

# Greensche Funktionen und Eigenfunktionen

Vorlesung von Prof. Dr. em. Gerhard Grau  
Institut für Hochfrequenztechnik und Quantenelektronik<sup>1</sup>

Universität Karlsruhe, WS 2017/2018

<sup>1</sup>Nicht zur Veröffentlichung. Eine Vervielfältigung dieses Typoskripts ist nicht gestattet.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorbemerkungen</b>	<b>1</b>
1.1	Verallgemeinerte (symbolische) Funktionen . . . . .	1
1.2	Einige spezielle verallgemeinerte Funktionen . . . . .	2
1.2.1	Die $\delta$ -Funktion . . . . .	2
1.2.2	Ableitungen der $\delta$ -Funktion . . . . .	3
1.2.3	Der Cauchy'sche Hauptwert (valor principalis) . . . . .	3
1.2.4	Die Funktion $H(x)$ . . . . .	4
1.2.5	Die Funktionen $\delta_+(x)$ , $\delta_-(x)$ . . . . .	4
1.2.6	Die Funktion $\operatorname{sgn}(x)$ . . . . .	5
1.3	Grundgedanke der Greenschen Funktion . . . . .	5
1.3.1	Inhomogenes Problem, homogene Randbedingungen . . . . .	5
1.3.2	Homogenes Problem, inhomogene Randbedingungen . . . . .	7
1.3.3	Inhomogenes Problem, inhomogene Randbedingungen . . . . .	7
1.4	Vektoren und lineare Operatoren in abstrakten Räumen . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>10</b>
2.1	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung und lineare Randbedingungen . .	10
2.2	Adjungierter Operator und adjungierte Randbedingungen . . . . .	11
2.2.1	Beispiel 1 . . . . .	11
2.2.2	Beispiel 2 . . . . .	12
2.2.3	Beispiel 3 . . . . .	12
2.3	Gewichtsfunktionen. Operatoren im erweiterten Sinn. . . . .	12
2.3.1	Operatoren im erweiterten Sinn . . . . .	15
2.3.2	Formal selbstadjungierte Operatoren . . . . .	15
2.4	Inhomogene Probleme mit inhomogenen Randbedingungen . . . . .	16
2.4.1	Beispiel . . . . .	16
2.5	Berechnung der Greenschen Funktion . . . . .	17
2.5.1	$G(x, x_0)$ für ungemischte Randbedingungen . . . . .	17
2.5.2	$G(x, x_0)$ für gemischte Randbedingungen . . . . .	18
2.5.3	Die Berechnung von $G(x, x_0)$ mittels Fouriertransformation . . . . .	18
2.5.4	$G(x, x_0)$ für Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Eigenfunktionen</b>	<b>22</b>
3.1	Entwicklung nach Eigenfunktionen . . . . .	22
3.1.1	Speziell für Hermitesche Operatoren geltende Beziehungen . . . . .	23
3.1.2	Beispiel für Eigenfunktionen . . . . .	23
3.1.3	Beispiel zur Entwicklung nach Eigenfunktionen . . . . .	24
3.2	Die Spektraldarstellung von Operatorfunktionen . . . . .	26
3.2.1	Inversion von Operatoren . . . . .	27
3.3	Grundgedanke der Störungsrechnung . . . . .	27
3.3.1	Beispiel zur Störungsrechnung . . . . .	28

3.3.2	Näherungen für Eigenwerte . . . . .	28
3.4	Beziehung zur Schrödingergleichung . . . . .	28
3.5	Die Greensche Funktion $G_\lambda(x, x_0)$ . . . . .	29
3.5.1	Beispiel zum diskreten Spektrum . . . . .	29
3.5.2	Beispiel zum kontinuierlichen Spektrum . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen</b>	<b>33</b>
4.1	Deltafunktionen in mehreren Dimensionen . . . . .	33
4.1.1	Zylinderkoordinaten . . . . .	33
4.1.2	Kugelkoordinaten . . . . .	33
4.1.3	Die $\delta$ -Funktion in Kugelkoordinaten . . . . .	34
4.1.4	Beispiel für eine ignorable Koordinate . . . . .	34
4.1.5	Beispiel für zwei ignorable Koordinaten . . . . .	34
4.2	Lineare Operatoren und Randbedingungen . . . . .	34
4.3	Adjungierter Operator. Operatoren im erweiterten Sinn . . . . .	36
4.3.1	Beispiel 1: Der Konjunktvektor und der Operator $L^\dagger$ . . . . .	36
4.3.2	Beispiel 2: Der Laplace-Operator . . . . .	37
4.3.3	Beispiel 3: Der Operator der Wellengleichung . . . . .	38
4.3.4	Beispiel 4: Der Operator der Wärmeleitungsgleichung . . . . .	38
4.4	Die Lösung von inhomogenen Problemen zu inhomogenen Randbedingungen . . . . .	39
4.4.1	Beispiel 1: Lösung der Poisson-Gleichung . . . . .	39
4.4.2	Beispiel 2: Anmerkung zur Lösung der Poisson-Gleichung . . . . .	40
4.4.3	Beispiel 3: Lösung der inhomogenen Wellengleichung . . . . .	40
4.5	Der Produktraum . . . . .	40
4.6	Die Greensche Funktion $G_\lambda$ . Umkehroperatoren . . . . .	42
4.6.1	Simultane Eigenkets . . . . .	43
4.6.2	Inversion eines speziellen Operators . . . . .	43
4.7	Die dyadische Greensche Funktion . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Beispiele für Greensche Funktionen</b>	<b>44</b>
5.1	Der Laplace-Operator in zwei Dimensionen in kartesischen Koordinaten . . . . .	44
5.1.1	Erstes Lösungsverfahren: Ein Operator wird als Konstante betrachtet . . . . .	44
5.1.2	Zweites Lösungsverfahren: Direkte Inversion des Operators . . . . .	45
5.2	Der Laplace-Operator in ebenen Polarkoordinaten . . . . .	45
5.2.1	Der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten . . . . .	46
5.3	Der Laplace-Operator in drei Dimensionen . . . . .	46
5.4	Die Wellengleichung . . . . .	47
5.5	Die eindimensionale Wärmeleitung . . . . .	48
5.6	Die Helmholtzgleichung . . . . .	49
5.7	Tensoroperatoren . . . . .	50
5.8	Das elektromagnetische Feld . . . . .	50
5.9	Anmerkungen zur analytischen Schreibweise der Tensorrechnung . . . . .	51
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>54</b>
	<b>Berichtigungen</b>	<b>55</b>

# Kapitel 1

## Vorbemerkungen

Greensche Funktionen gestatten es, die Lösung linearer gewöhnlicher oder partieller Differentialgleichungen als Integral über jenen Bereich anzuschreiben, in dem die Lösung gesucht wird. Der Integrand ist das Produkt der Greenschen Funktion mit einer (im allgemeinen symbolischen) Funktion, welche das Wissen über die Randbedingungen der gesuchten Lösung sowie die Störfunktion enthält (wenn es sich um eine inhomogene Differentialgleichung handelt). Ist die Greensche Funktion für einen Typ von Randbedingungen bekannt, kann die Lösung des Problems für beliebige Randwerte und Störfunktionen sofort in Integralform angeschrieben werden.

Das Ziel der Vorlesung ist es, Methoden zur Berechnung der Greenschen Funktion eines Problems anzugeben und dabei zu lernen, wie man die bekannte Greensche Funktion für ein verwandtes Problem an den eigenen Fall anpassen kann.

Die Fassung ab WS 2000/2001 wurde um drei Abschnitte erweitert, welche eine Einführung in die Lösung partieller Differentialgleichungen bieten, in denen Tensoroperatoren auf Vektorfelder angewendet werden. Für das WS 2007/2008 wurde Abschnitt 5.9 eingefügt, in dem eine Einführung in die analytische Schreibweise der Tensoralgebra und Tensoranalysis geboten wird. Zum WS 2012/2013 wurde die Darstellung an einigen Stellen gestrafft, Redundanzen wurden entfernt.

Im Wintersemester 2017/2018 wurden an die pdf-Version des Skripts 10 Seiten angefügt, welche handschriftliche Zusammenstellungen von Formeln enthalten (gedacht zur Hilfe bei der Wiederholung der Vorlesung vor einer Prüfung oder zur Erläuterung nicht im Detail abgeleiteter Formeln).

