird wieder in seiner Wirkung auf  $|w\rangle$  als die Summe des Operators  $\underline{L}_e$  im erweiterten Sinn und des Störoperators  $\underline{L}_1$  angesetzt. Analog Gl. (2.38), Gl. (2.39) und Gl. (2.40) ist die Lösung von Gl. (4.38) gegeben durch

$$\begin{aligned}
w(x_i) = \langle x_i | w \rangle &= \langle x_i | \underline{G} | g \rangle - \langle x_i | \underline{G} \underline{L}_1 | w \rangle \\
&= \langle x_i | \underline{G} | g \rangle + \langle x_i | \underline{G} | s \rangle.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Setzt man  $\langle v | = \langle x_i | \underline{G}$  und verwendet die Beziehung für  $\langle v | \underline{L}_1 | w \rangle$  aus Gl. (4.19) — dabei muß eine andere Integrationsvariable  $d\tau_0 = dx_{10} dx_{20} \dots dx_{n0}$  gewählt werden, außerdem beziehen sich Ableitungen auf  $\partial_{i0} = \partial / \partial x_{i0}$ ; die Ableitungen innerhalb des Konjunktvektors sind ebenfalls nach

den Variablen  $x_{i0}$  zu bilden — so erhält man

$$\begin{aligned}
\langle x_i | \underline{G} \underline{L}_1 | w \rangle &= -\langle x_i | \underline{G} | s \rangle \\
&= \int_{(+)} \partial_{i0} K_i(\langle x_i | \underline{G} | x_{i0} \rangle, \langle x_{i0} | w \rangle) d\tau_0 \\
&= \oint e_{i0} K_i(\langle x_i | \underline{G} | x_{i0} \rangle, \langle x_{i0} | w \rangle) d\sigma_0.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Damit lautet die Lösung Gl. (4.41) des inhomogenen Problems zu inhomogenen Randbedingungen folgendermaßen (siehe auch Gl. (4.11)):

$$\begin{aligned}
w(x_i) &= \int \langle x_i | \underline{G} | x_{i0} \rangle d\tau_0 \langle x_{i0} | g \rangle - \int \langle x_i | \underline{G} | x_{i0} \rangle d\tau_0 \langle x_{i0} | \underline{L}_1 | w \rangle \\
&= \int \langle x_i | \underline{G} | x_{i0} \rangle d\tau_0 \langle x_{i0} | g \rangle + \int \langle x_i | \underline{G} | x_{i0} \rangle d\tau_0 \langle x_{i0} | s \rangle \\
&= \int_{(+)} G(x_i, x_{i0}) [g(x_{i0}) - L_1 w(x_{i0})] d\tau_0 \\
&= \int_{(+)} G(x_i, x_{i0}) [g(x_{i0}) + s(x_{i0})] d\tau_0 \\
&= \int G(x_i, x_{i0}) g(x_{i0}) d\tau_0 - \int_{(+)} \partial_{i0} K_i[G(x_i, x_{i0}), w(x_{i0})] d\tau_0 \\
&= \int G(x_i, x_{i0}) g(x_{i0}) d\tau_0 - \oint e_{i0} K_i[G(x_i, x_{i0}), w(x_{i0})] d\sigma_0.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Alle innerhalb der Konjunktvektoren vorkommenden Differentiationen sind nach den Variablen  $x_{i0}$  zu bilden. Statt  $G(x_i, x_{i0})$  kann in allen Beziehungen auch  $[G^\dagger(x_{i0}, x_i)]^*$  eingesetzt werden. Die Lösung Gl. (4.43) soll im folgenden anhand von Beispielen diskutiert werden.

#### 4.4.1 Beispiel 1: Lösung der Poisson-Gleichung

Gesucht ist im dreidimensionalen Raum die Lösung der Poisson-Gleichung zu inhomogenen Randbedingungen.

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2)w(\vec{x}) = g(\vec{x}), \quad w(\vec{x}) \neq 0 \quad \text{am Rand.} \tag{4.44}$$

Für die Operatoren gilt somit:

$$\begin{aligned}
\underline{L}_I : \quad L &= \Delta, & \mathcal{L}_I : \quad w(\vec{x}) &\neq 0 & \text{am Rand,} \\
\underline{L} : \quad L &= \Delta, & \mathcal{L} : \quad u(\vec{x}) &= 0 & \text{am Rand,} \\
\underline{L}^\dagger : \quad L^\dagger &= \Delta, & \mathcal{L}^\dagger : \quad v(\vec{x}) &= 0 & \text{am Rand (siehe Gl. (4.28)).}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Der Operator  $\underline{L}$  ist selbstadjungiert. Wegen Gl. (4.40) sind zunächst Lösungen der Gleichung

$$\Delta G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad G(\vec{x}, \vec{x}_0) \quad \text{bezüglich } \vec{x} \text{ aus } \mathcal{L} \tag{4.46}$$

zu suchen. Es wird angenommen, daß die Lösung gefunden wurde. Die Lösung des Problems ist dann Gl. (4.43); die Bedeutung des Hüllenintegrals wurde für den Laplace-Operator in Gl. (4.27) angegeben. Man erhält:

$$\begin{aligned}
w(\vec{x}) &= \int G(\vec{x}, \vec{x}_0) g(\vec{x}_0) dV_0 - \oint \vec{e}_0 \cdot \vec{K}[G(\vec{x}, \vec{x}_0), w(\vec{x}_0)] dF_0 \\
&= \int G(\vec{x}, \vec{x}_0) g(\vec{x}_0) dV_0 - \oint \left[ G(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial w(\vec{x}_0)}{\partial e_0} - w(\vec{x}_0) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial e_0} \right] dF_0.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Man beachte wieder die Abkürzung

$$\frac{\partial w}{\partial e} = \vec{e} \cdot \text{grad} w. \quad (4.48)$$

Der Ausdruck von Gl. (4.47) läßt sich noch vereinfachen: Wegen  $\underline{L} = \underline{L}^\dagger$  ist aus Gl. (4.40) auch  $G(\vec{x}, \vec{x}_0) = G^\dagger(\vec{x}, \vec{x}_0)$ ; allgemein gilt für  $G$ ,  $G^\dagger$  die Beziehung Gl. (2.21), d. h.  $G^\dagger(\vec{x}, \vec{x}_0) = G^*(\vec{x}_0, \vec{x})$ . Somit ist für selbstadjungierte Operatoren

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, \vec{x}_0) &= G^\dagger(\vec{x}, \vec{x}_0) = G^*(\vec{x}_0, \vec{x}), \quad \text{wenn } \underline{L} = \underline{L}^\dagger, \\ \text{d. h. } G(\vec{x}, \vec{x}_0) &= G(\vec{x}_0, \vec{x}) \quad \text{wenn } G \text{ reell.} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Verwendet man Gl. (4.49) in Gl. (4.47), so ist wegen  $G(\vec{x}, \vec{x}_0) = G(\vec{x}_0, \vec{x})$  in einem Randpunkt  $\vec{x}_0$  (siehe Gl. (4.46)) auch  $G(\vec{x}_0, \vec{x}) = 0$ ; somit verschwindet das erste Hüllenintegral. Die Lösung lautet:

$$w(\vec{x}) = \int G(\vec{x}, \vec{x}_0) g(\vec{x}_0) dV_0 + \oint w(\vec{x}_0) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial e_0} dF_0. \quad (4.50)$$

Der erste Anteil ist die Lösung des inhomogenen Problems zu homogenen Randbedingungen erster Art; der zweite Anteil ist die Lösung des homogenen Problems (der Laplace-Gleichung) zu inhomogenen Randbedingungen.

#### 4.4.2 Beispiel 2: Anmerkung zur Lösung der Poisson-Gleichung

Wenn die Lösung der Poisson-Gleichung in Gl. (4.44) zu inhomogenen Randbedingungen zweiter Art gesucht wird ( $\partial w / \partial e \neq 0$  am Rand), dann lauten die entsprechenden Bedingungen in Gl. (4.45), Gl. (4.46):  $\partial u / \partial e = 0$  am Rand;  $\partial G(\vec{x}, \vec{x}_0) / \partial e = 0$  bezüglich  $\vec{x}$  am Rand. In der Lösung Gl. (4.47) würde nun wegen  $\underline{L} = \underline{L}^\dagger$  die Ableitung  $\partial G / \partial e_0$  am Rand verschwinden. Die Lösung lautet somit:

$$w(\vec{x}) = \int G(\vec{x}, \vec{x}_0) g(\vec{x}_0) dV_0 - \oint G(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial w(\vec{x}_0)}{\partial e_0} dF_0. \quad (4.51)$$

Es ist aber in diesem Fall nicht zulässig, eine beliebige Funktion  $\partial w / \partial e_0$  am Rand vorzuschreiben. Aus der Differentialgleichung  $\Delta w = g$  folgt nämlich

$$\begin{aligned} \int \Delta w(\vec{x}) dV &= \int g(\vec{x}) dV = \int \text{div grad} w dV \\ &= \oint \vec{e} \cdot \text{grad} w dF = \oint \frac{\partial w}{\partial e} dF. \end{aligned}$$

Es sind nur solche Funktionen  $\partial w / \partial e$  zugelassen, welche diese Integralbedingung erfüllen. In der Elektrotechnik ist  $g(\vec{x})$  die Raumladung,  $w$  das Potential,  $\partial w / \partial e$  die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke auf der Oberfläche des Bereichs: Da das Hüllenintegral  $\oint \vec{D} \cdot d\vec{F} = Q$  ist ( $Q$  ist die Gesamtladung innerhalb der Hülle), können Raumladungsdichte und Normalkomponente der Feldstärke nicht unabhängig voneinander vorgeschrieben werden.

#### 4.4.3 Beispiel 3: Lösung der inhomogenen Wellengleichung

Gesucht sei die Lösung der inhomogenen Wellengleichung im dreidimensionalen Raum für Zeiten  $t \geq 0$ .

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t). \quad (4.52)$$

Die „Ursache“ von  $w(\vec{x}, t)$ , nämlich die Verteilung  $g(\vec{x}, t)$ , sei nur in einem endlichen Bereich des dreidimensionalen Raums und in einem endlichen Zeitintervall von null verschieden. Damit sind

folgende Randbedingungen sinnvoll:  $w(\vec{x}, 0) \neq 0$  und  $\partial w(\vec{x}, t)/\partial t \neq 0$  für  $t = 0$  seien vorgegebene Funktionen (inhomogene Cauchy-Bedingungen). Ferner soll  $w(\vec{x}, t) \rightarrow 0$  gehen, wenn  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  und wenn  $t \rightarrow \infty$  geht. Dann sind die Lösungen  $w(\vec{x}, t)$  sicher auch quadratintegrierbar. Man hat somit Lösungen von

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \delta(t - t_0)$$

zu finden, welche die homogenen Randbedingungen im Raum und in der Zeit erfüllen: Sowohl  $G$  als auch  $\partial_t G$  müssen für  $t = 0$  den Wert null haben,  $G$  muß ferner für alle Zeiten verschwinden, wenn  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  geht. Es sei wieder angenommen, daß die Greensche Funktion gefunden wurde. Aus Gl. (4.43) erhält man die gesuchte Lösung, wenn man die Bedeutung des Konjunks für die Wellengleichung, siehe Gl. (4.31), beachtet:

$$\begin{aligned} w(\vec{x}, t) &= \iint G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) g(\vec{x}_0, t_0) dV_0 dt_0 \\ &\quad - \int_0^\infty dt_0 \oint \left[ G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) \frac{\partial w(\vec{x}_0, t_0)}{\partial e_0} - w(\vec{x}_0, t_0) \frac{\partial G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0)}{\partial e_0} \right] dF_0 \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \int \left[ -G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) \frac{\partial w(\vec{x}_0, t_0)}{\partial t_0} + w(\vec{x}_0, t_0) \frac{\partial G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0)}{\partial t_0} \right] \Big|_{t_0=0}^{t_0=\infty} dV_0. \end{aligned}$$

Da zu allen Zeiten sowohl die Greensche Funktion als auch  $w$  für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  verschwinden, liefert das Hüllenintegral über die unendlich ferne Berandung des gesamten dreidimensionalen Raums keinen Beitrag. Im Volumenintegral verschwindet der Integrand für  $t_0 = \infty$  wegen  $G \rightarrow 0$ ,  $w \rightarrow 0$ ; somit lautet die Lösung:

$$\begin{aligned} w(\vec{x}, t) &= \int_0^\infty dt_0 \iiint_{-\infty}^{+\infty} G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) g(\vec{x}_0, t_0) dx_{10} dx_{20} dx_{30} \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, 0) \frac{\partial w(\vec{x}_0, 0)}{\partial t_0} \Big|_{t_0=0} dx_{10} dx_{20} dx_{30} \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} w(\vec{x}_0, 0) \frac{\partial G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, 0)}{\partial t_0} \Big|_{t_0=0} dx_{10} dx_{20} dx_{30}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