### 1.1 Verallgemeinerte (symbolische) Funktionen

Testfunktionen  $\Phi_T(x)$ , Grundfunktionen  $\Phi_G(x)$

$$\Phi_T(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \exp\left[-\frac{1}{(x-a)^2}\right] & 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^l \frac{d^m \Phi_G(x)}{dx^m} = 0 \quad \text{für alle } l, m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

$$\Phi_G(x) = \exp(-x^2). \quad (1.3)$$

$$\langle s | \Phi_1 + \Phi_2 \rangle = \langle s | \Phi_1 \rangle + \langle s | \Phi_2 \rangle, \quad \langle s | \lambda \Phi \rangle = \lambda \langle s | \Phi \rangle. \quad (1.4)$$

$$\langle s | \Phi \rangle = \int_a^b \Phi(x) dx$$

$$\langle s | \Phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x) \Phi(x) dx. \quad \text{Beachte: } \langle \lambda s | \Phi \rangle = \lambda^* \langle s | \Phi \rangle. \quad (1.5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [s'(x)]^* \Phi(x) dx = s^*(x) \Phi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x) \Phi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x) \Phi'(x) dx. \quad (1.6)$$

$$s_1(x) = s_2(x) \quad (1.7)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1^*(x) \Phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2^*(x) \Phi(x) dx, \quad (1.8)$$

$$\Phi(x) \begin{cases} \neq 0 & \text{in } a < x < b, \\ = 0 & x \geq b, x \leq a \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x) \Phi(x) dx = \int_a^b g^*(x) \Phi(x) dx = \langle s | \Phi \rangle, \quad (1.10)$$

$$s(x) = g(x) \quad \text{im Intervall } a < x < b. \quad (1.11)$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_F(f) e^{2\pi j f x} df, \quad g_F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-2\pi j f x} dx, \quad (1.12)$$

$$\langle s | \Phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x) \Phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} s_F^*(f) \Phi_F(f) df. \quad (1.13)$$

## 1.2 Einige spezielle verallgemeinerte Funktionen

### 1.2.1 Die $\delta$ -Funktion

$$\langle s | \Phi \rangle = \Phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \Phi(x) dx. \quad (1.14)$$

$$\Phi(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \Phi(x + x_0) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \Phi(x) dx. \quad (1.15)$$

$$\Phi(x) \begin{cases} \neq 0 & \text{in } 0 < x < \infty, \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \Phi(x) dx = \Phi(0) = 0 = \int_0^{\infty} g(x) \Phi(x) dx. \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \delta(x) = g(x) = 0 & \quad \text{in } 0 < x < \infty, \\ \delta(x) = g(x) = 0 & \quad \text{in } -\infty < x < 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx = 1. \quad (1.19)$$

$$x \delta(x) = 0. \quad (1.20)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \delta(x) \Phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) [x \Phi(x)] dx = x \Phi(x) \Big|_{x=0} = 0. \quad (1.21)$$

$$\delta(x) + x \delta'(x) = 0. \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\Phi(x)dx = \Phi(0) \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_F(f)e^{2\pi jfx}df \Big|_{x=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_F(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_F^*(f)\Phi_F(f)df. \\
& \delta_F(f) = 1.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi jfx}df = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi jfx}df = \delta(-x) \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} e^{\pm 2\pi jfx}df = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(kx)}{x}.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_n^*(x)\Phi(x)dx \\
& \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)e^{-j\omega t}dt = 0 \\
\delta(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).
\end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta[g(x)]\Phi(x)dx = \sum_n \frac{\Phi(x_n)}{|g'(x_n)|}, \tag{1.25}$$

### 1.2.2 Ableitungen der $\delta$ -Funktion

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\Phi(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\Phi'(x)dx = -\Phi'(0), \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x)\Phi(x)dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\Phi^{(n)}(x)dx = (-1)^n \Phi^{(n)}(0).
\end{aligned} \tag{1.26}$$

$$\delta'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left( \frac{k \cos(kx)}{x} - \frac{\sin(kx)}{x^2} \right). \tag{1.27}$$

$$n\delta^{(n-1)}(x) + x\delta^{(n)}(x) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{1.28}$$

### 1.2.3 Der Cauchy'sche Hauptwert (valor principalis)

$$\begin{aligned}
\langle s|\Phi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\Phi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Phi(x)}{x}dx \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Phi(x) - \Phi(-x)}{x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\frac{1}{x}\right)\Phi(x)dx.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = g(x) = \frac{1}{x}, \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < x < \infty. \tag{1.30}$$

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(kx)}{x}. \tag{1.31}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \Phi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{+1} \frac{u \Phi(\varepsilon u)}{1 + u^2} du = \Phi(0) \int_{-1}^{+1} \frac{u du}{1 + u^2} = 0. \quad (1.32)$$

$$xf(x) = 1 \quad (1.33)$$

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + c\delta(x). \quad (1.34)$$

#### 1.2.4 Die Funktion $H(x)$

$$\langle s | \Phi \rangle = \int_0^{\infty} \Phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \Phi(x) dx \quad (1.35)$$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases} \quad (1.36)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H'(x) \Phi(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \Phi'(x) dx = - \int_0^{\infty} \Phi'(x) dx = \Phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \Phi(x) dx, \quad (1.37)$$

$$H'(x) = \delta(x). \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \Phi(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_F^*(f) \Phi_F(f) df = \int_0^{\infty} \Phi(x) dx = \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_F(f) e^{2\pi j f x} df \right] dx \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_F(f) \frac{e^{2\pi j f x}}{2\pi j f} df \right]_{x=0}^{x=\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi j f x} - 1}{2\pi j f} \Phi_F(f) df. \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$H_F(f) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2\pi j f x}}{2\pi j f}. \quad (1.40)$$

$$H_F(f) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(2\pi f x)}{2\pi j f} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi f x)}{2\pi f}. \quad (1.41)$$

$$H_F(f) = \frac{1}{2\pi j} P\left(\frac{1}{f}\right) + \frac{1}{2} \delta(f). \quad (1.42)$$

$$H_F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) e^{-2\pi j f x} dx = \int_0^{\infty} e^{-2\pi j f x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-2\pi j f x} dx, \quad (1.43)$$

$$H_F(f) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(kf)}{f} + \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(kf)}{\pi f}. \quad (1.44)$$

#### 1.2.5 Die Funktionen $\delta_+(x)$ , $\delta_-(x)$

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} e^{-2\pi j f x} df = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-2\pi j f x} df + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{2\pi j f x} df \\ &= \delta_+(x) + \delta_-(x). \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned}
2\pi j\delta_+(x) &= P\left(\frac{1}{x}\right) + j\pi\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} + j\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - j\varepsilon}, \\
-2\pi j\delta_-(x) &= P\left(\frac{1}{x}\right) - j\pi\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} - j\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + j\varepsilon}, \\
\delta_-(x) &= \delta_+(-x) = \delta_+^*(x) = \delta_-^*(-x).
\end{aligned} \tag{1.46}$$

$$H_F(f) = \delta_+(f). \tag{1.47}$$

### 1.2.6 Die Funktion $\text{sgn}(x)$

$$\langle s | \Phi \rangle = \int_0^{\infty} \Phi(x) dx - \int_{-\infty}^0 \Phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgn}(x) \Phi(x) dx. \tag{1.48}$$

$$\text{sgn}(x) = H(x) - H(-x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases} \tag{1.49}$$

$$\frac{d}{dx} \text{sgn}(x) = \delta(x) + \delta(-x) = 2\delta(x). \tag{1.50}$$

$$\int_a^b \delta(x - x_0) \Phi(x) dx = \begin{cases} \Phi(b)/2 & x_0 = b, \\ \Phi(x_0) & a < x_0 < b, \\ \Phi(a)/2 & x_0 = a. \end{cases} \tag{1.51}$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \int_{a-\kappa}^{b+\kappa} \delta(x - x_0) \Phi(x) dx = \int_{a-}^{b+} \delta(x - x_0) \Phi(x) dx = \Phi(x_0), \quad a \leq x_0 \leq b. \tag{1.52}$$

## 1.3 Grundgedanke der Greenschen Funktion

### 1.3.1 Inhomogenes Problem, homogene Randbedingungen

$$\begin{aligned}
Lu(x) &= -\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = g(x) \quad \text{inhomogenes Problem,} \\
u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 & \quad \text{homogene Randbedingungen.}
\end{aligned} \tag{1.53}$$

$$u(x) = \int_0^1 G(x, x_0) g(x_0) dx_0. \tag{1.54}$$

$$G(0, x_0) = 0, \quad G(1, x_0) = 0. \tag{1.55}$$

$$\begin{aligned}
Lu(x) &= g(x) = \int_{0-}^{1+} LG(x, x_0) g(x_0) dx_0 = \int_{0-}^{1+} \delta(x_0 - x) g(x_0) dx_0, \quad \text{d. h.} \\
LG(x, x_0) &= -\frac{d^2 G(x, x_0)}{dx^2} = \delta(x - x_0), \quad G(0, x_0) = 0, \quad G(1, x_0) = 0.
\end{aligned} \tag{1.56}$$

#### Verfahren 1 zur Berechnung von $G(x, x_0)$

$$\begin{aligned}
dG/dx &= -H(x - x_0) + c_1(x_0), \\
G &= -(x - x_0)H(x - x_0) + xc_1(x_0) + c_2(x_0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(0, x_0) &= 0 = x_0 H(-x_0) + c_2(x_0), \\
G(1, x_0) &= 0 = -(1 - x_0) H(1 - x_0) + c_1(x_0) + c_2(x_0).
\end{aligned}$$

$$G(x, x_0) = -(x - x_0)H(x - x_0) + x[(1 - x_0)H(1 - x_0) + x_0 H(-x_0)] - x_0 H(-x_0). \tag{1.57}$$



$$G(x, x_0) = \begin{cases} x_0(1-x) & 0 \leq x_0 < x, \\ x(1-x_0) & x < x_0 \leq 1. \end{cases} \quad (1.58)$$

$$u(x) = \int_0^x x_0(1-x)g(x_0)dx_0 + \int_x^1 x(1-x_0)g(x_0)dx_0. \quad (1.59)$$

**Verfahren 2 zur Berechnung von  $G(x, x_0)$**

$$G(x, x_0) = \begin{cases} xa(x_0) + b(x_0) & 0 \leq x_0 < x, \\ xc(x_0) + d(x_0) & x < x_0 \leq 1. \end{cases} \quad (1.60)$$

$$G(x, x_0) = \begin{cases} (x-1)a(x_0) & 0 \leq x_0 < x, \\ xc(x_0) & x < x_0 \leq 1. \end{cases} \quad (1.61)$$

$$(x_0 - 1)a(x_0) = x_0c(x_0)$$

$$G(x, x_0) = \begin{cases} \frac{x_0(x-1)}{x_0-1}c(x_0) & 0 \leq x_0 < x, \\ xc(x_0) & x < x_0 \leq 1. \end{cases} \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{d^2G}{dx^2} dx &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta(x-x_0) dx = -1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{dG(x, x_0)}{dx} \Big|_{x=x_0+\varepsilon} - \frac{dG(x, x_0)}{dx} \Big|_{x=x_0-\varepsilon} \right\}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dG}{dx} \Big|_{x=x_0-\varepsilon} &= \frac{d}{dx} xc(x_0) = c(x_0), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dG}{dx} \Big|_{x=x_0+\varepsilon} &= \frac{d}{dx} x_0(x-1) \frac{c(x_0)}{x_0-1} = \frac{x_0c(x_0)}{x_0-1}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

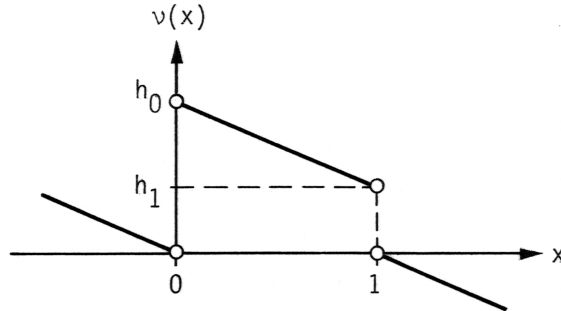


Abbildung 1.1: Verlauf der Funktion  $\nu(x)$ ; sie nimmt homogene Randwerte bei Annäherung an die Punkte  $x = 0$ ,  $x = 1$  von außerhalb des Intervalls  $(0, 1)$  an, inhomogene Randwerte bei Annäherung an die Randpunkte aus dem Inneren des Intervalls

$$c(x_0) = 1 - x_0. \quad (1.65)$$

$$G(x, x_0) = \begin{cases} x_0(1-x) & 0 \leq x_0 < x, \\ x(1-x_0) & x < x_0 \leq 1. \end{cases} \quad (1.66)$$

$$G(x, x_0) = x_0(1-x)H(x-x_0) + x(1-x_0)H(x_0-x) \quad 0 \leq x_0 \leq 1. \quad (1.67)$$

### 1.3.2 Homogenes Problem, inhomogene Randbedingungen

$$Lh(x) = -\frac{d^2h(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{homogenes Problem,} \quad (1.68)$$

$$h(0) = h_0 \neq 0, \quad h(1) = h_1 \neq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{inhomogene RB.}$$

$$h(x) = h_0(1-x) + h_1x. \quad (1.69)$$

$$\nu(x) = h_0[H(x) - x] + h_1[x - H(x-1)] = \begin{cases} (-h_0 + h_1)x & x < 0, \\ h_0(1-x) + h_1x & 0 < x < 1, \\ (-h_0 + h_1)(x-1) & x > 1. \end{cases} \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned} \nu'(x) &= h_0[\delta(x) - 1] + h_1[1 - \delta(x-1)], \\ \nu''(x) &= h_0\delta'(x) - h_1\delta'(x-1), \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$L\nu(x) = -\frac{d^2\nu(x)}{dx^2} = s(x) = -h_0\delta'(x) + h_1\delta'(x-1), \quad \nu(0-) = 0, \quad \nu(1+) = 0.$$

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \int_{0-}^x x_0(1-x_0)s(x_0)dx_0 + \int_x^{1+} x(1-x_0)s(x_0)dx_0 \\ &= -\int_{0-}^x x_0(1-x_0)h_0\delta'(x_0)dx_0 + \int_x^{1+} x(1-x_0)h_1\delta'(x_0-1)dx_0 \\ &= \frac{d}{dx_0} h_0x_0(1-x)|_{x_0=0} - \frac{d}{dx_0} h_1x(1-x_0)|_{x_0=1} \\ &= h_0(1-x) + h_1x = h(x) \quad \text{in } 0 < x < 1. \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \int_{0-}^{1+} G(x, x_0)s(x_0)dx_0 = \int_{0-}^{1+} G(x, x_0)[-h_0\delta'(x_0) + h_1\delta'(x_0-1)]dx_0 \\ &= h_0 \left. \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=0-} - h_1 \left. \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=1+}. \\ \left. \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=0-} &= (\text{hier ist } x_0 < x) = \frac{\partial}{\partial x_0} [x_0(1-x)] = 1-x, \\ \left. \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=1+} &= (\text{hier ist } x_0 > x) = \frac{\partial}{\partial x_0} [x(1-x_0)] = -x. \end{aligned}$$

### 1.3.3 Inhomogenes Problem, inhomogene Randbedingungen

$$Lw(x) = -\frac{d^2w}{dx^2} = g(x) \quad w(0) = w_0 \neq 0, \quad w(1) = w_1 \neq 0. \quad (1.73)$$

$$LG(x, x_0) = -\frac{d^2G(x, x_0)}{dx^2} = \delta(x-x_0) \quad G(0, x_0) = 0, \quad G(1, x_0) = 0. \quad (1.74)$$

$$w(x) = u(x) + h(x), \quad (1.75)$$

$$Lu(x) = -\frac{d^2u}{dx^2} = g(x), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad \text{d. h. : } u(x) = \int_0^1 G(x, x_0)g(x_0)dx_0, \quad (1.76)$$

$$Lh(x) = -\frac{d^2h}{dx^2} = 0 \quad h(0) = w_0, \quad h(1) = w_1. \quad (1.77)$$

$$\begin{aligned} L\nu(x) &= -\frac{d^2\nu(x)}{dx^2} = s(x) = -w_0\delta'(x) + w_1\delta'(x-1), \\ \nu(x) &= \int_{0-}^{1+} G(x, x_0)s(x_0)dx_0 = h(x) \quad \text{in } 0 < x < 1. \end{aligned} \quad (1.78)$$

$$w(x) = \int_{0-}^{1+} G(x, x_0)[g(x_0) + s(x_0)]dx_0 = u(x) + \nu(x). \quad (1.79)$$

## 1.4 Vektoren und lineare Operatoren in abstrakten Räumen

$$|\varphi\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (1.80)$$

$$|\varphi\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \downarrow \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \downarrow \end{pmatrix}. \quad (1.81)$$

$$\langle\varphi| = \{|\varphi\rangle\}^\dagger \hat{=} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}^\dagger = (\varphi_1^* \varphi_2^* \dots \varphi_n^*), \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \downarrow \end{pmatrix}^\dagger = (\varphi^*(x) \rightarrow \dots), \quad (1.82)$$

$$\langle\psi| = \{|\psi\rangle\}^\dagger \hat{=} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}^\dagger = (\psi_1^* \psi_2^* \dots \psi_n^*), \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \downarrow \end{pmatrix}^\dagger = (\psi^*(x) \rightarrow \dots).$$

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^* = \langle\psi|\varphi\rangle^\dagger = \sum_{i=1}^n \varphi_i^* \psi_i = (\varphi_1^* \dots \varphi_n^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \text{oder} \quad = \int \varphi^*(x) \psi(x) dx. \quad (1.83)$$

d. h.