## 4.5 Der Produktraum

In einem abstrakten Raum  $U_1$  seien Kets  $|\varphi_1\rangle, |\psi_1\rangle, \dots$  definiert, in einem anderen abstrakten Raum  $U_2$  die Kets  $|\varphi_2\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$ ; betrachtet man gleichzeitig einen Ket  $|\varphi_1\rangle$  in  $U_1$  und einen Ket  $|\varphi_2\rangle$  in  $U_2$ , so kann man verabreden, daß diese Information in der Form  $|\varphi_1, \varphi_2\rangle = |\varphi_1\rangle |\varphi_2\rangle$  geschrieben wird. Der erste Bestandteil bezeichnet den Ket in  $U_1$ , der zweite Bestandteil den Ket in  $U_2$ . Man nennt den Raum, in dem die Kets  $|\varphi_1, \varphi_2\rangle$  definiert sind, das direkte Produkt der beiden Räume oder den Produktraum  $U = U_1 \otimes U_2$ , der Ket  $|\varphi_1, \varphi_2\rangle$  wird als direktes Produkt der Kets  $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle$  bezeichnet. Zu den Kets  $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots$  lassen sich die entsprechenden Bras anschreiben. Man verabredet eine Bracket  $\langle \varphi_1, \varphi_2 | \psi_1, \psi_2 \rangle$  derart, daß sie das Produkt der Brackets  $\langle \varphi_1 | \psi_1 \rangle, \langle \varphi_2 | \psi_2 \rangle$  ist:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1, \varphi_2 | \psi_1, \psi_2 \rangle &= \langle \psi_1, \psi_2 | \varphi_1, \varphi_2 \rangle^* = \langle \psi_1, \psi_2 | \varphi_1, \varphi_2 \rangle^\dagger \\ &= \langle \varphi_1 | \psi_1 \rangle \langle \varphi_2 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \varphi_1 \rangle^* \langle \psi_2 | \varphi_2 \rangle^*. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Ferner seien lineare Operatoren  $\underline{L}_1 (L_1, \mathcal{L}_1)$  in  $U_1$ , und  $\underline{L}_2 (L_2, \mathcal{L}_2)$  in  $U_2$  definiert, sodaß z. B. gilt

$$\begin{aligned} \underline{L}_1 |\varphi_1\rangle &= |\psi_1\rangle && \text{im Raum } U_1, \\ \underline{L}_2 |\varphi_2\rangle &= |\psi_2\rangle && \text{im Raum } U_2. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Die Operatoren operieren auf Kets  $|\varphi_1, \varphi_2\rangle$  im Produktraum derart, daß sie jeweils auf den Ket angewendet werden, der zu dem Raum gehört, dem auch die Operatoren angehören. Es gilt also z. B. (siehe Gl. (4.55))

$$\begin{aligned}\underline{L}_1|\varphi_1, \varphi_2\rangle &= |\psi_1, \varphi_2\rangle, \\ \underline{L}_2|\varphi_1, \varphi_2\rangle &= |\varphi_1, \psi_2\rangle, \\ \underline{L}_1\underline{L}_2|\varphi_1, \varphi_2\rangle &= |\psi_1, \psi_2\rangle, \\ \underline{L}_2\underline{L}_1|\varphi_1, \varphi_2\rangle &= |\psi_1, \psi_2\rangle.\end{aligned}\tag{4.56}$$

Daraus folgt, daß jeder Operator aus  $U_1$  mit jedem Operator aus  $U_2$  vertauschbar ist. Es gilt für den sogenannten Kommutator der beiden Operatoren

$$[\underline{L}_1, \underline{L}_2] = \underline{L}_1\underline{L}_2 - \underline{L}_2\underline{L}_1 = 0.\tag{4.57}$$

In jedem der beiden Räume  $U_1, U_2$  kann eine Basis analog Gl. (2.14) eingeführt werden.

$$\begin{aligned}\int |x_1\rangle r_1(x_1) dx_1 \langle x_1| &= \underline{I}, & \langle x_1|x'_1\rangle &= \frac{\delta(x_1 - x'_1)}{r_1(x_1)} & \text{in } U_1, \\ \int |x_2\rangle r_2(x_2) dx_2 \langle x_2| &= \underline{I}, & \langle x_2|x'_2\rangle &= \frac{\delta(x_2 - x'_2)}{r_2(x_2)} & \text{in } U_2.\end{aligned}\tag{4.58}$$

Im Produktraum  $U = U_1 \otimes U_2$  ist eine Basis durch das direkte Produkt der Basen in den Räumen  $U_1, U_2$  gegeben:

$$\begin{aligned}\iint |x_1, x_2\rangle r_1(x_1) r_2(x_2) dx_1 dx_2 \langle x_1, x_2| &= \underline{I} \quad \text{in } U = U_1 \otimes U_2, \\ \langle x_1, x_2|x'_1, x'_2\rangle &= \frac{\delta(x_1 - x'_1)\delta(x_2 - x'_2)}{r_1(x_1)r_2(x_2)}.\end{aligned}\tag{4.59}$$

Beziehungen dieser Art in einem Raum  $U = U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_n$  wurden in Gl. (4.11), Gl. (4.12) bereits heuristisch eingeführt. Die Beziehungen von Gl. (4.13) sind eine Verallgemeinerung der Entwicklung eines Kets  $|\varphi\rangle$  in  $U = U_1 \otimes U_2$  nach der Basis Gl. (4.59):

$$\begin{aligned}|\varphi\rangle &= \iint |x_1, x_2\rangle r_1(x_1) r_2(x_2) dx_1 dx_2 \langle x_1, x_2|\varphi\rangle \\ &= \iint |x_1, x_2\rangle \varphi(x_1, x_2) r_1(x_1) r_2(x_2) dx_1 dx_2.\end{aligned}\tag{4.60}$$

Analog zu Gl. (1.94) gilt für den Operator  $L$ , welcher auf die Komponenten  $\varphi(x_1, x_2)$  eines abstrakten Kets  $|\varphi\rangle$  aus  $U = U_1 \otimes U_2$  operiert

$$\begin{aligned}\langle x_1, x_2|\underline{L}|\varphi\rangle &= L\langle x_1, x_2|\varphi\rangle = L\varphi(x_1, x_2) \\ &= \iint \langle x_1, x_2|\underline{L}|x'_1, x'_2\rangle r_1(x'_1) r_2(x'_2) dx'_1 dx'_2 \langle x'_1, x'_2|\varphi\rangle \\ &= \iint L(x_1, x_2; x'_1, x'_2) \varphi(x'_1, x'_2) r_1(x'_1) r_2(x'_2) dx'_1 dx'_2.\end{aligned}\tag{4.61}$$

Damit sind wieder Matrixelemente  $L(x_1, x_2; x'_1, x'_2)$  eines Operators  $\underline{L}$  bezüglich einer Basis definiert.

Für den Spezialfall, daß der Operator  $\underline{L}$  sich als Produkt eines Operators  $\underline{L}_1$  aus  $U_1$  mit einem Operator  $\underline{L}_2$  aus  $U_2$  schreiben läßt, ergibt sich in Anwendung von Gl. (4.54), Gl. (4.55) für die Matrixelemente die Beziehung

$$\begin{aligned}L(x_1, x_2; x'_1, x'_2) &= \langle x_1, x_2|\underline{L}|x'_1, x'_2\rangle \\ &= \langle x_1, x_2|\underline{L}_1\underline{L}_2|x'_1, x'_2\rangle = \langle x_1, x_2|\underline{L}_2\underline{L}_1|x'_1, x'_2\rangle \\ &= \langle x_1|\underline{L}_1|x'_1\rangle \langle x_2|\underline{L}_2|x'_2\rangle \\ &= L_1(x_1, x'_1) L_2(x_2, x'_2).\end{aligned}\tag{4.62}$$

Analog zur Bezeichnung von Gl. (4.61) erhält man in diesem Fall

$$\langle x_1, x_2 | \underline{L}_1 \underline{L}_2 | \varphi \rangle = \langle x_1, x_2 | \underline{L}_2 \underline{L}_1 | \varphi \rangle = L_1 L_2 \varphi(x_1, x_2) = L_2 L_1 \varphi(x_1, x_2). \quad (4.63)$$

Gl. (4.63) bedeutet ( $L_1$  sei ein Differentialoperator mit Ableitungen nach  $x_1$ ,  $L_2$  ein Operator mit Ableitungen nach  $x_2$ ), daß die Funktionen  $\varphi(x_1, x_2)$  so oft stetig differenzierbar sein müssen, wie die Summe der Ordnungen von  $L_1$ ,  $L_2$  angibt, da sich die Reihenfolge der Differentiationen vertauschen läßt.

Unter Verwendung der Bezeichnungsweise von Abschn. (3.1) haben Operatoren der Form  $\underline{L} = \underline{L}_1 + \underline{L}_2$  Eigenkets  $|u_k\rangle = |u_{k_1}, u_{k_2}\rangle$ , die zum Eigenwert  $\lambda_k = \lambda_{k_1} + \lambda_{k_2}$  gehören; die Eigenfunktionen  $u_{k_1}(x_1)$  sind aus  $\mathcal{L}_1$ , die Eigenfunktionen  $u_{k_2}(x_2)$  sind aus  $\mathcal{L}_2$  zu nehmen (symbolisch geschrieben: aus  $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ ). Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \underline{L}|u_k\rangle &= \lambda_k|u_k\rangle = (\underline{L}_1 + \underline{L}_2)|u_{k_1}, u_{k_2}\rangle = (\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2})|u_{k_1}, u_{k_2}\rangle, \\ \langle x_1, x_2 | u_k \rangle &= u_k(x_1, x_2) = \langle x_1, x_2 | u_{k_1}, u_{k_2} \rangle = \langle x_1 | u_{k_1} \rangle \langle x_2 | u_{k_2} \rangle = u_{k_1}(x_1) u_{k_2}(x_2), \\ \langle x_1, x_2 | \underline{L}_1 + \underline{L}_2 | u_{k_1}, u_{k_2} \rangle &= (\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2}) \langle x_1, x_2 | u_{k_1}, u_{k_2} \rangle, \\ (L_1 + L_2) u_{k_1}(x_1) u_{k_2}(x_2) &= (\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2}) u_{k_1}(x_1) u_{k_2}(x_2). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Zu Gl. (4.64) analoge Beziehungen gelten für  $\underline{L}^\dagger = \underline{L}_1^\dagger + \underline{L}_2^\dagger$ ; die Eigenkets  $|v_l\rangle$  von  $\underline{L}^\dagger$  sind das direkte Produkt der Eigenkets  $|v_{l_1}\rangle$  von  $\underline{L}_1^\dagger$  mit den Eigenkets  $|v_{l_2}\rangle$  von  $\underline{L}_2^\dagger$ , also  $|v_l\rangle = |v_{l_1}, v_{l_2}\rangle$ ; sie gehören zu den Eigenwerten  $\mu_l = \mu_{l_1} + \mu_{l_2} = \lambda_l^*$ . Die Eigenfunktionen  $v_{l_1}(x_1)$ ,  $v_{l_2}(x_2)$  sind bezüglich der Variablen  $x_1$ ,  $x_2$  aus  $\mathcal{L}_1^\dagger$ ,  $\mathcal{L}_2^\dagger$  zu nehmen (symbolisch geschrieben: aus  $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}_1^\dagger + \mathcal{L}_2^\dagger$ ). An die Stelle von Gl. (3.5), Gl. (3.10) treten die Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen

$$\begin{aligned} \langle v_{l_1}, v_{l_2} | u_{k_1}, u_{k_2} \rangle &= \delta(l_1, k_1) \delta(l_2, k_2), \\ \sum_{k_1, k_2} |u_{k_1}, u_{k_2}\rangle dk_1 dk_2 \langle v_{k_1}, v_{k_2} | &= \sum_{l_1, l_2} |v_{l_1}, v_{l_2}\rangle dl_1 dl_2 \langle u_{l_1}, u_{l_2} | = \underline{I}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Multipliziert man die Vollständigkeitsrelation mit einer Operatorfunktion, die in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, so gelangt man durch wiederholte Anwendung von Gl. (4.64) zur Spektraldarstellung in Analogie zur früheren Beziehung Gl. (3.39):

$$\begin{aligned} f(\underline{L}_1, \underline{L}_2) &= \sum_{k_1, k_2} |u_{k_1}, u_{k_2}\rangle f(\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}) dk_1 dk_2 \langle v_{k_1}, v_{k_2} |, \\ f(\underline{L}_1^\dagger, \underline{L}_2^\dagger) &= \sum_{l_1, l_2} |v_{l_1}, v_{l_2}\rangle f(\mu_{l_1}, \mu_{l_2}) dl_1 dl_2 \langle u_{l_1}, u_{l_2} |. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Die Wirkung einer Operatorfunktion auf einen Ket  $|g\rangle$  kann in Analogie zu Gl. (3.37), Gl. (3.38) studiert werden. Für eine Operatorfunktion  $f(\underline{L}_1, \underline{L}_2)$  erhält man z. B. (man entwickelt zunächst  $|g\rangle$  nach Eigenkets von  $\underline{L}_1$ ,  $\underline{L}_2$  und wendet dann die Operatorfunktion an):

$$\begin{aligned} |g\rangle &= \sum_{k_1, k_2} |u_{k_1}, u_{k_2}\rangle dk_1 dk_2 \langle v_{k_1}, v_{k_2} | g \rangle, \\ f(\underline{L}_1, \underline{L}_2) |g\rangle &= \sum_{k_1, k_2} |u_{k_1}, u_{k_2}\rangle f(\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}) dk_1 dk_2 \langle v_{k_1}, v_{k_2} | g \rangle, \\ \langle v_{k_1}, v_{k_2} | g \rangle &= \iint \langle v_{k_1}, v_{k_2} | x_{10}, x_{20} \rangle r_1(x_{10}) r_2(x_{20}) dx_{10} dx_{20} \langle x_{10}, x_{20} | g \rangle \\ &= \iint v_{k_1}^*(x_{10}) v_{k_2}^*(x_{20}) g(x_{10}, x_{20}) r_1(x_{10}) r_2(x_{20}) dx_{10} dx_{20}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Bildet man die Bracket von  $f(\underline{L}_1, \underline{L}_2) |g\rangle$  mit dem Bra  $\langle x_1, x_2 |$ , so erhält man

$$\begin{aligned} f(L_1, L_2) g(x_1, x_2) &= f(L_1, L_2) \iint \delta(x_{10} - x_1) \delta(x_{20} - x_2) g(x_{10}, x_{20}) dx_{10} dx_{20} \\ &= \sum_{k_1, k_2} f(\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}) u_{k_1}(x_1) u_{k_2}(x_2) dk_1 dk_2 \iint v_{k_1}^*(x_{10}) v_{k_2}^*(x_{20}) g(x_{10}, x_{20}) r_1(x_{10}) r_2(x_{20}) dx_{10} dx_{20}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Durch Vergleich der beiden Seiten in Gl. (4.68) ergibt sich die zu Gl. (3.41) analoge Gleichung

$$\begin{aligned} & f(L_1, L_2)\delta(x_1 - x_{10})\delta(x_2 - x_{20}) \\ &= \sum_{k_1, k_2} f(\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2})u_{k_1}(x_1)u_{k_2}(x_2)v_{k_1}^*(x_{10})v_{k_2}^*(x_{20})r_1(x_{10})r_2(x_{20})dk_1dk_2, \end{aligned} \quad (4.69)$$

die man auch direkt aus Gl. (4.66) durch Bilden der Bracket mit  $\langle x_1, x_2 |$ ,  $|x_{10}, x_{20}\rangle$  und Beachten von Gl. (4.59) hätte erhalten können.