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle^* = \sum_{i=1}^n |\varphi_i|^2, \quad \text{oder} \quad = \int |\varphi(x)|^2 dx \leq M. \quad (1.84)$$

$$(G_1 G_2 G_3 \dots G_n)^\dagger = G_n^\dagger G_{n-1}^\dagger \dots G_3^\dagger G_2^\dagger G_1^\dagger. \quad (1.85)$$

$$|\varphi\rangle = \sum_i |i\rangle \varphi_i = \sum_i |i\rangle \langle i|\varphi\rangle, \quad \text{oder} \quad = \int |x\rangle dx \varphi(x) = \int |x\rangle dx \langle x|\varphi\rangle. \quad (1.86)$$

$$\langle\varphi| = \sum_i \varphi_i^* \langle i| = \sum_i \langle\varphi|i\rangle \langle i|, \quad \text{oder} \quad = \int \varphi^*(x) dx \langle x| = \int \langle\varphi|x\rangle dx \langle x|. \quad (1.87)$$

$$\begin{aligned} \langle i|\varphi\rangle &= \varphi_i, & \langle x|\varphi\rangle &= \varphi(x), \\ \langle\varphi|i\rangle &= \varphi_i^*, & \langle\varphi|x\rangle &= \varphi^*(x). \end{aligned} \quad (1.88)$$

$$\sum_i |i\rangle \langle i| = \underline{I}, \quad \text{oder} \quad \int |x\rangle dx \langle x| = \underline{I}. \quad (1.89)$$

$$\langle j|\varphi\rangle = \varphi_j = \sum_i \langle j|i\rangle \varphi_i, \quad \text{oder} \quad \langle x'|\varphi\rangle = \varphi(x') = \int \langle x'|x\rangle dx \varphi(x). \quad (1.90)$$

$$\langle j|i\rangle = \delta_{ij}, \quad \text{oder} \quad \langle x'|x\rangle = \delta(x' - x). \quad (1.91)$$

$$\underline{L}|u\rangle = |g\rangle. \quad (1.92)$$

$$L_{ij} = \langle i|\underline{L}|j\rangle, \quad \text{oder} \quad L(x, x') = \langle x|\underline{L}|x'\rangle. \quad (1.93)$$

$$\begin{aligned} \underline{L}|u\rangle &= |g\rangle, & \underline{L}|u\rangle &= |g\rangle, \\ \langle i|\underline{L}|u\rangle &= \langle i|g\rangle, & \langle x|\underline{L}|u\rangle &= \langle x|g\rangle, \\ \langle i|\underline{L}|u\rangle &= \langle i|g\rangle, & \langle x|\underline{L}|u\rangle &= \langle x|g\rangle, \\ \sum_j \langle i|\underline{L}|j\rangle \langle j|u\rangle &= \langle i|g\rangle, & \int \langle x|\underline{L}|x'\rangle dx' \langle x'|u\rangle &= \langle x|g\rangle, \\ \sum_j L_{ij} u_j &= g_i & \int L(x, x') u(x') dx' &= g(x) \\ &= Lu_i & &= Lu(x) \\ &= \langle i|\underline{L}|u\rangle & &= \langle x|\underline{L}|u\rangle \\ &= L\langle i|u\rangle. & &= L\langle x|u\rangle. \end{aligned} \quad (1.94)$$

$$\langle u|\underline{L}^\dagger = \langle g| \quad (1.95)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle v|\underline{L}|u \rangle &= \langle v|g \rangle, \\ \langle u|\underline{L}^\dagger|v \rangle &= \langle g|v \rangle = \langle v|g \rangle^*, \end{aligned} \right\} \quad \langle v|\underline{L}|u \rangle = \langle u|\underline{L}^\dagger|v \rangle^*. \quad (1.96)$$

### Beispiel 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x)\Phi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle s|x \rangle dx \langle x|\Phi \rangle = \langle s|\underline{I}|\Phi \rangle = \langle s|\Phi \rangle. \quad (1.97)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x \rangle dx \langle x| = \underline{I}, \quad \langle x|x' \rangle = \delta(x - x'). \quad (1.98)$$

### Beispiel 2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f \rangle df \langle f| = \underline{I}, \quad \langle f|f' \rangle = \delta(f - f'). \quad (1.99)$$

$$\langle x|g \rangle = g(x), \quad \langle f|g \rangle = g_F(f) \quad (1.100)$$

$$\begin{aligned} \langle s|\Phi \rangle &= \langle s|\underline{I}|\Phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle s|f \rangle df \langle f|\Phi \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle s|x \rangle dx \langle x|\Phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(x)\Phi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} s_F^*(f)\Phi_F(f)df. \end{aligned} \quad (1.101)$$

$$g(x) = \langle x|g \rangle = \langle x|\underline{I}|g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x|f \rangle df \langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x|f \rangle df g_F(f), \quad (1.102)$$

$$g_F(f) = \langle f|g \rangle = \langle f|\underline{I}|g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f|x \rangle dx \langle x|g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f|x \rangle dx g(x).$$

$$\langle x|f \rangle = \exp(2\pi jfx), \quad \langle f|x \rangle = \langle x|f \rangle^* = \exp(-2\pi jfx). \quad (1.103)$$

### Beispiel 3

$$\underline{L}|u \rangle = |g \rangle, \quad \text{oder} \quad Lu(x) = g(x). \quad (1.104)$$

$$\underline{L}^{-1}\underline{L}|u \rangle = \underline{L}^{-1}|g \rangle = |u \rangle = \underline{G}|g \rangle. \quad (1.105)$$

$$\begin{aligned} \langle x|u \rangle &= \langle x|\underline{G}|g \rangle = \langle x|\underline{G}\underline{I}|g \rangle = \int \langle x|\underline{G}|x_0 \rangle dx_0 \langle x_0|g \rangle \\ &= u(x) = \int G(x, x_0)g(x_0)dx_0. \end{aligned} \quad (1.106)$$

$$\underline{L}\underline{L}^{-1} = \underline{L}\underline{G} = \underline{I},$$

$$\langle x|\underline{L}\underline{G}|x_0 \rangle = \langle x|\underline{I}|x_0 \rangle = \langle x|x_0 \rangle = \delta(x - x_0).$$

$$\langle x|\underline{L}\underline{G}|x_0 \rangle = \langle x|\underline{L}|v \rangle$$

$$L\langle x|v \rangle = L\langle x|\underline{G}|x_0 \rangle = LG(x, x_0)$$

$$LG(x, x_0) = \delta(x - x_0). \quad (1.107)$$

## Kapitel 2

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

### 2.1 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung und lineare Randbedingungen

$$L = a(x) \frac{d^2}{dx^2} + b(x) \frac{d}{dx} + c(x). \quad (2.1)$$

$$\langle u|u \rangle = \langle u|\underline{L}|u \rangle = \int \langle u|x \rangle dx \langle x|u \rangle = \int |u(x)|^2 dx \leq M. \quad (2.2)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u'(0) \\ u'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

$$\underline{L} \text{ umfaßt } \begin{cases} L & \text{formaler Operator,} \\ \mathcal{L} & \text{Operatorbereich.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Man bezeichnet RB als:

homogen:	$A = 0, B = 0.$
inhomogen:	wenn sie nicht homogen sind.
ungemischt:	$A = \alpha_1 u(0) + \alpha_3 u'(0),$ $B = \beta_2 u(1) + \beta_4 u'(1).$
gemischt:	wenn sie nicht ungemischt sind.
periodisch:	$u(0) = u(1), u'(0) = u'(1).$
RB 1. Art:	$A = \alpha_1 u(0), B = \beta_2 u(1).$
RB 2. Art:	$A = \alpha_3 u'(0), B = \beta_4 u'(1).$
RB 3. Art:	$A = \alpha_1 u(0) + \alpha_3 u'(0),$ $B = \beta_2 u(1) + \beta_4 u'(1).$
Anfangsbedingung:	$A = \alpha_1 u(0), B = \beta_3 u'(0),$
oder	$A = \alpha_2 u(1), B = \beta_4 u'(1).$

## 2.2 Adjungierter Operator und adjungierte Randbedingungen

Nach Gl. (1.96) gilt:

$$\begin{aligned}\langle v|\underline{L}|u\rangle &= \langle u|\underline{L}^\dagger|v\rangle^*, \\ \langle v|\underline{L}\underline{L}|u\rangle &= \langle u|\underline{L}\underline{L}^\dagger|v\rangle^*, \\ \int \langle v|x\rangle dx \langle x|\underline{L}|u\rangle &= \left\{ \int \langle u|x\rangle dx \langle x|\underline{L}^\dagger|v\rangle \right\}^*,\end{aligned}$$

oder mit Gl. (1.94):

$$\int v^*(x)Lu(x)dx = \int u(x)\{L^\dagger v(x)\}^* dx. \quad (2.5)$$

$$\underline{L}^\dagger \text{ umfa\ss}t \begin{cases} L^\dagger & \text{(zu } L \text{ formal adjungierter Operator),} \\ \mathcal{L}^\dagger & \text{(zu } \mathcal{L} \text{ adjungierter Operatorbereich).} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}L(x, x') &= \langle x|\underline{L}|x'\rangle, & L^\dagger(x, x') &= \langle x|\underline{L}^\dagger|x'\rangle, & \langle x|\underline{L}|x'\rangle &= \langle x'|\underline{L}^\dagger|x\rangle^* \\ L^\dagger(x, x') &= \{L(x', x)\}^*.\end{aligned} \quad (2.7)$$

Operator ist selbstadjungiert oder hermitesch, wenn gilt:

$$\underline{L} = \underline{L}^\dagger, \quad \text{d. h.} \quad \begin{cases} L = L^\dagger, & \text{der Operator ist formal selbstadjungiert,} \\ \mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger, & \text{der Operatorbereich ist selbstadjungiert.} \end{cases} \quad (2.8)$$

### 2.2.1 Beispiel 1

Im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  operiert  $L = a(x)d^2/dx^2$  auf Funktionen  $u(x)$ ;  $\mathcal{L}$  sei durch  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 0$  (sowie nat\u00fcrlich quadratintegrierbare Funktionen  $u(x)$ ,  $Lu(x)$ ) definiert. Man ermittle  $\underline{L}^\dagger$ .

$$\begin{aligned}& \int_0^1 v^*(x)Lu(x)dx \\ &= \int_0^1 v^*(x)a(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2}dx = \int_0^1 v^*(x)a(x)d\left[\frac{du(x)}{dx}\right] \\ &= \frac{du}{dx}v^*(x)a(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{d}{dx}[a(x)v^*(x)]dx \\ &= u'(1)v^*(1)a(1) - u(x)\frac{d}{dx}[a(x)v^*(x)]\Big|_0^1 + \int_0^1 u(x)\frac{d^2}{dx^2}[a(x)v^*(x)]dx \\ &= \int_0^1 u(x)\left\{\frac{d^2}{dx^2}[a^*(x)v(x)]\right\}^* dx + u'(1)v^*(1)a(1) - u(1)[a'(1)v^*(1) + a(1)v'^*(1)] \\ &= \int_0^1 u(x)\{L^\dagger v(x)\}^* dx. \\ L^\dagger &= \frac{d^2}{dx^2}[a^*(x)\dots], \quad \mathcal{L}^\dagger: \quad v(1) = 0, \quad v'(1) = 0.\end{aligned} \quad (2.9)$$

Es gilt  $L^\dagger \neq L$ ,  $\mathcal{L}^\dagger \neq \mathcal{L}$ ; somit ist  $\underline{L}$  nicht selbstadjungiert.

$$\begin{aligned}
Lu(x) &= \int L(x, x')u(x')dx' = a(x)\frac{d^2u}{dx^2} = a(x)\int \delta''(x' - x)u(x')dx'. \\
L(x, x') &= a(x)\delta''(x' - x) = a(x)\frac{d^2}{dx'^2}\delta(x' - x).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Durch Anwendung von Gl. (2.7) könnte man daraus die Matrixelemente des adjungierten Operators und aus

$$L^\dagger v(x) = \int L^\dagger(x, x')v(x')dx'$$

schließlich wieder  $L^\dagger$  selbst erhalten.

### 2.2.2 Beispiel 2

In  $0 \leq x \leq 1$  sei  $L = b(x)d/dx$  gegeben,  $\mathcal{L}$  durch  $u(0) - 2u(1) = 0$ . Da hier ein Operator erster Ordnung vorliegt, genügt eine einzige RB. Man ermittle  $L^\dagger$ .

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v^*(x)Lu(x)dx &= \int_0^1 v^*(x)b(x)\frac{du}{dx}dx = \int_0^1 b(x)v^*(x)du(x) \\
&= u(x)b(x)v^*(x)|_0^1 - \int_0^1 u(x)\frac{d}{dx}[b(x)v^*(x)]dx \\
&= \int_0^1 u(x)\left\{-\frac{d}{dx}[b^*(x)v(x)]\right\}^* dx + u(1)b(1)v^*(1) - u(0)b(0)v^*(0) \\
&= \int_0^1 u(x)\left\{-\frac{d}{dx}[b^*(x)v(x)]\right\}^* dx + u(1)[b(1)v^*(1) - 2b(0)v^*(0)] \\
&= \int_0^1 u(x)\{L^\dagger v(x)\}^* dx.
\end{aligned}$$

$$L^\dagger = -\frac{d}{dx}[b^*(x)\dots], \quad \mathcal{L}^\dagger : \quad b(1)v^*(1) - 2b(0)v^*(0) = 0. \tag{2.11}$$

### 2.2.3 Beispiel 3

$$L^\dagger = \frac{d^2}{dx^2}[a^*(x)\dots] - \frac{d}{dx}[b^*(x)\dots] + c^*(x). \tag{2.12}$$

## 2.3 Gewichtsfunktionen. Operatoren im erweiterten Sinn.

$$L = -\frac{1}{r(x)}\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) = -\frac{p(x)}{r(x)}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{r(x)}\frac{dp(x)}{dx}\frac{d}{dx} + q(x). \tag{2.13}$$

Durch Vergleich mit Gl. (2.1) sieht man, wie  $a$ ,  $b$ ,  $c$  mit  $r$ ,  $p$ ,  $q$  zusammenhängen.

$r(x)$  sei eine reelle, positive Funktion.

$$\int |x\rangle r(x)dx \langle x| = \underline{I}, \quad \langle x|x'\rangle = \frac{\delta(x-x')}{r(x)} = \frac{\delta(x-x')}{r(x')}. \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
|\varphi\rangle &= \int |x\rangle r(x) dx \langle x|\varphi\rangle = \int |x\rangle \varphi(x) r(x) dx, \\
\langle\varphi|\psi\rangle &= \langle\psi|\varphi\rangle^* = \langle\varphi|\underline{L}|\psi\rangle = \int \langle\varphi|x\rangle r(x) dx \langle x|\psi\rangle = \int \varphi^*(x) \psi(x) r(x) dx, \\
\langle\varphi|\varphi\rangle &= \int |\varphi(x)|^2 r(x) dx.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
\langle x|\underline{L}|u\rangle &= \langle x|g\rangle = \langle x|\underline{L}\underline{I}|u\rangle \\
&= Lu(x) = g(x) = \int \langle x|\underline{L}|x'\rangle r(x') dx' \langle x'|u\rangle = \int L(x, x') u(x') r(x') dx'.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
\underline{G}|g\rangle &= \underline{L}^{-1}|g\rangle = |u\rangle, \\
\langle x|\underline{G}|g\rangle &= \langle x|u\rangle = u(x) = Gg(x) = \int G(x, x_0) g(x_0) r(x_0) dx_0.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\underline{L}\underline{G} = \underline{I} \quad \text{oder} \quad \langle x|\underline{L}\underline{G}|x_0\rangle = \langle x|\underline{L}\underline{I}\underline{G}|x_0\rangle = \langle x|x_0\rangle,$$

d. h.