Gl. (4.66) kann wieder dazu verwendet werden, um Umkehroperatoren zu ermitteln.

## 4.6 Die Greensche Funktion $G_\lambda$ . Umkehroperatoren

Analog zu Gl. (3.43), Gl. (3.44) definiert man  $\underline{G}_\lambda$  als Umkehroperator von  $\underline{L}_1 + \underline{L}_2 - \lambda\underline{I}$ . Unter Anwendung von Gl. (4.66) erhält man

$$\underline{G}_\lambda = (\underline{L}_1 + \underline{L}_2 - \lambda\underline{I})^{-1} = - \sum_{k_1, k_2} \frac{|u_{k_1}, u_{k_2}\rangle dk_1 dk_2 \langle v_{k_1}, v_{k_2}|}{\lambda - [\lambda_1(k_1) + \lambda_2(k_2)]}. \quad (4.70)$$

Die Greensche Funktion ist  $\langle x_1, x_2 | \underline{G}_\lambda | x_{10}, x_{20} \rangle = G_\lambda(x_1, x_2; x_{10}, x_{20})$ . Aus  $\underline{G}_\lambda$  können wieder die Eigenwerte von  $\underline{L}_1$ ,  $\underline{L}_2$ ,  $\underline{L}_1^\dagger$ ,  $\underline{L}_2^\dagger$  und die Eigenfunktionen dieser Operatoren ermittelt werden. Integriert man  $\underline{G}_\lambda$  in einer komplexen  $\lambda$ -Ebene über ein Gebiet, in dem alle diskreten Pole erster Ordnung enthalten sind (dabei ist zu beachten, daß nicht irrtümlich Verzweigungsschnitte überkreuzt werden), so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint \underline{G}_\lambda d\lambda &= - \sum_{k_1, k_2} |u_{k_1}, u_{k_2}\rangle \langle v_{k_1}, v_{k_2}| \\ &= \iint |u_{k_1}, u_{k_2}\rangle dk_1 dk_2 \langle v_{k_1}, v_{k_2}| - \underline{I}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Dabei wurde Gl. (4.65) verwendet und der Beitrag des diskreten und des kontinuierlichen Spektrums getrennt ausgewiesen.

Für die Inversion der Summe zweier kommutierender Operatoren gilt unter Bezug auf die Vollständigkeitsrelation Gl. (4.65) und auf Gl. (4.66) (um die Schreibweise zu vereinfachen, soll angenommen werden, daß beide Operatoren nur ein diskretes Eigenwertspektrum besitzen):

$$\begin{aligned} \underline{G} = (\underline{L}_1 + \underline{L}_2)^{-1} &= \sum_{k_1, k_2} (\underline{L}_1 + \lambda_{k_2}\underline{I})^{-1} |u_{k_1}, u_{k_2}\rangle \langle v_{k_1}, v_{k_2}| \\ &= \sum_{k_1, k_2} (\underline{L}_2 + \lambda_{k_1}\underline{I})^{-1} |u_{k_1}, u_{k_2}\rangle \langle v_{k_1}, v_{k_2}| \\ &= \sum_{k_1, k_2} \frac{|u_{k_1}, u_{k_2}\rangle \langle v_{k_1}, v_{k_2}|}{\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2}} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{(2)} d\lambda \sum_{k_1, k_2} \frac{(\underline{L}_1 + \lambda\underline{I})^{-1} |u_{k_1}, u_{k_2}\rangle \langle v_{k_1}, v_{k_2}|}{\lambda - \lambda_{k_2}} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{(1)} d\lambda \sum_{k_1, k_2} \frac{(\underline{L}_2 + \lambda\underline{I})^{-1} |u_{k_1}, u_{k_2}\rangle \langle v_{k_1}, v_{k_2}|}{\lambda - \lambda_{k_1}}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Aus Gl. (4.72) sieht man, daß man bei der Inversion der Summe  $\underline{L}_1 + \underline{L}_2$  zweier kommutierender Operatoren zunächst einen der beiden Operatoren als Konstante betrachten kann. Die Umlaufintegrale mit den Bezeichnungen (1), (2) sind jeweils über ein Gebiet zu erstrecken, in dem nur die Eigenwerte von  $\underline{L}_1$ , bzw. nur die Eigenwerte von  $\underline{L}_2$  liegen.

Die Lösung  $\underline{G}|g\rangle$  des Problems  $\underline{L}|u\rangle = |g\rangle$  erhält man als Entwicklung nach Eigenfunktionen  $u_{k1}(x_1)$  oder nach Eigenfunktionen  $u_{k2}(x_2)$ , je nachdem, ob man bei der Inversion von  $\underline{L}_1 + \underline{L}_2 = \underline{L}$  den Operator  $\underline{L}_1$  oder den Operator  $\underline{L}_2$  als Konstante betrachtet. Dies soll im nachstehenden noch erläutert werden: Es soll bei der Inversion  $\underline{L}_1$  als Konstante behandelt werden. Damit ist aus Gl. (4.72)

$$\begin{aligned}\langle x_1, x_2 | \underline{G} | g \rangle &= \sum_{k_1, k_2} (L_2 + \lambda_{k_1})^{-1} u_{k_1}(x_1) u_{k_2}(x_2) \langle v_{k_1}, v_{k_2} | g \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{(1)} d\lambda \sum_{k_1, k_2} \frac{(L_2 + \lambda)^{-1} u_{k_1}(x_1) u_{k_2}(x_2) \langle v_{k_1}, v_{k_2} | g \rangle}{\lambda - \lambda_{k_1}}.\end{aligned}\quad (4.73)$$

In Gl. (4.73) sind die Brackets  $\langle v_{k_1}, v_{k_2} | g \rangle$  bekannte komplexe Zahlen, siehe Gl. (4.67). Die Lösung Gl. (4.73) läßt sich in folgender Form schreiben:

$$\langle x_1, x_2 | \underline{G} | g \rangle = \sum_{k_1} c_{k_1}(x_2) u_{k_1}(x_1). \quad (4.74)$$

Die Entwicklungskoeffizienten  $c_{k_1}(x_2)$ , welche noch von der Variablen  $x_2$  abhängen, erhält man durch Vergleich aus Gl. (4.73):

$$c_{k_1}(x_2) = \sum_{k_2} \frac{u_{k_2}(x_2) \langle v_{k_1}, v_{k_2} | g \rangle}{\lambda_{k_2} + \lambda_{k_1}} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{(1)} d\lambda \sum_{k_2} \frac{u_{k_2}(x_2) \langle v_{k_1}, v_{k_2} | g \rangle}{(\lambda_{k_2} + \lambda)(\lambda - \lambda_{k_1})}. \quad (4.75)$$

Durch das komplexe Integral wird die Summe meist in geschlossener Form als Funktion  $c_{k_1}(x_2)$  dargestellt. Damit ist die Lösung Gl. (4.74) tatsächlich als Entwicklung nach Eigenfunktionen  $u_{k_1}(x_1)$  bekannt.

Analog hätte man eine Entwicklung nach den Funktionen  $u_{k_2}(x_2)$  erhalten können,

$$\langle x_1, x_2 | \underline{G} | g \rangle = \sum_{k_2} c_{k_2}(x_1) u_{k_2}(x_2), \quad (4.76)$$

wenn man bei der Inversion von  $\underline{L}_1 + \underline{L}_2$  den Operator  $\underline{L}_2$  als Konstante betrachtet hätte. Die Koeffizienten  $c_{k_2}(x_1)$  hätten sich wieder analog Gl. (4.75) als Integral in der komplexen  $\lambda$ -Ebene darstellen lassen, welches aber nun alle Eigenwerte von  $\underline{L}_2$  hätte umfassen müssen. Wenn es gelingt, den Integrationsweg in der komplexen  $\lambda$ -Ebene so zu deformieren, daß er einmal alle Eigenwerte von  $\underline{L}_1$ , einmal alle Eigenwerte von  $\underline{L}_2$  umfaßt, so hat man effektiv die Darstellung Gl. (4.74) in die Darstellung Gl. (4.76) umgerechnet. Obwohl die Funktionswerte von Gl. (4.74), Gl. (4.76) für ein Wertepaar  $(x_1, x_2)$  natürlich übereinstimmen, kann sich doch in Abhängigkeit vom Wert der Koordinaten  $(x_1, x_2)$  einmal die eine Reihe, einmal die andere Reihe als rascher konvergent herausstellen.

Für die Inversion von Operatoren sind noch folgende Sätze nützlich:

#### 4.6.1 Simultane Eigenkets

Wenn zwei (oder mehrere) Operatoren kommutieren, so haben sie auch simultane Eigenkets. Es seien Operatoren  $\underline{Q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) gegeben, welche

$$[\underline{Q}_i, \underline{Q}_j] = \underline{Q}_i \underline{Q}_j - \underline{Q}_j \underline{Q}_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.77)$$

erfüllen. Ein Eigenket  $|u_k\rangle$  von  $\underline{Q}_i$  zum Eigenwert  $\lambda_{ik}$

$$\underline{Q}_i |u_k\rangle = \lambda_{ik} |u_k\rangle \quad (4.78)$$

ist wegen der Vertauschbarkeit von  $\underline{Q}_i, \underline{Q}_j$  und somit

$$\begin{aligned}\underline{Q}_j \underline{Q}_i |u_k\rangle &= \lambda_{ik} \underline{Q}_j |u_k\rangle = \underline{Q}_i \underline{Q}_j |u_k\rangle, \\ \underline{Q}_i \{ \underline{Q}_j |u_k\rangle \} &= \lambda_{ik} \{ \underline{Q}_j |u_k\rangle \}, \\ \underline{Q}_j |u_k\rangle &\sim |u_k\rangle, \\ \underline{Q}_j |u_k\rangle &= \lambda_{jk} |u_k\rangle\end{aligned}\tag{4.79}$$

auch ein Eigenket von  $\underline{Q}_j$  zum Eigenwert  $\lambda_{jk}$ .

#### 4.6.2 Inversion eines speziellen Operators

Es seien Operatoren  $\underline{P}_i$  im abstrakten Raum  $U_1$  und Operatoren  $\underline{Q}_i$  im abstrakten Raum  $U_2$  gegeben,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Da sie in verschiedenen Räumen definiert sind, sind sie paarweise vertauschbar:

$$\begin{aligned}[\underline{P}_i, \underline{Q}_j] &= 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \\ \underline{P}_i &\text{ aus } U_1, \quad \underline{Q}_i \text{ aus } U_2.\end{aligned}\tag{4.80}$$

Die Operatoren  $\underline{Q}_i$  aus  $U_2$  sollen ebenfalls paarweise kommutieren (sie besitzen somit simultane Eigenkets):

$$[\underline{Q}_i, \underline{Q}_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad \underline{Q}_i \text{ aus } U_2.\tag{4.81}$$

Dann gilt folgender Satz: Bei der Inversion des Operators [3, S. 266]

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^n \underline{P}_i \underline{Q}_i\tag{4.82}$$

kann man jeden der Operatoren  $\underline{Q}_i$  als einen konstanten Operator  $\lambda_{ik} \underline{L}$  betrachten.

### 4.7 Die dyadische Greensche Funktion

Es soll hier nur eine kurze Einführung in die Probleme gegeben werden (eine ausführlichere Behandlung gibt z. B. [8, Bd. 2, S. 1769–1791]). Speziell wird als Beispiel die Anwendung eines Skalaroperators auf eine Vektorfunktion im dreidimensionalen Raum untersucht.

$$\begin{aligned}\underline{L}|u_i\rangle &= |g_i\rangle, \quad i = 1, 2, 3, \\ \langle \vec{x} | \underline{L} | u_i \rangle &= \langle \vec{x} | g_i \rangle, \\ Lu_i(\vec{x}) &= g_i(\vec{x}), \quad u_i(\vec{x}) \text{ aus } \mathcal{L} \text{ (homogene Randbedingungen)}.\end{aligned}\tag{4.83}$$

$u_i(\vec{x}), g_i(\vec{x}), i = 1, 2, 3$  sind die Komponenten von Vektorfunktionen  $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}(x_1, x_2, x_3), \vec{g}(\vec{x}) = \vec{g}(x_1, x_2, x_3)$ . Der adjungierte Operator  $\underline{L}^\dagger$  ist in diesem Fall definiert durch — siehe auch Gl. (4.16)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 \langle v_i | \underline{L} | u_i \rangle &= \sum_{i=1}^3 \langle u_i | \underline{L}^\dagger | v_i \rangle^* + \oint \vec{e} \cdot \vec{K}(v_i^*, u_i) dF \\ \text{mit } \oint \vec{e} \cdot \vec{K}(v_i^*, u_i) dF &= 0.\end{aligned}\tag{4.84}$$

Von gleicher Struktur ist die zu Gl. (4.17) analoge Beziehung. Die Greensche Funktion kann nicht mehr skalar angesetzt werden; das ist plausibel, weil jede Komponente der Lösung  $u_i(\vec{x})$  im allgemeinen von allen drei Komponenten der „Ursache“  $g_i(\vec{x})$  abhängen wird. Für die Lösung macht man daher den Ansatz

$$|u_i\rangle = \sum_{j=1}^3 \underline{G}_{ij} |g_j\rangle, \quad i = 1, 2, 3.\tag{4.85}$$

Es gibt nun 9 Greensche Operatoren  $\underline{G}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), welche einen Tensoroperator bilden. Setzt man den Ansatz Gl. (4.85) in Gl. (4.83) ein, so folgt

$$(\underline{L}\underline{G}_{ij} - \delta_{ij}\underline{L})|g_j\rangle = 0, \quad (4.86)$$

und daraus erhält man die Beziehungen

$$\underline{L}\underline{G}_{ij} = \delta_{ij}\underline{L}, \quad \underline{G}_{ij} = \underline{G}_{ji}. \quad (4.87)$$

Der Greensche Tensor

$$\langle \vec{x} | \underline{G}_{ij} | \vec{x}_0 \rangle = G_{ij}(\vec{x}, \vec{x}_0)$$

ist symmetrisch, die Funktionen gehören bezüglich  $\vec{x}$  zu  $\mathcal{L}$ . Die Lösung inhomogener Probleme zu inhomogenen Randbedingungen erfolgt im Prinzip wie in Abschn. (4.4).

Für Vektorfelder lassen sich folgende Randbedingungen vorschreiben:

1. Die Normalkomponente und die Tangentialkomponente des Vektorfeldes am Rand des dreidimensionalen Bereichs, oder aber
2. die Divergenz des Vektorfeldes und die Tangentialkomponente der Rotation am Rand des dreidimensionalen Bereichs.

Es gibt folgende Spezialfälle von Vektorfeldern:

1. Longitudinale Felder: Als solche werden Felder bezeichnet, bei denen die Rotation überall verschwindet. In diesem Fall kann als Randbedingung alternativ die Divergenz oder die Normalkomponente des Feldes vorgeschrieben werden.
2. Transversale Felder: Als solche bezeichnet man Felder, bei denen die Divergenz überall verschwindet. In diesem Fall kann als Randbedingung alternativ die Tangentialkomponente des Feldes oder die Tangentialkomponente der Rotation des Feldes vorgeschrieben werden.

## Kapitel 5

# Beispiele für Greensche Funktionen

### 5.1 Der Laplace-Operator in zwei Dimensionen in kartesischen Koordinaten

Die Randwertaufgabe erster Art sei für ein Rechteck  $0 \leq x_1 \leq a$ ,  $0 \leq x_2 \leq b$  zu lösen:

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)w(x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \quad w \neq 0 \quad \text{am Rand.} \quad (5.1)$$

Nach Gl. (4.40) erhält man die Greensche Funktion aus

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)G(x_1, x_2; x_{10}, x_{20}) = \delta(x_1 - x_{10})\delta(x_2 - x_{20}), \quad G = 0 \quad \text{am Rand.} \quad (5.2)$$

#### 5.1.1 Erstes Lösungsverfahren: Ein Operator wird als Konstante betrachtet

Zunächst sind die Operatoren zu definieren. Es sei hier folgende Wahl getroffen:  $\underline{L} = \underline{L}_1 - \underline{L}_2$ ,

$$\begin{aligned} \underline{L}_1: \quad L_1 &= -\partial^2/\partial x_1^2, & \mathcal{L}_1: \quad u_1(x_1) &= 0 & \text{für } x_1 = 0, x_1 = a, \\ \underline{L}_2: \quad L_2 &= +\partial^2/\partial x_2^2, & \mathcal{L}_2: \quad u_2(x_2) &= 0 & \text{für } x_2 = 0, x_2 = b. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die Wahl der Vorzeichen ist beliebig, entscheidet aber über die sich ergebenden Eigenfunktionen der Operatoren. Aus Gl. (4.24)–Gl. (4.28) entnimmt man, daß  $\underline{L}_1 = \underline{L}_1^\dagger$ ,  $\underline{L}_2 = \underline{L}_2^\dagger$  erfüllt ist. Die beiden Operatoren sind vertauschbar, wenn in Anwendung auf eine Funktion  $u(x_1, x_2)$  die Bedingung  $L_1 L_2 u(x_1, x_2) = L_2 L_1 u(x_1, x_2)$  zutrifft (das setzt viermal stetig differenzierbare Funktionen voraus).

Ferner ist wichtig, daß die Randbedingungen in  $\mathcal{L}_1$  allein durch die Koordinate  $x_1$ , die in  $\mathcal{L}_2$  allein durch die Koordinate  $x_2$  formuliert werden können: Das trifft nur dann zu, wenn die Grenzen des betrachteten Bereichs mit „Flächen“  $x_i = \text{const}$  zusammenfallen (eine wichtige Voraussetzung für die analytische Lösbarkeit von Randwertaufgaben!).

Es kann daher wichtig sein, nichtkartesische Koordinatensysteme zu studieren und zu prüfen, ob die Grenzen von Bereichen nicht in unkonventionellen Koordinatensystemen durch Koordinatenflächen  $x_i = \text{const}$  angenähert werden können (eine Übersicht über solche Koordinatensysteme, die wichtigsten Differentialoperatoren und deren Eigenfunktionen bietet [7]).

Bei der Inversion des Operators  $\underline{L} = \underline{L}_1 - \underline{L}_2$  soll  $\underline{L}_2$  als Konstante betrachtet werden. Gl. (5.2) wird eine gewöhnliche Differentialgleichung, in der  $\underline{L}_2$  als eine Konstante aufgefaßt wird.

$$-\frac{d^2 G}{dx_1^2} - L_2 G = \delta(x_1 - x_{10})\delta(x_2 - x_{20}), \quad G = 0 \quad \text{für } x_1 = 0, x_1 = a. \quad (5.4)$$

Die Lösung kann nach der Methode von Gl. (2.52) gefunden werden; dabei ist zu berücksichtigen, daß im Sprung der ersten Ableitung noch der Faktor  $\delta(x_2 - x_{20})$  vorkommen muß. In Analogie zu Gl. (3.76)–Gl. (3.77) kann die Greensche Funktion mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} h_1(x_1) &= \sin(x_1\sqrt{L_2}), & h_2(x_1) &= \sin[(a - x_1)\sqrt{L_2}], \\ K(h_1, h_2) &= h_2h_1' - h_1h_2' = \sqrt{L_2} \sin(a\sqrt{L_2}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

sofort angeschrieben werden:

$$G(x_1, x_2; x_{10}, x_{20}) = \begin{cases} \frac{\sin(x_1\sqrt{L_2}) \sin[(a - x_{10})\sqrt{L_2}] \delta(x_2 - x_{20})}{\sqrt{L_2} \sin(a\sqrt{L_2})}, & 0 \leq x_1 < x_{10}, \\ \frac{\sin(x_{10}\sqrt{L_2}) \sin[(a - x_1)\sqrt{L_2}] \delta(x_2 - x_{20})}{\sqrt{L_2} \sin(a\sqrt{L_2})}, & x_{10} < x_1 \leq a. \end{cases} \quad (5.6)$$

Jetzt „erinnert“ man sich daran, daß  $L_2$  ein Operator ist. Gl. (5.6) ist von der Form  $f(L_2)\delta(x_2 - x_{20})$ , wobei  $f(L_2)$  eine Funktion ist, die sich in eine Potenzreihe von  $L_2$  entwickeln läßt. Der Ausdruck ist durch Gl. (3.41) erklärt; es müssen daher die Eigenfunktionen  $u_{k2}(x_2)$ ,  $v_{k2}(x_2)$  (Eigenfunktionen von  $\underline{L}_2$ ,  $\underline{L}_2^\dagger = \underline{L}_2$ ) ermittelt werden.

Die Eigenfunktionen von  $L_2$  sind Lösungen von

$$\frac{d^2 u_{k2}(x_2)}{dx_2^2} = \lambda_{k2} u_{k2}(x_2), \quad u_{k2}(0) = u_{k2}(b) = 0. \quad (5.7)$$

Aus den Randbedingungen erhält man für die Eigenfunktionen und die Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned} u_{k2}(x_2) &= C \sinh(x_2\sqrt{\lambda_{k2}}), \\ 0 &= \sinh(b\sqrt{\lambda_{k2}}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Um positive, reelle Eigenwerte zu finden, setzt man  $\lambda_{k2} = n^2$ ,  $n$  reell. Aus  $\sinh(bn) = 0$  folgt die Lösung  $\lambda_{k2} = 0$ : Sie ist kein Eigenwert, weil Gl. (5.7) für  $\lambda_{k2} = 0$  nur die triviale Lösung  $u_{k2}(x_2) = 0$  besitzt. Die Probe nach negativen, reellen Eigenwerten erfolgt, indem man  $\lambda_{k2} = -n^2$ ,  $n$  reell setzt. Aus  $\sinh(jbn) = j \sin(bn) = 0$  erhält man die Eigenwerte

$$\lambda_{k2} = -n^2 = -\frac{k^2\pi^2}{b^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

und die normierten Eigenfunktionen

$$u_{k2}(x_2) = v_{k2}(x_2) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{k\pi x_2}{b}\right). \quad (5.10)$$

In Anwendung von Gl. (3.41) erhält man unter Beachtung von Gl. (5.9), Gl. (5.10)

$$f(\sqrt{L_2})\delta(x_2 - x_{20}) = \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{jk\pi}{b}\right) \frac{2}{b} \sin\left(\frac{k\pi x_2}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi x_{20}}{b}\right). \quad (5.11)$$

Mit Gl. (5.11) erhält man aus Gl. (5.6) die gesuchte Greensche Funktion

$$G = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sinh\left(\frac{k\pi x_1}{b}\right) \sinh\left[\frac{k\pi(a-x_{10})}{b}\right] \sin\left(\frac{k\pi x_2}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi x_{20}}{b}\right)}{k\pi \sinh\left(\frac{k\pi a}{b}\right)}, & 0 \leq x_1 < x_{10}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sinh\left(\frac{k\pi x_{10}}{b}\right) \sinh\left[\frac{k\pi(a-x_1)}{b}\right] \sin\left(\frac{k\pi x_2}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi x_{20}}{b}\right)}{k\pi \sinh\left(\frac{k\pi a}{b}\right)}, & x_{10} < x_1 \leq a. \end{cases} \quad (5.12)$$

Wie in Abschn. (4.6) erläutert, ergibt sich die Greensche Funktion als eine Reihenentwicklung nach den Eigenfunktionen  $u_{k2}(x_2)$ , weil  $L_2$  bei der Inversion als Konstante betrachtet wurde.

Hätte man bei der Inversion  $L_1$  als Konstante betrachtet, so hätte man als Ergebnis eine Greensche Funktion erhalten, die aus Gl. (5.12) resultiert, wenn man folgende Vertauschungen vornimmt:  $a \leftrightarrow b$ ,  $x_1 \leftrightarrow x_2$ ,  $x_{10} \leftrightarrow x_{20}$ . Diese beiden Greenschen Funktionen liefern identische Funktionswerte, aber weil die Variablen einmal als Argumente von Winkelfunktionen, einmal als Argumente von Hyperbelfunktionen vorkommen, ist die Konvergenz der Reihen verschieden gut und von der Wahl der Punkte  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_{10}, x_{20})$  abhängig.

### 5.1.2 Zweites Lösungsverfahren: Direkte Inversion des Operators

Für die Operatoren wird folgende Bezeichnung verabredet:  $\underline{L} = \underline{L}_1 + \underline{L}_2$ , mit

$$\begin{aligned} \underline{L}_1: \quad L_1 &= -\partial^2/\partial x_1^2, & \mathcal{L}_1: \quad u_1(x_1) &= 0 & \text{für } x_1 = 0, x_1 = a, \\ \underline{L}_2: \quad L_2 &= -\partial^2/\partial x_2^2, & \mathcal{L}_2: \quad u_2(x_2) &= 0 & \text{für } x_2 = 0, x_2 = b. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Die Eigenfunktionen und Eigenwerte dieser hermiteschen Operatoren sind

$$\begin{aligned} u_{k1}(x_1) &= v_{k1}(x_1) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{k_1 \pi x_1}{a}\right), & \lambda_{k1} &= \frac{k_1^2 \pi^2}{a^2}, & k_1 &= 1, 2, \dots, \\ u_{k2}(x_2) &= v_{k2}(x_2) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{k_2 \pi x_2}{b}\right), & \lambda_{k2} &= \frac{k_2^2 \pi^2}{b^2}, & k_2 &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.14)$$

Aus  $\underline{G} = \underline{L}^{-1}$  folgt (siehe auch Gl. (4.72)) in Anwendung von Gl. (3.41)

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2; x_{10}, x_{20}) &= (L_1 + L_2)^{-1} \delta(x_1 - x_{10}) \delta(x_2 - x_{20}) \\ &= \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{4ab \sin\left(\frac{k_1 \pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{k_2 \pi x_2}{b}\right) \sin\left(\frac{k_1 \pi x_{10}}{a}\right) \sin\left(\frac{k_2 \pi x_{20}}{b}\right)}{k_1^2 \pi^2 b^2 + k_2^2 \pi^2 a^2}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

In diesem Fall erhält man die Greensche Funktion als Doppelsumme. Wenn man eine dieser Summen durch komplexe Integration aufsummiert (etwa mit Hilfe der Funktion von Gl. (3.30)), so ergibt sich die Greensche Funktion in der Form Gl. (5.12) oder in der durch Vertauschung  $a \leftrightarrow b$ ,  $x_1 \leftrightarrow x_2$ ,  $x_{10} \leftrightarrow x_{20}$  sich ergebenden Form.