$$\int \langle x|\underline{L}|x'\rangle r(x') dx' \langle x'|\underline{G}|x_0\rangle = \int L(x, x') G(x', x_0) r(x') dx' = LG(x, x_0) = \frac{\delta(x - x_0)}{r(x)},$$

also

$$LG(x, x_0) = \delta(x - x_0)/r(x). \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
\langle v|\underline{L}|u\rangle &= \langle u|\underline{L}^\dagger|v\rangle^*, \\
\langle v|\underline{L}\underline{L}|u\rangle &= \langle u|\underline{L}\underline{L}^\dagger|v\rangle^*, \\
\int \langle v|x\rangle r(x) dx \langle x|\underline{L}|u\rangle &= \left\{ \int \langle u|x\rangle r(x) dx \langle x|\underline{L}^\dagger|v\rangle \right\}^*, \\
\int v^*(x) \{Lu(x)\} r(x) dx &= \int u(x) \{L^\dagger v(x)\}^* r(x) dx.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\underline{G}\underline{L} = \underline{L}\underline{G} = \underline{I}, \text{ also } \underline{L}^\dagger \underline{G}^\dagger = \underline{G}^\dagger \underline{L}^\dagger = \underline{I}.$$

$$\underline{L}^\dagger \underline{G}^\dagger = \underline{I} \quad \text{oder} \quad \langle x|\underline{L}^\dagger \underline{G}^\dagger|x_0\rangle = \langle x|\underline{L}^\dagger \underline{I}\underline{G}^\dagger|x_0\rangle = \langle x|x_0\rangle,$$

$$\int \langle x|\underline{L}^\dagger|x'\rangle r(x') dx' \langle x'|\underline{G}^\dagger|x_0\rangle = \int L^\dagger(x, x') G^\dagger(x', x_0) r(x') dx' = \delta(x - x_0)/r(x),$$

$$L^\dagger G^\dagger(x, x_0) = \delta(x - x_0)/r(x). \tag{2.20}$$

$G(x, x_0)$  aus  $\mathcal{L}$ ,  $G^\dagger(x, x_0)$  aus  $\mathcal{L}^\dagger$ .

$$G^\dagger(x', x) = \{G(x, x')\}^*. \tag{2.21}$$

Mittels Gl. (2.19) wird zu  $L$  in der Form Gl. (2.13) der adjungierte Operator berechnet. Der zu  $q$  adjungierte Anteil ist  $q^*$ , weil offenbar

$$\int v^*(x) \{q(x)u(x)\} r(x) dx = \int u(x) \{q^*(x)v(x)\}^* r(x) dx. \tag{2.22}$$



Für den ersten Anteil von Gl. (2.13) gilt z. B. im Bereich  $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 v^* \{Lu\} r dx \\
&= - \int_0^1 v^* \frac{1}{r} \frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) r dx = - \int_0^1 v^* d \left( p \frac{du}{dx} \right) = - v^* p \frac{du}{dx} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{dv^*}{dx} p \frac{du}{dx} dx \\
&= \int_0^1 p \frac{dv^*}{dx} du - v^* p \frac{du}{dx} \Big|_0^1 = p \frac{dv^*}{dx} u \Big|_0^1 - \int_0^1 u \frac{d}{dx} \left( p \frac{dv^*}{dx} \right) dx - v^* p \frac{du}{dx} \Big|_0^1 \\
&= \int_0^1 u \left\{ -\frac{1}{r} \frac{d}{dx} \left( p^* \frac{dv^*}{dx} \right) \right\}^* r dx + p \left( u \frac{dv^*}{dx} - v^* \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^1 \\
&= \int_0^1 u \{L^\dagger v\}^* r dx + K[v^*(x), u(x)] \Big|_0^1 \\
&= \int_0^1 u \{L^\dagger v\}^* r dx + \int_0^1 \frac{d}{dx} K(v^*, u) dx. \tag{2.23}
\end{aligned}$$

$K(v^*, u)$  wird als Konjunkt oder bilineare Kovariante der Funktionen  $v^*$ ,  $u$  bezeichnet:

$$K(v^*, u) = K(\langle v|x \rangle, \langle x|u \rangle) = -p(x) \left[ v^* \frac{du}{dx} - u \frac{dv^*}{dx} \right]. \tag{2.24}$$

Für den adjungierten Operator (siehe Gl. (2.5)) muß der letzte Term in Gl. (2.23) verschwinden.

$$\langle v|\underline{L}|u \rangle = \langle u|\underline{L}^\dagger|v \rangle^* + \int_0^1 \frac{d}{dx} K(v^*, u) dx \quad \text{mit} \quad \int_0^1 \frac{dK(v^*, u)}{dx} dx = 0. \tag{2.25}$$

$$\underline{L} \begin{cases} L = -\frac{1}{r} \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) + q, & r \text{ reell,} \\ u(x) & \text{aus dem Operatorbereich } \mathcal{L} \text{ (oft mit homogenen RB)} \end{cases} \tag{2.26}$$

$$\underline{L}^\dagger \begin{cases} L^\dagger = -\frac{1}{r} \frac{d}{dx} \left( p^* \frac{d}{dx} \right) + q^*, & r \text{ reell,} \\ v(x) & \text{aus } \mathcal{L}^\dagger, \text{ definiert durch } K(v^*, u) \Big|_0^1 = 0. \end{cases} \tag{2.27}$$

$$v^*(x) \{Lu(x)\} = u(x) \{L^\dagger v(x)\}^* + \frac{1}{r(x)} \frac{d}{dx} K(v^*, u). \tag{2.28}$$

Daraus entnimmt man für das Konjunkt:

1.  $K(v^*, u)$  ist eine Konstante, wenn  $u, v$  Lösungen von  $Lu(x) = 0, L^\dagger v(x) = 0$  sind.
2. Ist  $L = L^\dagger$  (formal selbstadjungierter Operator), so ist  $K(v^*, u)$  eine Konstante, wenn  $u, v$  Lösungen von  $Lu(x) = 0, Lv(x) = 0$  sind.
3. Ist  $L = L^\dagger$ , so ist für linear abhängige reelle Lösungen von  $Lu = 0, Lv = 0$  (d. h.  $u = \text{const} \cdot v$ ) das Konjunkt  $K = 0$ ; das sieht man durch Einsetzen in Gl. (2.24).

### 2.3.1 Operatoren im erweiterten Sinn

$$\begin{array}{lll} \underline{L}_I, & \text{gegeben durch } L, \mathcal{L}_I; & L \text{ operiert auf } w(x) \text{ aus } \mathcal{L}_I; \\ \underline{L}, & \text{gegeben durch } L, \mathcal{L}; & L \text{ operiert auf } u(x) \text{ aus } \mathcal{L}; \\ \underline{L}^\dagger, & \text{gegeben durch } L^\dagger, \mathcal{L}^\dagger; & L^\dagger \text{ operiert auf } v(x) \text{ aus } \mathcal{L}^\dagger. \end{array}$$

Wegen Gl. (2.25) gilt

$$\langle v | \underline{L} | u \rangle = \langle u | \underline{L}^\dagger | v \rangle^* + K(v^*, u)|_0^1, \quad K(v^*, u)|_0^1 = 0. \quad (2.29)$$

$$\langle v | \underline{L}_I | w \rangle = \langle w | \underline{L}^\dagger | v \rangle^* + K(v^*, w)|_0^1, \quad K(v^*, w)|_0^1 \neq 0. \quad (2.30)$$

Operator  $\underline{L}_e$  definiert durch:

$$\langle v | \underline{L}_e | w \rangle = \langle w | \underline{L}^\dagger | v \rangle^* = \langle v | \underline{L}_I | w \rangle - K(v^*, w)|_0^1. \quad (2.31)$$

$$\underline{L}_e \underline{G} = \underline{I} = \underline{G} \underline{L}_e. \quad (2.32)$$

Ansatz:

$$\underline{L}_I = \underline{L}_e + \underline{L}_1. \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \langle v | \underline{L}_e | w \rangle &= \langle v | \underline{L}_I | w \rangle - K(v^*, w)|_0^1, \\ \langle v | \underline{L}_e | w \rangle &= \langle v | \underline{L}_I | w \rangle - \langle v | \underline{L}_1 | w \rangle \\ &= \langle v | \underline{L}_I | w \rangle + \langle v | s \rangle, \\ \langle v | \underline{L}_1 | w \rangle &= -\langle v | s \rangle = K(\langle v | x \rangle, \langle x | w \rangle)|_0^1. \end{aligned} \quad (2.34)$$

### 2.3.2 Formal selbstadjungierte Operatoren

Für  $r(x)$ ,  $p(x)$ ,  $q(x)$  reell gilt  $L = L^\dagger$ , (formal selbstadjungiert); impliziert nicht  $\underline{L} = \underline{L}^\dagger$ , da  $u(x)$  aus  $\mathcal{L}$ , aber  $v(x)$  aus  $\mathcal{L}^\dagger$ , und im allgemeinen  $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}^\dagger$ .