## 5.2 Der Laplace-Operator in ebenen Polarkoordinaten

Es ist die Differentialgleichung

$$-\Delta w(\rho, \varphi) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = g(\rho, \varphi), \quad w(a, \varphi) = 0 \quad (5.16)$$

zu lösen. Als Bereich ist ein Kreis  $0 \leq \rho \leq a$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  vorgegeben. Die Greensche Funktion ist — siehe Gl. (4.3), Gl. (4.6) — eine Lösung von ( $\rho \neq 0$ )

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial G}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad G = 0 \quad \text{bei } \rho = a. \quad (5.17)$$

Wenn man den Operator in Gl. (5.17) als einen Operator der Form  $L = L_1 + L_2$  auffaßt, so sieht man, daß  $L_1$ ,  $L_2$  nicht vertauschbar sind. Bei der Inversion von  $L$  kann daher die Strategie von Gl. (4.72) nicht angewendet werden.

Der Operator läßt sich aber in der Form von Gl. (4.82) schreiben, wobei auch die Bedingungen Gl. (4.80), Gl. (4.81) erfüllt sind:

$$L = P_1 Q_1 + P_2 Q_2, \quad \begin{cases} P_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right), & P_2 = \frac{1}{\rho^2}, \\ Q_1 = 1 & Q_2 = -\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{cases} \quad (5.18)$$

Bei der Inversion des Operators  $L$  können  $Q_1, Q_2$  als Konstante betrachtet werden. Es ist zweckmäßig, den Operator  $Q_2$  als eine Konstante  $q^2$  zu betrachten. Man erhält für  $G$  eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$LG = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dG}{d\rho} \right) + \frac{q^2}{\rho^2} G = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0). \quad (5.19)$$

Die Inversion von  $L$  kann angegeben werden, wenn  $\delta(\rho - \rho_0)/\rho$  nach Eigenfunktionen von  $L$  entwickelt wird, siehe Gl. (3.41). Das Eigenwertproblem lautet

$$\left[ -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{q^2}{\rho^2} \right] u_k(\rho) = \lambda_k u_k(\rho), \quad u_k(a) = 0; \quad u_k(0) \text{ endlich.} \quad (5.20)$$

Aus Gl. (2.26), Gl. (2.27) und Gl. (2.35) sieht man, daß der Operator von Gl. (5.20) selbstadjungiert ist: Es sind reelle Eigenwerte zu erwarten, ferner gilt  $u_k(\rho) = v_k(\rho)$ , die Eigenfunktionen des Operators und des adjungierten Operators sind identisch.

Gl. (5.20) ist die Besselsche Differentialgleichung. Lösungen, die bei  $\rho = 0$  endlich sind, sind die Besselfunktionen  $q$ -ter Ordnung

$$u_k(\rho) = C_k J_q(\rho \sqrt{\lambda_k}). \quad (5.21)$$

$C_k$  ist eine Normierungskonstante. Die  $k$ -te Nullstelle von  $J_q(x)$  werde mit  $\alpha_{qk}$  bezeichnet. Die Eigenwerte folgen aus der Randbedingung:

$$u_k(a) = 0 = J_q(a \sqrt{\lambda_k}) = J_q(\alpha_{qk}), \quad \lambda_k = \frac{\alpha_{qk}^2}{a^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.22)$$

Somit lauten die Eigenfunktionen

$$u_k(\rho) = v_k(\rho) = C_k J_q \left( \frac{\alpha_{qk} \rho}{a} \right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.23)$$

Die Normierungskonstante folgt aus der Forderung  $\langle u_k | v_l \rangle = \delta_{kl}$ . Nach Gl. (2.13) ist zu berücksichtigen, daß die Gewichtsfunktion  $r(x)$  hier  $\rho$  ist, siehe Gl. (5.20). Unter Benutzung eines speziellen Integrals für Besselfunktionen folgt aus Gl. (5.23)

$$\langle u_k | v_l \rangle = \int_0^a u_k(\rho) u_l(\rho) \rho d\rho = C_k^2 \frac{a^2}{2} [J'_q(\alpha_{qk})]^2 \delta_{kl}. \quad (5.24)$$

Die normierten Eigenfunktionen sind somit die Funktionen

$$u_k(\rho) = v_k(\rho) = \frac{\sqrt{2} J_q \left( \frac{\alpha_{qk} \rho}{a} \right)}{a J'_q(\alpha_{qk})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.25)$$

Die Vollständigkeitsrelation Gl. (3.11) lautet:

$$\langle \rho | \rho_0 \rangle = \frac{\delta(\rho - \rho_0)}{\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 J_q \left( \frac{\alpha_{qk} \rho}{a} \right) J_q \left( \frac{\alpha_{qk} \rho_0}{a} \right)}{[a J'_q(\alpha_{qk})]^2}. \quad (5.26)$$

Setzt man Gl. (5.26) in Gl. (5.19) ein, wendet auf die Gleichung von links den Operator  $L^{-1}$  an und beachtet Gl. (3.41), Gl. (5.22), so erhält man für die Greensche Funktion das Zwischenergebnis

$$G = L^{-1} \left[ \frac{\delta(\rho - \rho_0)}{\rho} \right] \delta(\varphi - \varphi_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 J_q \left( \frac{\alpha_{qk} \rho}{a} \right) J_q \left( \frac{\alpha_{qk} \rho_0}{a} \right) \delta(\varphi - \varphi_0)}{[\alpha_{qk} J'_q(\alpha_{qk})]^2}. \quad (5.27)$$

Jetzt „erinnert“ man sich daran, daß  $q$  keine Konstante ist, sondern daß  $q^2 = Q_2 = -\partial^2/\partial\varphi^2$  als Operator auf  $\delta(\varphi - \varphi_0)$  angewendet werden muß. Dazu muß  $\delta(\varphi - \varphi_0)$  nach Eigenfunktionen von  $Q_2$  entwickelt werden. Die Eigenfunktionen folgen aus

$$-\frac{d^2 u_m(\varphi)}{d\varphi^2} = \lambda_m u_m(\varphi), \quad u_m(0) = u_m(2\pi), \quad u'_m(0) = u'_m(2\pi). \quad (5.28)$$

Der Operator von Gl. (5.28) ist für periodische Randbedingungen selbstadjungiert (siehe Abschn. (2.3), Anmerkung nach Gl. (2.35)). Die Lösungen lauten

$$u_m(\varphi) = C_m e^{j\varphi\sqrt{\lambda_m}}, \quad \lambda_m = m^2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.29)$$

$\lambda_m = 0$  ist tatsächlich ein Eigenwert, weil eine nichttriviale Lösung  $u_0(\varphi) = C_0$  existiert. Die normierten Eigenfunktionen von  $Q_2 = -d^2/d\varphi^2$  lauten:

$$u_m(\varphi) = v_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jm\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \lambda_m = m^2. \quad (5.30)$$

Die Vollständigkeitsrelation Gl. (3.11) ist

$$\delta(\varphi - \varphi_0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_m(\varphi) v_m^*(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{jm(\varphi - \varphi_0)}. \quad (5.31)$$

In Gl. (5.27) kommt die „Konstante“  $q = \sqrt{Q_2}$  vor. Wegen Gl. (3.41), Gl. (5.30) gilt

$$\begin{aligned} f(\sqrt{Q_2})\delta(\varphi - \varphi_0) &= f(q)\delta(\varphi - \varphi_0) = \sum_m f(\sqrt{\lambda_m}) u_m(\varphi) v_m^*(\varphi_0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) e^{jm(\varphi - \varphi_0)}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Setzt man Gl. (5.31) in Gl. (5.27) ein und geht analog Gl. (5.32) vor, so erhält man die Greensche Funktion

$$G(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{J_m\left(\frac{\alpha_{mk}\rho}{a}\right) J_m\left(\frac{\alpha_{mk}\rho_0}{a}\right) e^{jm(\varphi - \varphi_0)}}{\pi[\alpha_{mk} J'_m(\alpha_{mk})]^2}. \quad (5.33)$$

## 5.2.1 Der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten

In Zylinderkoordinaten lautet der Laplace-Operator

$$L = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial\rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\Delta. \quad (5.34)$$

Da  $\partial^2/\partial z^2$  mit den anderen Operatoren vertauschbar ist, kann man diesen Operator bei der Inversion von  $L$  als eine Konstante  $-\partial^2/\partial z^2 = A$  betrachten. Zu invertieren ist demnach der Operator

$$L = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial\rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + A. \quad (5.35)$$

Er ist von der Form Gl. (4.82) mit  $L = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3$ , wenn man die Operatoren wie folgt festsetzt:

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial\rho} \right), & P_2 &= \frac{1}{\rho^2}, & P_3 &= A, \\ Q_1 &= 1, & Q_2 &= -\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, & Q_3 &= 1. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Diese Operatoren erfüllen die Bedingungen Gl. (4.80), Gl. (4.81), und daher kann man bei der Inversion von  $L$  auch  $Q_2$  als Konstante  $Q_2 = q^2$  betrachten. Man erhält für die Greensche Funktion eine gewöhnliche Differentialgleichung analog Gl. (5.19):

$$LG = \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{q^2}{\rho^2} + A \right] G = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0), \quad (5.37)$$

welche mit der soeben demonstrierten Methode gelöst werden kann.

### 5.3 Der Laplace-Operator in drei Dimensionen

Um das Problem

$$-\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) w(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3) \quad (5.38)$$

zu lösen, soll vorausgesetzt werden, daß sich die Ursache  $g(x_i)$  im Endlichen befindet. Wegen der Normierbarkeit von  $|w|$  muß  $|w(\vec{x})|^2$  über den ganzen Raum integrierbar sein (also im Unendlichen wie  $1/(|\vec{x}|^{2+\alpha})$  verschwinden,  $\alpha > 1$ ). Die Greensche Funktion ist die Lösung von

$$-\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad G \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (5.39)$$

Die drei Teiloperatoren kommutieren paarweise. Die Inversion soll direkt nach dem Muster (siehe auch Gl. (4.72))

$$\underline{G} = (\underline{L}_1 + \underline{L}_2 + \underline{L}_3)^{-1} = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \frac{|u_{k_1}, u_{k_2}, u_{k_3}\rangle dk_1 dk_2 dk_3 \langle v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3}|}{\lambda_1(k_1) + \lambda_2(k_2) + \lambda_3(k_3)} \quad (5.40)$$

erfolgen. Die Eigenfunktionen des selbstadjungierten Operators  $L_1 = -\partial^2/\partial x_1^2$  (analog für  $L_2$ ,  $L_3$ ) folgen aus

$$L_1 u_{k_1}(x_1) = -\frac{d^2 u_{k_1}(x_1)}{dx_1^2} = \lambda_{k_1} u_{k_1}(x_1). \quad (5.41)$$

Die Eigenfunktionen sollten quadratintegrierbar sein, also für  $|x_1| \rightarrow \infty$  hinreichend schnell gegen Null gehen. Als Lösungen verwendet man die Funktionen

$$u(k_1, x_1) = v(k_1, x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jk_1 x_1}, \quad \lambda_{k_1} = k_1^2, \quad -\infty < k_1 < \infty. \quad (5.42)$$

Wir merken dabei vor, daß wir — wenn dies an einer Stelle der Rechnung notwendig erscheinen sollte —  $k_1$  einen „kleinen“ Imaginärteil mit einem die Konvergenz erzwingenden Vorzeichen verleihen. Die Eigenfunktionen Gl. (5.42) sind normiert, weil mit Gl. (3.5), Gl. (1.23) gilt

$$\langle u_{k_1} | v_{l_1} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u^*(k_1, x_1) v(l_1, x_1) dx_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(l_1 - k_1)x_1} dx_1 = \delta(l_1 - k_1). \quad (5.43)$$

Die Vollständigkeitsrelation Gl. (3.11) lautet

$$\delta(x_1 - x_{10}) = \int u(k_1, x_1) v^*(k_1, x_{10}) dk_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk_1(x_1 - x_{10})} dk_1. \quad (5.44)$$

Es gilt

$$f(L_1) \delta(x_1 - x_{10}) = \int f(\lambda_{k_1}) u(k_1, x_1) v^*(k_1, x_{10}) dk_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k_1^2) e^{jk_1(x_1 - x_{10})} dk_1. \quad (5.45)$$

Für die Eigenfunktionen der Operatoren  $L_2 = -\partial^2/\partial x_2^2$ ,  $L_3 = -\partial^2/\partial x_3^2$  gelten zu Gl. (5.41)–Gl. (5.45) analoge Beziehungen. Unter Benutzung dieser Beziehungen erhält man für die Greensche Funktion Gl. (5.40) mit der Bezeichnung  $\vec{k} \hat{=} (k_1, k_2, k_3)$

$$G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[j\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)]}{k^2} dk_1 dk_2 dk_3. \quad (5.46)$$

Man beachte, daß das Ergebnis Gl. (5.46) auch aus einer dreidimensionalen Fourier-Transformation von Gl. (5.39), algebraischer Berechnung des Fourier-Spektrums von  $G$  und anschließender Rücktransformation gefolgt wäre.

Gl. (5.46) wird integriert, indem man im  $k$ -Raum Kugelkoordinaten einführt; als Poldistanz  $\vartheta$  wählt man den Winkel zwischen den Vektoren  $\vec{k}$ ,  $\vec{x} - \vec{x}_0$  (siehe auch Gl. (4.7)):

$$\begin{aligned} \vec{k}^2 = k^2 &= k_1^2 + k_2^2 + k_3^2, \\ dk_1 dk_2 dk_3 &\rightarrow k^2 \sin \vartheta dk d\vartheta d\varphi, \\ \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) &= k|\vec{x} - \vec{x}_0| \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Man erhält:

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, \vec{x}_0) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^\infty \exp(jk|\vec{x} - \vec{x}_0| \cos \vartheta) dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) \int_0^\infty \exp(jk|\vec{x} - \vec{x}_0| \cos \vartheta) dk \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin(k|\vec{x} - \vec{x}_0|)}{k|\vec{x} - \vec{x}_0|} dk = \frac{1}{2\pi^2|\vec{x} - \vec{x}_0|} \int_0^\infty \frac{\sin \xi d\xi}{\xi} \\ &= \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

In der Elektrotechnik gilt für das Potential die Gleichung (Poisson-Gleichung,  $\rho$  ist die Raumladungsdichte)

$$-\Delta\varphi(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon}. \quad (5.49)$$

Die Lösung Gl. (4.43) für homogene Randbedingungen im Unendlichen ( $\varphi = 0$  für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ ) lautet unter Verwendung der Greenschen Funktion Gl. (5.48)

$$\varphi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}_0)}{4\pi\varepsilon|\vec{x} - \vec{x}_0|} dV_0. \quad (5.50)$$

## 5.4 Die Wellengleichung

Es sei die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) w(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t) \quad (5.51)$$

gesucht. Die „Ursache“  $g(\vec{x}, t)$  sei im Raum und in der Zeit von endlicher Ausdehnung.  $w$  soll für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  verschwinden. Die Greensche Funktion folgt aus

$$-\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)\delta(t - t_0). \quad (5.52)$$

Bezüglich  $\vec{x}$  gilt dieselbe Randbedingung wie in Gl. (5.39); ferner muß die Greensche Funktion kausal sein, d. h.  $G = 0$  für  $t - t_0 < 0$ .

Die Operatoren  $L_1, L_2, L_3$  werden wie in Abschn. (5.3) definiert. Mit

$$L_4 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad L_4 u(\omega, t) = \lambda_\omega u(\omega, t) \quad (5.53)$$

ergeben sich die normierten Eigenfunktionen des ebenfalls selbstadjungierten Operators  $L_4$

$$u(\omega, t) = v(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\omega t}, \quad \lambda_\omega = -\frac{\omega^2}{c^2}, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (5.54)$$

Analog Gl. (5.44), Gl. (5.45) erhält man

$$\begin{aligned} \delta(t - t_0) &= \int u(\omega, t) v^*(\omega, t_0) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega, \\ f(L_4)\delta(t - t_0) &= \int f(\lambda_\omega) u(\omega, t) v^*(\omega, t_0) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(-\frac{\omega^2}{c^2}\right) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Jetzt wird der Operator  $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$  invertiert. Die Lösung für  $G$  kann in Analogie zu Gl. (5.46) sofort angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[j\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + j\omega(t - t_0)]}{\vec{k}^2 - \omega^2/c^2} dk_1 dk_2 dk_3 d\omega \\ &= -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{+\infty} dk_1 dk_2 dk_3 e^{j\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega(t-t_0)} d\omega}{(\omega + ck)(\omega - ck)}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Das Integral längs der reellen  $\omega$ -Achse ist nicht existent, da der Integrand Pole erster Ordnung an den Stellen  $\omega = \pm ck$  aufweist. Um ein Konvergieren der Lösung für  $t \rightarrow \infty$  zu garantieren, müßte  $\omega$  in Gl. (5.54) einen kleinen positiven Imaginärteil aufweisen. Man kann sich wie in Abschn. (2.5.3) aber auch so behelfen, daß man das Integral in der Umgebung der Pole so interpretiert, daß die gewünschte kausale Greensche Funktion resultiert. Durch Vergleich mit Gl. (2.58) — (dort mußte die Lösung für  $x - x_0 < 0$  verschwinden, hier für  $t - t_0 < 0$ ; die richtige Interpretation des Integrationsweges war dort das Umgehen des Pols unterhalb der reellen Achse) — ergibt sich, daß bei der Integration über die reelle  $\omega$ -Achse die beiden Pole unterhalb der reellen Achse zu umgehen sind. Für  $t - t_0 < 0$  kann dieses Integral berechnet werden, indem man es zu einem Umlaufintegral über die untere  $\omega$ -Halbebene ergänzt: Es hat den Wert Null, da keine Pole umschlossen werden; das Integral über den unendlich großen Halbkreis verschwindet, da der Integrand für  $|\omega| \rightarrow \infty$  wie  $\exp(-|\omega||t - t_0|)$  verschwindet.

Für  $t - t_0 > 0$  kann man das Integral durch Ergänzen zu einem Umlaufintegral in der oberen  $\omega$ -Halbebene berechnen: Es verschwindet auf dem unendlich großen Halbkreis wie  $\exp(-|\omega||t - t_0|)$ , der gesuchte Wert des Integrals ist  $2\pi j$  mal der Summe der Residuen an den Stellen  $\omega = \pm ck$ . Somit folgt aus Gl. (5.56)

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) &= \\ &= -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{+\infty} dk_1 dk_2 dk_3 e^{j\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)} 2\pi j H(t - t_0) \left[ \frac{e^{jck(t-t_0)}}{2ck} - \frac{e^{-jck(t-t_0)}}{2ck} \right]. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Das Integral über den  $k$ -Raum wird mit Gl. (5.47) wieder auf Kugelkoordinaten transformiert,

$$\begin{aligned}
G &= -\frac{jc}{2(2\pi)^3} H(t-t_0) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos\vartheta) \int_0^\infty e^{jk|\vec{x}-\vec{x}_0|\cos\vartheta} 2j \sin[ck(t-t_0)] k dk \\
&= \frac{c}{(2\pi)^2} H(t-t_0) \int_0^\infty \frac{2j \sin[k|\vec{x}-\vec{x}_0|]}{jk|\vec{x}-\vec{x}_0|} \cdot \sin[ck(t-t_0)] k dk \\
&= \frac{cH(t-t_0)}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}_0|} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin[kc(t-t_0)] \sin[k|\vec{x}-\vec{x}_0|] dk.
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Das Integral wurde bereits in Gl. (3.93) berechnet. Berücksichtigt man noch die Beziehung  $\delta(\alpha x) = \delta(x)/\alpha$ , so erhält man die Greensche Funktion

$$\begin{aligned}
G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) &= \frac{H(t-t_0)}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}_0|} \left[ \delta\left(t-t_0 - \frac{|\vec{x}-\vec{x}_0|}{c}\right) - \delta\left(t-t_0 + \frac{|\vec{x}-\vec{x}_0|}{c}\right) \right] \\
&= \frac{H(t-t_0)}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}_0|} \delta\left(t-t_0 - \frac{|\vec{x}-\vec{x}_0|}{c}\right).
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Die letzte Form ergibt sich daraus, daß wegen  $t-t_0 > 0$ ,  $|\vec{x}-\vec{x}_0|/c > 0$  das Argument der zweiten Deltafunktion nie den Wert null annehmen kann. Die Lösung von Gl. (5.51) in der Form Gl. (4.43) lautet daher

$$\begin{aligned}
w(\vec{x}, t) &= \iiint G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) g(\vec{x}_0, t_0) dV_0 dt_0 \\
&= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{g\left(x_{10}, x_{20}, x_{30}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}_0|}{c}\right)}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}_0|} dx_{10} dx_{20} dx_{30}.
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Wie man sieht, kann eine Wirkung am Ort  $\vec{x}$  zufolge einer Ursache am Ort  $\vec{x}_0$  erst zu einem Zeitpunkt entstehen, der um die Laufzeit  $|\vec{x}-\vec{x}_0|/c$  später liegt als der Zeitpunkt, zu dem die Ursache tätig war.

## 5.5 Die eindimensionale Wärmeleitung

Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung ohne Wärmequellen (homogenes Problem) ist zu lösen. Gegeben ist die Temperaturverteilung zum Zeitpunkt  $t=0$ ,  $w(x, 0) = w_0(x)$ . Für  $|x| \rightarrow \infty$  soll  $w(x, t) = 0$  sein.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial}{\partial t} \right) w(x, t) = 0, \quad w(x, 0) = w_0(x), \quad w \rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty. \tag{5.61}$$

Die Greensche Funktion zu homogenen Randbedingungen ist die Lösung von

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial}{\partial t} \right) G(x, t; x_0, t_0) &= \delta(x-x_0)\delta(t-t_0), \\
G &= 0 \quad \text{für } t=0, |x| \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Bei der Inversion wird der Operator  $L_1 = -\partial^2/\partial x^2$  als Konstante betrachtet. Es bleibt für  $G$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dG}{dt} + \frac{L_1}{a^2} G = -\frac{1}{a^2} \delta(x-x_0)\delta(t-t_0), \quad G = 0 \text{ für } t=0, \tag{5.63}$$

deren Lösung im Bereich  $t \geq 0$  gesucht wird. Analog zu den Überlegungen von Abschn. (2.5.4), Gl. (2.65), Gl. (2.66) erhält man

$$G = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0, \\ C \exp(-L_1 t/a^2), & t_0 < t < \infty. \end{cases} \quad (5.64)$$

Die Integrationskonstante  $C$  erhält man, indem man Gl. (5.63) über eine auf  $t_0$  zentrierte  $\varepsilon$ -Umgebung integriert und den Lösungsansatz Gl. (5.64) verwendet:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [G(t_0 + \varepsilon) - G(t_0 - \varepsilon)] = C \exp(-L_1 t_0/a^2) = -\delta(x - x_0)/a^2. \quad (5.65)$$

Setzt man die Konstante  $C$  in Gl. (5.64) ein, so erhält man die Greensche Funktion

$$G(x, t; x_0, t_0) = -\frac{H(t - t_0)}{a^2} e^{L_1(t_0 - t)/a^2} \delta(x - x_0). \quad (5.66)$$

Jetzt „erinnert“ man sich daran, daß  $L_1 = -\partial^2/\partial x^2$  ein Operator ist; seine Wirkung auf  $\delta(x - x_0)$  wurde bereits in Abschn. (5.3), Gl. (5.41)–Gl. (5.45) untersucht:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk(x-x_0)} dk, \quad f(L_1)\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k^2) e^{jk(x-x_0)} dk. \quad (5.67)$$

Setzt man in Gl. (5.66) ein, so folgt

$$G(x, t; x_0, t_0) = -\frac{H(t - t_0)}{2\pi a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-k^2 \frac{t - t_0}{a^2} + jk(x - x_0)\right] dk. \quad (5.68)$$

Unter Verwendung der Integralformel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-c_1^2 k^2 - 2c_2 k] dk = \frac{\sqrt{\pi}}{c_1} \exp\left(\frac{c_2^2}{c_1^2}\right), \quad c_1 > 0, \quad (5.69)$$

erhält man das Ergebnis

$$G(x, t; x_0, t_0) = -\frac{H(t - t_0)}{\sqrt{4\pi a^2(t - t_0)}} \exp\left[-\frac{a^2(x - x_0)^2}{4(t - t_0)}\right]. \quad (5.70)$$

Die Lösung von Gl. (5.61) folgt aus Gl. (4.43) mit dem Konjunktvektor Gl. (4.34), wobei später die Koordinaten  $x_1, x_2$  durch  $x, t$  zu ersetzen sind:

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2) &= -\iint \left( \frac{\partial K_1}{\partial x_{10}} + \frac{\partial K_2}{\partial x_{20}} \right) dx_{10} dx_{20}, \\ K_i(G, w) &\hat{=} \left( G \frac{\partial w}{\partial x_1} - w \frac{\partial G}{\partial x_1}, -a^2 G w \right). \end{aligned} \quad (5.71)$$

Aus Gl. (5.71) folgt:

$$w(x, t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dt_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_0} \left[ G \frac{\partial w}{\partial x_0} - w \frac{\partial G}{\partial x_0} \right] + \frac{\partial}{\partial t_0} [-a^2 G w] \right\}. \quad (5.72)$$

Der erste Anteil des Integranden liefert keinen Beitrag, weil nach Integration über  $x_0$  sowohl  $G$  als auch  $w$  bei  $x_0 = \pm\infty$  verschwinden. Der zweite Term des Integranden liefert den Beitrag

$$\begin{aligned}
w(x, t) &= a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} [G(x, t; x_0, t_0)w(x_0, t_0)] \Big|_{t_0=0}^{t_0=\infty} dx_0 \\
&= -a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, t; x_0, 0)w_0(x_0)dx_0 \\
&= \frac{H(t)}{\sqrt{2\pi(2t/a^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} w_0(x_0) \exp \left[ -\frac{(x-x_0)^2}{2(2t/a^2)} \right] dx_0.
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Damit ist die Temperaturverteilung  $w(x, t)$  gefunden, welche für  $t = 0$  durch  $w_0(x)$  gegeben war. Für einen anfänglichen „Temperaturimpuls“  $w_0(x) = \delta(x-x_1)$  ist  $w(x, t)$  eine auf  $x = x_1$  zentrierte Gaußfunktion mit der Varianz  $\sigma^2 = 2t/a^2$ .