Als Bereich  $\mathcal{L}$  wählt man immer homogene RB.  $\mathcal{L}^\dagger$  aus

$$K(v^*, u)|_0^1 = -p \left( v^* \frac{du}{dx} - u \frac{dv^*}{dx} \right) \Big|_0^1 = -p \left| \begin{array}{c} v^* \frac{dv^*}{dx} \\ u \frac{du}{dx} \end{array} \right| \Big|_0^1 = 0. \quad (2.35)$$

Wronskische Determinante; sie verschwindet, wenn  $u(x)$ ,  $v^*(x)$  linear abhängig.

$\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$  gilt für (= selbstadjungierte Randbedingungen)

1. Homogene RB 1. Art:  $u(0) = u(1) = 0$ .
2. Homogene RB 2. Art:  $u'(0) = u'(1) = 0$ .
3. Homogene RB 3. Art:  $u(0) + c_1 u'(0) = 0$ ,  $u(1) + c_2 u'(1) = 0$ . Die Koeffizienten  $c_1$ ,  $c_2$  sind reell.
4. Periodische RB mit der Einschränkung  $p(0) = p(1)$ :  $u(0) = u(1)$ ,  $u'(0) = u'(1)$ .

Homogene Anfangsbedingungen sind nicht selbstadjungiert: Für  $\mathcal{L}$  mit  $u(0) = u'(0) = 0$  erhält man  $\mathcal{L}^\dagger$  als  $v(1) = v'(1) = 0$ .

## 2.4 Inhomogene Probleme mit inhomogenen Randbedingungen

$$\underline{L}_I|w\rangle = |g\rangle, \quad \text{d. h.} \quad Lw(x) = g(x) \quad \text{mit } w(x) \text{ aus } \mathcal{L}_I. \quad (2.36)$$

Bekannt sei:

$$\begin{aligned} \underline{L}|u\rangle &= |g\rangle, \quad \text{d. h.} \quad Lu(x) = g(x) \quad \text{mit } u(x) \text{ aus } \mathcal{L}, \\ \underline{G}\underline{L} &= \underline{L}\underline{G} = \underline{L}^\dagger \underline{G}^\dagger = \underline{G}^\dagger \underline{L}^\dagger = \underline{I}, \\ \underline{L}G(x, x_0) &= \delta(x - x_0)/r(x) \quad \text{mit } G(x, x_0) \text{ aus } \mathcal{L} \text{ bezüglich } x, \\ \underline{L}^\dagger G^\dagger(x, x_0) &= \delta(x - x_0)/r(x) \quad \text{mit } G^\dagger(x, x_0) \text{ aus } \mathcal{L}^\dagger \text{ bezüglich } x, \end{aligned} \quad (2.37)$$

Lösung des inhomogenen Problems zu homogenen Randbedingungen (beachte  $G^\dagger(x', x) = \{G(x, x')\}^*$ ):

$$\begin{aligned} |u\rangle &= \underline{G}|g\rangle, \quad \text{d. h.} \\ u(x) &= \int_0^1 G(x, x_0)g(x_0)r(x_0)dx_0 = \int_0^1 [G^\dagger(x_0, x)]^* g(x_0)r(x_0)dx_0. \end{aligned}$$

$$\underline{L}_I|w\rangle = |g\rangle = \underline{L}_e|w\rangle + \underline{L}_1|w\rangle. \quad (2.38)$$

Die formale Lösung ( $\underline{G}\underline{L}_e = \underline{I}$ ):

$$|w\rangle = \underline{G}|g\rangle - \underline{G}\underline{L}_1|w\rangle. \quad (2.39)$$

$$w(x) = \langle x|w\rangle = \langle x|\underline{G}|g\rangle - \langle x|\underline{G}\underline{L}_1|w\rangle. \quad (2.40)$$

Die Bedeutung der Klammer  $\langle x|\underline{G}\underline{L}_1|w\rangle$  folgt aus Gl. (2.34), indem man statt  $\langle v|$  den Bra  $\langle x|\underline{G}$  einsetzt und im Konjunkt anstelle der Variablen  $x$  (die bereits in  $\langle x|\underline{G}$  verwendet wurde) eine Variable  $x_0$  setzt:

$$\begin{aligned} -\langle x|\underline{G}\underline{L}_1|w\rangle &= -K (\langle x|\underline{G}|x_0\rangle, \langle x_0|w\rangle)|_{x_0=0}^{x_0=1} \\ &= -K [G(x, x_0), w(x_0)]|_{x_0=0}^{x_0=1}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Differentiationen im Konjunkt erfolgen nach der Variablen  $x_0$ . Lösung des inhomogenen Problems zu inhomogenen Randbedingungen:

$$w(x) = \int_0^1 G(x, x_0)g(x_0)r(x_0)dx_0 - K [G(x, x_0), w(x_0)]|_{x_0=0}^{x_0=1}. \quad (2.42)$$

Sonderfall:  $\underline{L}|u\rangle = |g\rangle$  mit  $u(x)$  aus  $\mathcal{L}$  ist im allgemeinen nicht lösbar, wenn das Problem  $\underline{L}^\dagger|v\rangle = 0$  eine nichttriviale Lösung  $v(x)$  aus  $\mathcal{L}^\dagger$  besitzt. Aus  $\underline{L}|u\rangle = |g\rangle$  folgt dann nämlich

$$\langle v|\underline{L}|u\rangle = \langle v|g\rangle = \langle u|\underline{L}^\dagger|v\rangle^* = 0. \quad (2.43)$$

Eine Lösung existiert nur dann, wenn „zufällig“  $\langle v|g\rangle$  ebenfalls verschwindet (Orthogonalität von  $|g\rangle$  und  $|v\rangle$ ).

### 2.4.1 Beispiel

Man löse

$$-\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad w(0) = w_0, \quad w(1) = w_1. \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \underline{L}_I: \quad L &= -d^2/dx^2, \quad \mathcal{L}_I: \quad w(0) = w_0, \quad w(1) = w_1, \\ \underline{L}: \quad L &= -d^2/dx^2, \quad \mathcal{L}: \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \\ \underline{L}^\dagger: \quad L^\dagger &= L = -d^2/dx^2, \quad \mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}: \quad v(0) = 0, \quad v(1) = 0. \end{aligned}$$

$$-\frac{d^2 G(x, x_0)}{dx^2} = \delta(x - x_0), \quad G(0, x_0) = 0, \quad G(1, x_0) = 0. \quad (2.45)$$

$$G(x, x_0) = \begin{cases} x_0(1-x) & 0 \leq x_0 < x, \\ x(1-x_0) & x < x_0 \leq 1. \end{cases} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} K [G(x, x_0), w(x_0)] \Big|_{x_0=0}^{x_0=1} &= \\ &= - \left[ G(x, 1)w'(1) - w(1) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x_0} \Big|_{x_0=1} \right] + \left[ G(x, 0)w'(0) - w(0) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x_0} \Big|_{x_0=0} \right] \\ &= w_1 \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x_0} \Big|_{x_0=1} - w_0 \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x_0} \Big|_{x_0=0} \\ &= w_1 \frac{\partial}{\partial x_0} [x(1-x_0)] \Big|_{x_0=1} - w_0 \frac{\partial}{\partial x_0} [x_0(1-x)] \Big|_{x_0=0} \\ &= -w_1 x - w_0(1-x). \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_0^1 G(x, x_0)g(x_0)dx_0 + w_0(1-x) + w_1x \\ &= \int_0^x x_0(1-x)g(x_0)dx_0 + \int_x^1 x(1-x_0)g(x_0)dx_0 + w_0(1-x) + w_1x. \end{aligned} \quad (2.48)$$

## 2.5 Berechnung der Greenschen Funktion

$$LG(x, x_0) = \frac{\delta(x - x_0)}{r(x)} = -\frac{1}{r(x)} \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dG(x, x_0)}{dx} \right] + q(x)G(x, x_0). \quad (2.49)$$

$G(x, x_0)$  aus  $\mathcal{L}$  (homogene Randbedingungen).  $G(x, x_0)$  ist stetig mit Sprung in der ersten Ableitung bei  $x = x_0$ .