## 5.6 Die Helmholtzgleichung

Für harmonische Vorgänge

$$w(\vec{x}, t) = w(\vec{x}) \exp(j\omega t), \quad g(\vec{x}, t) = g(\vec{x}) \exp(j\omega t) \tag{5.74}$$

erhält man aus der Wellengleichung Gl. (5.51) die Helmholtzgleichung

$$-(\Delta + k_0^2)w(\vec{x}) = g(\vec{x}), \quad k_0 = \frac{\omega}{c}. \tag{5.75}$$

Die Greensche Funktion kann durch Einsetzen von Gl. (5.74) in die Lösung der Wellengleichung Gl. (5.60) erschlossen werden:

$$w(\vec{x}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\vec{x}_0) \exp(-jk_0|\vec{x} - \vec{x}_0|)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|} dx_{10} dx_{20} dx_{30} = \int G(\vec{x}, \vec{x}_0)g(\vec{x}_0)dV_0. \tag{5.76}$$

Es gilt somit für die Lösung von  $-(\Delta + k_0^2)G = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$ :

$$G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \frac{\exp(-jk_0|\vec{x} - \vec{x}_0|)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|}. \tag{5.77}$$

## 5.7 Tensoroperatoren

Im folgenden gilt die analytische Schreibweise (siehe Bemerkung vor Gl. (4.15)). Das zu lösende Problem laute

$$\underline{L}_{ij}|u_j\rangle = |g_i\rangle, \tag{5.78}$$

oder, als Differentialgleichung geschrieben

$$\langle \vec{x} | \underline{L}_{ij} | u_j \rangle = \langle \vec{x} | g_i \rangle = L_{ij} u_j(\vec{x}) = g_i(\vec{x}). \tag{5.79}$$

Mit dem Lösungsansatz (dem inversen Operator)

$$|u_i\rangle = \underline{G}_{ij} |g_j\rangle \tag{5.80}$$

erhält man aus Gl. (5.78) (man beachte, daß in der analytischen Schreibweise jeder Index in einem Ausdruck höchstens zweimal vorkommen darf, wobei über doppelt vorkommende Indizes zu summieren ist)

$$\underline{L}_{ij}\underline{G}_{jk}|g_k\rangle = |g_i\rangle = \delta_{ik}\underline{I}|g_k\rangle,$$

und somit die Gleichung für den Umkehroperator (ein Tensor zweiter Stufe):

$$\underline{L}_{ij}\underline{G}_{jk} = \delta_{ik}\underline{I}. \quad (5.81)$$

Durch Bilden von Matrixelementen dieses Ausdrucks folgt die Differentialgleichung für die Elemente des Greenschen Tensors

$$\langle \vec{x}|\underline{L}_{ij}\underline{G}_{jk}|\vec{x}_0\rangle = \delta_{ik}\langle \vec{x}|\vec{x}_0\rangle = L_{ij}G_{jk}(\vec{x}, \vec{x}_0) = \delta_{ik}\delta(\vec{x} - \vec{x}_0). \quad (5.82)$$

Die Lösung des Problems lautet somit:

$$u_i(\vec{x}) = \langle \vec{x}|u_i\rangle = \langle \vec{x}|\underline{G}_{ij}|g_j\rangle = \int \langle \vec{x}|\underline{G}_{ij}|\vec{x}_0\rangle dV_0 \langle \vec{x}_0|g_j\rangle = \int G_{ij}(\vec{x}, \vec{x}_0)g_j(\vec{x}_0)dV_0 \quad (5.83)$$

## 5.8 Das elektromagnetische Feld

Als Beispiel für das praktische Verfahren bei der Lösung von Differentialgleichungen, bei denen Tensoroperatoren auf Vektoren angewendet werden, wird im folgenden das elektromagnetische Feld behandelt (Strahlung, gesteuert von einem Strom). Aus den Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{H}(\vec{x}, t) &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{J}(\vec{x}, t), \\ \text{rot}\vec{E}(\vec{x}, t) &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}(\vec{x}, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (5.84)$$

folgt mit dem Ansatz Gl. (5.74) für harmonische Vorgänge das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{H}(\vec{x}) &= j\omega\varepsilon_0\vec{E}(\vec{x}) + \vec{J}(\vec{x}), \\ \text{rot}\vec{E}(\vec{x}) &= -j\omega\mu_0\vec{H}(\vec{x}), \end{aligned} \quad (5.85)$$

und nach Eliminieren von  $\vec{H}(\vec{x})$

$$\text{rotrot}\vec{E}(\vec{x}) - k_0^2\vec{E}(\vec{x}) = -j\omega\mu_0\vec{J}(\vec{x}). \quad (5.86)$$

Ist nach Lösen dieser Differentialgleichung  $\vec{E}(\vec{x})$  bekannt, läßt sich auch  $\vec{H} = -\text{rot}\vec{E}/(j\omega\mu_0)$  berechnen.

Für die folgende Rechnung werden noch einige Beziehungen in analytischer Schreibweise benötigt. Die Komponenten der alternierenden Tensordichte (ein Tensor dritter Stufe, auch Levi-Civita-Tensor genannt) lauten in einem rechtshändigen kartesischen Koordinatensystem

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{für 2 oder mehr Indizes gleich,} \\ 1 & \text{für } i, j, k = 123 \text{ oder zyklische Vertauschungen,} \\ -1 & \text{für } i, j, k \text{ sonst.} \end{cases} \quad (5.87)$$

Eine wichtige Beziehung zur Umformung analytischer Ausdrücke (sie ist die abstrakte Form des Grassmannschen Entwicklungssatzes für das Ex-Ex-Produkt von Vektoren, durch Einsetzen spezieller Werte für die Indizes zu verifizieren) lautet:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}. \quad (5.88)$$

Unter Verwendung der bereits in Abschn. (4.2) eingeführten Abkürzung für den Nablavektor,  $\partial_i = \partial/\partial x_i$  ergibt sich als Beispiel folgende Gegenüberstellung von Ausdrücken in symbolischer und in analytischer Schreibweise:

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{div} \vec{A} & \partial_i A_i, \\
\operatorname{rot} \vec{A} & \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k, \\
\Delta \vec{A} & \partial_j \partial_j A_i, \\
\operatorname{grad} A & \partial_i A, \\
\operatorname{rotrot} \vec{A} = \operatorname{graddiv} \vec{A} - \Delta \vec{A} & \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{kpq} \partial_p A_q = \partial_i \partial_j A_j - \partial_j \partial_j A_i.
\end{array} \tag{5.89}$$

Die Differentialgleichung Gl. (5.86) lautet somit in analytischer Schreibweise und in Analogie zu der in Gl. (5.79) verwendeten Schreibweise

$$(\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kpq} \partial_j \partial_p - k_0^2 \delta_{iq}) E_q(\vec{x}) = -j\omega\mu_0 J_i(\vec{x}) = L_{iq} E_q(\vec{x}) = g_i(\vec{x}). \tag{5.90}$$

Die Komponenten des Greenschen Tensors (des Umkehroperators dieser Differentialgleichung) erfüllen nach Gl. (5.82) folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
L_{iq} G_{q\ell}(\vec{x}, \vec{x}_0) &= \delta_{i\ell} \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \\
&= (\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kpq} \partial_j \partial_p - k_0^2 \delta_{iq}) G_{q\ell}(\vec{x}, \vec{x}_0) \\
&= [(\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) \partial_j \partial_p - k_0^2 \delta_{iq}] G_{q\ell}(\vec{x}, \vec{x}_0) \\
&= (\partial_i \partial_q - \delta_{iq} \partial_j \partial_j - k_0^2 \delta_{iq}) G_{q\ell}(\vec{x}, \vec{x}_0).
\end{aligned} \tag{5.91}$$

Für die Lösung macht man den Ansatz

$$G_{q\ell}(\vec{x}, \vec{x}_0) = \left( \delta_{q\ell} + \frac{1}{k_0^2} \partial_q \partial_\ell \right) G(\vec{x}, \vec{x}_0). \tag{5.92}$$

Die Gleichung wird sukzessive vereinfacht:

$$\begin{aligned}
\delta_{i\ell} \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) &= (\partial_i \partial_q - \delta_{iq} \partial_j \partial_j - k_0^2 \delta_{iq}) \left( \delta_{q\ell} + \frac{1}{k_0^2} \partial_q \partial_\ell \right) G(\vec{x}, \vec{x}_0) \\
&= \left( \partial_i \partial_\ell - \delta_{i\ell} \partial_j \partial_j - k_0^2 \delta_{i\ell} + \frac{1}{k_0^2} \partial_i \partial_\ell \partial_q \partial_q - \frac{1}{k_0^2} \partial_i \partial_\ell \partial_j \partial_j - \partial_i \partial_\ell \right) G(\vec{x}, \vec{x}_0) \\
&= -\delta_{i\ell} (\partial_j \partial_j + k_0^2) G(\vec{x}, \vec{x}_0).
\end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion  $G(\vec{x}, \vec{x}_0)$  ist die Lösung der Helmholtzgleichung

$$-(\Delta + k_0^2) G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0), \tag{5.93}$$

die bereits in Gl. (5.77) angegeben wurde. Der gesuchte Greensche Tensor Gl. (5.92) zur Lösung der Differentialgleichung Gl. (5.90) ist somit

$$G_{ij}(\vec{x}, \vec{x}_0) = \left( \delta_{ij} + \frac{1}{k_0^2} \partial_i \partial_j \right) \frac{\exp(-jk_0|\vec{x} - \vec{x}_0|)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|}. \tag{5.94}$$

In symbolischer Schreibweise wird diese Beziehung folgendermaßen geschrieben (ein Doppelpfeil über einem Zeichen bezeichnet einen Tensor zweiter Stufe):

$$\overset{\leftrightarrow}{G}(\vec{x}, \vec{x}_0) = \left( \overset{\leftrightarrow}{I} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla \right) \frac{\exp(-jk_0|\vec{x} - \vec{x}_0|)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|}. \tag{5.95}$$

Der Ausdruck  $\nabla \nabla$  ist ein dyadisches Produkt (transformiert sich wie ein Tensor zweiter Stufe),  $\overset{\leftrightarrow}{I}$  bezeichnet den Einheitstensor.

Durch Einsetzen von Gl. (5.94) in Gl. (5.83) erhält man für die Differentialgleichung Gl. (5.90) die Lösung

$$E_i(\vec{x}) = -j\omega\mu_0 \int J_j(\vec{x}_0) \left( \delta_{ij} + \frac{1}{k_0^2} \partial_i \partial_j \right) \frac{\exp(-jk_0|\vec{x} - \vec{x}_0|)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|} dV_0. \quad (5.96)$$

Damit kann auch  $\vec{H} = -\text{rot}\vec{E}/(j\omega\mu_0)$  berechnet werden.

Eine Erweiterung auf sogenannte chirale Medien mit den komplizierteren Materialgleichungen

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon\vec{E} - j\kappa\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\vec{H}, \\ \vec{B} &= j\kappa\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\vec{E} + \mu\vec{H} \end{aligned} \quad (5.97)$$

ist in [6] angegeben.

## 5.9 Anmerkungen zur analytischen Schreibweise der Tensorrechnung

(Dieser Abschnitt ist als Zusatzinformation für Interessierte gedacht, er wird bei der Prüfung nicht verlangt)

Vorausgesetzt sei hier ein dreidimensionaler Raum mit kartesischen Koordinaten (eine erschöpfende Behandlung der Tensorrechnung mit Erweiterung zu multidimensionalen Räumen und krummlinigen Koordinaten siehe [12]. Indizes können die Werte 1,2,3 annehmen. Die Stufe eines Tensors erkennt man an der Anzahl der *verschiedenen einfach* vorkommenden Indizes. So bezeichnen Elemente

$$A, \quad A_i, \quad A_{ij}, \quad A_{ijk}, \quad A_{ijkl}, \dots \quad (5.98)$$

Größen, die sich bei einer Koordinatentransformation wie Tensoren nullter Stufe (Skalare, bleiben invariant), erster Stufe (Vektoren, 3 Komponenten), zweiter Stufe (9 Komponenten), dritter Stufe (27 Komponenten) usw. transformieren.

Ferner gilt die Summierungskonvention, das heißt, daß über Indizes, die in einem Ausdruck *doppelt* vorkommen, über die Werte 1, 2, 3 summiert wird (kommt ein Index in einem Ausdruck öfter als zweimal vor, dann hat man sich irgendwo im Gang der Rechnung verschrieben, weil das unmöglich ist).

Ein Beispiel:

$$A_{iik} = \sum_{i=1}^3 A_{iik} = A_{11k} + A_{22k} + A_{33k} = B_k \quad (5.99)$$

Da das resultierende Gebilde einen einzigen einfach vorkommenden Index enthält (siehe Regel oben), transformiert es sich wie ein Vektor. Der Vektor ist also aus einem Tensor dritter Stufe  $A_{ijk}$  hervorgegangen, indem man die Indizes  $i = j$  gesetzt hat (die Operation heißt auch Verjüngung eines Tensors).

Einige Beispiele sollen die Schreibweise erläutern. Wenn möglich wurde die entsprechende symbolische Schreibweise für den Ausdruck hinzugefügt (das Symbol  $\hat{=}$  bedeutet „entspricht“):

$$A_i B_i = C \hat{=} \vec{A} \cdot \vec{B} = C$$

Die Operation entspricht dem inneren Produkt zweier Vektoren (dot-product), das Ergebnis ist ein Skalar.

$$A_i B_j = C_{ij} \hat{=} \vec{A} \vec{B} = \vec{C}$$

Es handelt sich um ein dyadisches Produkt zweier Vektoren, das Ergebnis ist ein Tensor zweiter Stufe (in Matrixschreibweise das Produkt einer Spaltenmatrix mit den Komponenten des Vektors  $\vec{A}$  mit einer Zeilenmatrix mit den Komponenten des Vektors  $\vec{B}$ , das Ergebnis ist eine quadratische Matrix mit den Tensorkomponenten).

$$A_{ij}B_iC_j = D \hat{=} \overset{\leftrightarrow}{A} : \vec{B}\vec{C} = D$$

Es liegt ein doppeltes inneres Produkt eines Tensors zweiter Stufe mit zwei Vektoren vor, das Ergebnis ist ein Skalar.

$$A_{ij}B_j = C_i \hat{=} \overset{\leftrightarrow}{A} \cdot \vec{B} = \vec{C}$$

Inneres Produkt eines Tensors zweiter Stufe mit einem Vektor, das Ergebnis ist ein Vektor (in Matrixschreibweise: das Produkt einer quadratischen  $3 \times 3$ -Matrix mit einer Spaltenmatrix mit 3 Zeilen – den Vektorkomponenten – ist eine Spaltenmatrix, welche die Komponenten des Resultatvektors enthält).

Die bereits oben besprochene Verjüngung eines Tensors läßt sich als doppeltes inneres Produkt des Einheitstensors mit dem Tensor auffassen; speziell für einen Tensor zweiter Stufe ist das Ergebnis ein Skalar (eine Invariante bei Koordinatentransformationen), welcher die Summe der Komponenten in der Hauptdiagonale des Tensors darstellt (auch als „Spur des Tensors“ bezeichnet).

$$\delta_{ij}B_{ij} = B_{ii} = C \hat{=} \overset{\leftrightarrow}{I} : \vec{B} = C$$

Gl. (5.99) kann daher auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\delta_{ij}A_{ijk} = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij}A_{ijk} = A_{iik} = A_{11k} + A_{22k} + A_{33k} = B_k \quad (5.100)$$

Eine Zuordnung von zwei Vektoren zu einem dritten Vektor kann daher nur über einen Tensor dritter Stufe erfolgen:

$$A_{ijk}B_jC_k = D_i \quad (5.101)$$

Bei einer Koordinatentransformation müssen natürlich alle beteiligten Größen transformiert werden. Eine spezielle Wahl wäre etwa folgende: Es soll ein Vektor  $\vec{C}$  gefunden werden, dessen Richtung sich dadurch ergibt, daß man den Vektor  $\vec{A}$  in den Vektor  $\vec{B}$  um den kleineren eingeschlossenen Winkel im Sinn einer Rechtsschraube hineindreht, der ferner orthogonal auf die durch  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  definierte Ebene steht und dessen Länge numerisch der durch  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  aufgespannten Parallelogrammfläche gleicht. Analog Gl. (5.101) muß ein Tensor  $\varepsilon_{ijk}$  in

$$\varepsilon_{ijk}A_jB_k = C_i \quad (5.102)$$

derart gefunden werden, daß die obigen Bedingungen erfüllt sind. Die Lösung ist der in Gl. (5.87) definierte Epsilon-Tensor. Wie man leicht nachrechnet, erhält man für die 3-Komponente des Vektors  $C_i$  die Beziehung

$$C_3 = A_1B_2 - A_2B_1 \quad (\text{Rechtssystem}); \quad C_3 = A_2B_1 - A_1B_2 \quad (\text{Linkssystem});$$

Mit Vektoren  $\vec{A} \hat{=} (1, 0, 0)$ ,  $\vec{B} \hat{=} (0, 1, 0)$  (deren Komponenten sich bei einem Übergang von einem Rechtssystem in ein Linkssystem nicht ändern) erhält man in einem Rechtssystem den Ergebnisvektor  $\vec{C} \hat{=} (0, 0, 1)$  – klar, der Vektor ist der Einheitsvektor in Richtung der 3-Achse! –, in einem Linkssystem aber den Vektor  $\vec{C} \hat{=} (0, 0, -1)$ : Somit zeigt der Ergebnisvektor in dieselbe Richtung, ist aber nun – die 3-Achse zeigt ja nun in die entgegengesetzte Richtung! – in Richtung der negativen 3-Achse orientiert. Die Zuordnung (wie weiter oben definiert) erweist sich somit klarerweise invariant gegen Koordinatentransformationen.

Wie man sich leicht überzeugt, ist das in der symbolischen Schreibweise

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

nicht der Fall, weil hier immer  $C_3 = A_1B_2 - A_2B_1$  angenommen wird, und somit auch im Linkssystem der Vektor  $\vec{C}$  in Richtung der z-Achse zeigt; somit hat der Vektor geheimnisvoll seine Richtung umgedreht (daher der Begriff „axialer Vektor“ im Gegensatz zu „polaren Vektoren“, deren Richtung sich bei einem Übergang von einem Rechts- zu einem Linkssystem nicht ändert). Der Grund liegt natürlich darin, daß keine Zuordnung der beiden Vektoren zu einem dritten Vektor getroffen wurde, die in beliebigen kartesischen Koordinatensystemen gültig ist.

Zur Übung soll die Länge des Vektors Gl. (5.102) berechnet werden, wobei gleichzeitig geübt wird, daß in einem Ausdruck Indizes nicht öfter als doppelt vorkommen können; man beachte, daß in der analytischen Schreibweise die Reihenfolge der Terme beliebig geändert werden kann (Ausnahme: wenn es sich um Differentiationen handelt). Das Quadrat der Länge  $C$  des Vektors  $C_i$  ist offenbar  $C_iC_i = C^2$ , das innere Produkt des Vektors mit sich selbst. Unter Verwendung von Gl. (5.102), Gl. (5.88) folgt:

$$\begin{aligned} C_iC_i &= \varepsilon_{ijk}A_jB_k\varepsilon_{ipq}A_pB_q \\ &= (\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp})A_jB_kA_pB_q \\ &= A_jB_kA_jB_k - A_jB_kA_kB_j \\ &= A_jA_jB_kB_k - A_jB_jA_kB_k \\ &= A^2B^2 - (AB \cos \vartheta)^2 = A^2B^2 \sin^2 \vartheta \end{aligned} \quad (5.103)$$

$AB \sin \vartheta$  ist die Fläche des Parallelogramms. Als weiteres Beispiel soll das Ex-Ex-Produkt berechnet werden:

$$\vec{F} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (5.104)$$

In analytischer Schreibweise (einige Klammern sind nur zur deutlicheren Abgrenzung der Bestandteile eines Ausdrucks gesetzt; beachte:  $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$ ):

$$\begin{aligned} F_i &= \varepsilon_{ijk}A_j(\varepsilon_{kpq}B_pC_q) \\ &= (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp})A_jB_pC_q \\ &= B_i(A_jC_j) - C_i(A_jB_j) \doteq \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \end{aligned} \quad (5.105)$$

Für Umformungen von Beziehungen der Vektor- und Tensoranalysis ist folgende Darstellung des alternierenden Anteils eines Tensors wichtig:

$$G_{ij} = -G_{ji} = A_{ij} - A_{ji} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq}A_{pq} \quad (5.106)$$

Zunächst werden einige Beziehungen angeschrieben, die teilweise schon in Gl. (5.89) angegeben wurden: Unter Verwendung der bereits in Abschn. (4.2) eingeführten Abkürzung für den Nabla-vektor,  $\partial_i = \partial/\partial x_i = \nabla$  ergibt sich als Beispiel folgende Gegenüberstellung von Ausdrücken in symbolischer und in analytischer Schreibweise:

$$\begin{aligned} \nabla &\doteq \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \nabla \vec{A} \quad (\text{dyadisches Produkt}) &\doteq \partial_i A_j \quad (\text{Gradiententensor}) \\ \text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} &\doteq \partial_i A_i \\ \text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} &\doteq \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k \\ \Delta \vec{A} = \nabla^2 \vec{A} = \nabla \cdot \nabla \vec{A} &\doteq \partial_j \partial_j A_i \\ \text{grad } A = \nabla A &\doteq \partial_i A \\ \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} &\doteq \varepsilon_{ijk}\partial_j \varepsilon_{kpq}\partial_p A_q = \partial_i \partial_j A_j - \partial_j \partial_j A_i \end{aligned} \quad (5.107)$$

Man beachte, daß die Divergenz die Spur des Gradiententensors und somit eine Invariante bei Koordinatentransformationen ist.

Weitere Beziehungen aus der Vektoranalysis in analytischer und symbolischer Schreibweise:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(a\vec{B}) &= a \operatorname{div}\vec{B} + \vec{B} \cdot \operatorname{grad} a \hat{=} \partial_i(aB_i) = a \partial_i B_i + B_i \partial_i a \\ \operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot}\vec{B} \hat{=} \partial_i \varepsilon_{ijk} A_j B_k = B_k \varepsilon_{kij} \partial_i A_j - A_j \varepsilon_{jik} \partial_i B_k \end{aligned} \quad (5.108)$$

Einige Beziehungen folgen einfach daraus, daß die doppelte Überschiebung eines symmetrischen Tensors  $S_{ij} = S_{ji}$  mit einem alternierenden Tensor  $A_{ij} = -A_{ji}$  null ist:

$$S_{ij}A_{ij} = S_{ji}A_{ij} = S_{ij}A_{ji} = -S_{ij}A_{ij} \quad \text{daher} \quad 2S_{ij}A_{ij} = 0 \quad (5.109)$$

Analog folgt (der Epsilon-Tensor ist in allen Indexpaaren alternierend, der Tensor  $\partial_i \partial_j$  ist für zweimal stetig differenzierbare Funktionen symmetrisch):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} a &= 0 \hat{=} \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k a = 0 \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} &= 0 \hat{=} \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = 0 \end{aligned} \quad (5.110)$$

Ein weiteres Beispiel soll zeigen, daß nichttriviale Umformungen in Tensorbeziehungen oft durch Anwendung der Formel von Gl. (5.106) gelingen. Aus der Strömungslehre gilt folgende Beziehung für die *absolute Änderung* der Geschwindigkeit (die Summe aus der *lokalen* Änderung — die man sieht, wenn man seine Position in einem zeitlich veränderlichen Strömungsfeld nicht ändert — und der *konvektiven* Änderung — die man in einer zeitlich unveränderlichen Strömung sehen würde, wenn man sich im Strömungsfeld bewegt):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} + \frac{1}{2} \operatorname{grad}(\vec{v} \cdot \vec{v}) \quad (5.111)$$

Diese Beziehung wird nun für ein Strömungsfeld  $\vec{v}(\vec{r}, t) \hat{=} v_i(x_j, t)$  in analytischer Schreibweise abgeleitet (die partielle Ableitung nach der Zeit wird mit  $\partial_t \hat{=} d/dt$  bezeichnet):

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} &= \partial_t v_i + \partial_j v_i \frac{dx_j}{dt} = \partial_t v_i + v_j \partial_j v_i \\ &= \partial_t v_i + v_j \partial_j v_i - v_j \partial_i v_j + v_j \partial_i v_j \\ &= \partial_t v_i - v_j (\partial_i v_j - \partial_j v_i) + \frac{1}{2} \partial_i (v_j v_j) \\ &= \partial_t v_i - v_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kpq} \partial_p v_q + \frac{1}{2} \partial_i (v_j v_j) \\ &= \partial_t v_i - \varepsilon_{ijk} v_j (\varepsilon_{kpq} \partial_p v_q) + \frac{1}{2} \partial_i (v_j v_j) \end{aligned} \quad (5.112)$$

Man beachte ferner folgende Beziehungen:

Für den Ortsvektor  $\vec{r} \hat{=} x_i$  gilt

$$\operatorname{div} \vec{r} \hat{=} \partial_i x_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \delta_{ii} = 3$$

ferner

$$\operatorname{rot} \vec{r} \hat{=} \varepsilon_{ijk} \partial_j x_k = \varepsilon_{ijk} \delta_{jk} = 0$$

Man beachte weiterhin:

$$\frac{\partial A_i}{\partial A_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial A_{ij}}{\partial A_{k\ell}} = \delta_{ik} \delta_{j\ell} \quad \text{usw.}$$

Die Reihenentwicklung einer Skalarfunktion  $A(x_i)$  an einer Stelle  $x_i = \hat{x}_i + a_i$  sei als letztes Beispiel genannt (n-te partielle Ableitungen  $\partial_i^n A$  sind an der Stelle  $x_i = \hat{x}_i$  zu nehmen):

$$\begin{aligned}
 A(x_i) &= A(\hat{x}_i) + \frac{\partial A}{\partial x_i} a_i + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j} a_i a_j + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 A}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} a_i a_j a_k \\
 &= A(\hat{x}_i) + (a_i \partial_i) A + \frac{1}{2!} (a_i a_j \partial_i \partial_j) A + \frac{1}{3!} (a_i a_j a_k \partial_i \partial_j \partial_k) A \\
 &= A(\hat{x}_i) + (a_i \partial_i) A + \frac{1}{2!} (a_i \partial_i)^2 A + \frac{1}{3!} (a_i \partial_i)^3 A \\
 &= \exp(a_i \partial_i) A
 \end{aligned} \tag{5.113}$$

Das Ergebnis ist gleichzeitig ein Beispiel für die Wirkung einer Operatorenfunktion (eine Funktion, die als Potenzreihe dargestellt werden kann) des Operators  $\partial_i$  auf eine Funktion  $A(x_i)$ .

# Literaturverzeichnis

- [1] Butkovskiy, A. G.: Ellis Horwood Series in Mathematics and its Applications, Green's functions and transfer functions handbook. Chichester: Ellis Horwood Limited, a Division of John Wiley & Sons 1982
- [2] Economou, E. N.: Green's functions in quantum physics. Berlin: Springer 1979
- [3] Friedman, B.: Principles and techniques of applied mathematics. New York: Wiley 1956
- [4] Gelfand, I. M.; Schilow, G. E.: Verallgemeinerte Funktionen, Bd. 1–4. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1960
- [5] Harrington, R. F.: Time-harmonic electromagnetic fields. New York: McGraw Hill 1961
- [6] Lindell, I. V.: Simple derivation of various Green dyadics for chiral media. Arch. Elektron. Übertrag.tech. 44 (1990), S. 427–429
- [7] Moon, P.; Spencer, D. E.: Field theory handbook, 2. Aufl. Berlin: Springer 1971
- [8] Morse, P. M.; Feshbach, H.: Methods of theoretical physics. New York: McGraw Hill 1953
- [9] Roach, G. F.: Green's functions — introductory theory with applications. New York: Van Nostrand-Reinhold 1970
- [10] Schwank, F.: Randwertprobleme. Leipzig: Teubner 1951
- [11] Tai, C. T.: Dyadic Green's functions in electromagnetic theory. San Francisco, London, Toronto: Intext Educational Publishers 1971
- [12] Duschek, A., Hochrainer, A.: Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung (Teil 1: Tensoralgebra, Teil 2: Tensoranalysis, Teil 3: Anwendungen in Physik und Technik). Springer-Verlag, Wien, 1965-1970

# Berichtigungen

Anmerkung: Dieses Skriptum wurde ursprünglich mit einer älteren PC-TeX-Version erstellt und später auf MikTeX2.1 umgestellt. Diese Umstellung wurde weitgehend mit Makros automatisch durchgeführt. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß sich dabei auch Fehler eingeschlichen haben, die bis heute noch nicht entdeckt wurden. Wenn Ihnen Fehler auffallen, so bitte ich um eine Mitteilung per E-mail an `gerhard.grau @ kit.edu`

In der Version 2007/2008 wurde eine Korrektur in Gl. (5.110) durchgeführt. Die vorliegende Version ist die von WS 2021/2022.