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -p(x) \frac{dG(x, x_0)}{dx} \Big|_{x=x_0-\varepsilon}^{x=x_0+\varepsilon} \right\} = 1. \quad (2.50)$$

$G(x, x_0)$  ist außer bei  $x = x_0$  eine Lösung der homogenen Gleichung  $LG = 0$ .

### 2.5.1 $G(x, x_0)$ für ungemischte Randbedingungen

- $h_1(x)$  ist irgendeine Lösung von  $LG = 0$ , welche die homogene RB bei  $x = 0$  erfüllt.
- $h_2(x)$  ist irgendeine Lösung von  $LG = 0$ , welche die homogene RB bei  $x = 1$  erfüllt.

$$F(x, x_0) = \begin{cases} h_1(x)h_2(x_0) & 0 \leq x < x_0, \\ h_1(x_0)h_2(x) & x_0 < x \leq 1, \end{cases} \quad (2.51)$$

stetig, außer bei  $x = x_0$  ist  $LF(x, x_0) = 0$ , homogene RB. Der Sprung der ersten Ableitung ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -p \frac{dF}{dx} \Big|_{x=x_0+\varepsilon} + p \frac{dF}{dx} \Big|_{x=x_0-\varepsilon} \right\} = -p(x_0)[h_1(x_0)h_2'(x_0) - h_2(x_0)h_1'(x_0)] = K(h_1, h_2) \Big|_{x=x_0}.$$

$$G(x, x_0) = \frac{h_1(x)h_2(x_0)H(x_0-x) + h_1(x_0)h_2(x)H(x-x_0)}{K(h_1, h_2) \Big|_{x=x_0}}, \quad 0 \leq x_0 \leq 1. \quad (2.52)$$

### Beispiel

$$\begin{aligned}
 -\frac{d^2 G(x, x_0)}{dx^2} &= \delta(x - x_0), \quad G(0, x_0) = 0, \quad G(1, x_0) = 0. \\
 h_1(x) &= x \\
 h_2(x) &= 1 - x \quad K(h_1, h_2) = (1 - x) - x(-1) = 1. \\
 G(x, x_0) &= x(1 - x_0)H(x_0 - x) + x_0(1 - x)H(x - x_0) \quad 0 \leq x_0 \leq 1.
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

### 2.5.2 $G(x, x_0)$ für gemischte Randbedingungen

Ansatz:

$$G(x, x_0) = c_1 h_1(x) + c_2 h_2(x) + \frac{h_1(x)h_2(x_0)H(x_0 - x) + h_1(x_0)h_2(x)H(x - x_0)}{K(h_1, h_2)|_{x=x_0}} \quad 0 \leq x_0 \leq 1. \tag{2.54}$$

$c_1, c_2$  aus den homogenen RB,  $h_1, h_2$  beliebig mit  $Lh = 0$ .

### Beispiel

$$\begin{aligned}
 -\frac{d^2 G(x, x_0)}{dx^2} &= \delta(x - x_0), \quad G(0, x_0) = 0, \quad G'(0, x_0) = 0 \\
 h_1(x) &= 1 \\
 h_2(x) &= x \quad K(h_1, h_2)|_{x=x_0} = -1 \\
 G(x, x_0) &= c_1 + c_2 x - x_0 H(x_0 - x) - x H(x - x_0) = \begin{cases} c_1 + c_2 x - x_0 & 0 \leq x < x_0, \\ c_1 + c_2 x - x & x_0 < x \leq 1. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Homogene RB:

$$\left. \begin{aligned} G(0, x_0) = 0 = c_1 - x_0, \\ G'(0, x_0) = 0 = c_2, \end{aligned} \right\} \text{ d. h. } c_1 = x_0, \quad c_2 = 0.$$

Ergebnis

$$G(x, x_0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < x_0 \\ x_0 - x & x_0 < x \leq 1 \end{cases} = (x_0 - x)H(x - x_0), \quad 0 \leq x_0 \leq 1. \tag{2.56}$$

### 2.5.3 Die Berechnung von $G(x, x_0)$ mittels Fouriertransformation

Methode ist vorteilhaft bei kausalen GF.

### Beispiel

$$-\frac{d^2 G(x, x_0)}{dx^2} = \delta(x - x_0), \quad G(0, x_0) = 0, \quad G'(0, x_0) = 0. \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned}
 4\pi^2 f^2 G_F(f, x_0) &= e^{-2\pi j f x_0}, \\
 G_F(f, x_0) &= \frac{\exp(-2\pi j f x_0)}{4\pi^2 f^2}, \\
 G(x, x_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[2\pi j f (x - x_0)]}{4\pi^2 f^2} df.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Lösung ist sinnlos: Integrand in der Umgebung von  $f = 0$ :

$$\frac{\exp[2\pi j f (x - x_0)]}{4\pi^2 f^2} = \frac{1}{4\pi^2 f^2} + \frac{j(x - x_0)}{2\pi f} - \frac{(x - x_0)^2}{2} + \dots \tag{2.59}$$

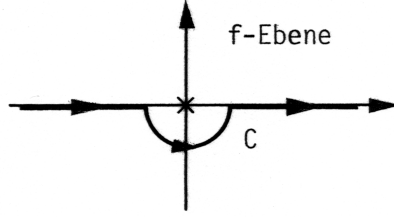


Abbildung 2.1: Zur gewünschten kausalen Greenschen Funktion führender Integrationsweg C für das Integral Gl. (2.58) in der komplexen  $f$ -Ebene

$$G(x, x_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_C \frac{e^{2\pi j f(x-x_0)}}{f^2} df. \quad (2.60)$$

$$G(x, x_0) = 0 \quad \text{für} \quad x - x_0 < 0, \quad (2.61)$$

$$\oint = 2\pi j \sum \text{Residuen} = 2\pi j \frac{j(x-x_0)}{2\pi} = x_0 - x = G(x, x_0), \quad x - x_0 > 0. \quad (2.62)$$

#### 2.5.4 $G(x, x_0)$ für Differentialgleichungen erster Ordnung

$$Lw(x) = \frac{dw}{dx} + jk_0 w = 0, \quad w(x_1) = w_1 \neq 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2. \quad (2.63)$$

Lösung nach Gl. (2.42)

$$w(x) = -K[G(x, x_0), w(x_0)] \Big|_{x_0=x_1}^{x_0=x_2}. \quad (2.64)$$

$$\frac{dG(x, x_0)}{dx} + jk_0 G(x, x_0) = \delta(x - x_0), \quad G(x_1, x_0) = 0. \quad (2.65)$$

$$G(x, x_0) = \begin{cases} 0 & x_1 \leq x < x_0, \\ c \exp(-jk_0 x) & x_0 < x \leq x_2. \end{cases} \quad (2.66)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ G(x, x_0)|_{x=x_0+\varepsilon} - G(x, x_0)|_{x=x_0-\varepsilon} \} = 1 = c e^{-jk_0 x_0}. \quad (2.67)$$

$$G(x, x_0) = \begin{cases} 0 & x_1 \leq x < x_0, \\ \exp[-jk_0(x - x_0)] & x_0 < x \leq x_2. \end{cases} \quad (2.68)$$

Für das Konjunkt kann jetzt nicht Gl. (2.24) verwendet werden. Man geht auf die allgemeine Definition Gl. (2.25) mit  $r = 1$  zurück:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} v^* L u dx &= \int_{x_1}^{x_2} v^* \left( \frac{d}{dx} + jk_0 \right) u dx = \int_{x_1}^{x_2} v^* du + \int_{x_1}^{x_2} jk_0 v^* u dx \\ &= v^* u \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} u \frac{dv^*}{dx} dx + \int_{x_1}^{x_2} jk_0 v^* u dx = \int_{x_1}^{x_2} u \left\{ \left( -\frac{d}{dx} - jk_0 \right) v \right\}^* dx + v^* u \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} u \{ L^\dagger v \}^* dx + K(v^*, u) \Big|_{x_1}^{x_2}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$L^\dagger = -\frac{d}{dx} - jk_0, \quad K(v^*, u) = v^* u. \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} w(x) &= -G(x, x_0)w(x_0) \Big|_{x_0=x_1}^{x_0=x_2} = -G(x, x_2)w(x_2) + G(x, x_1)w(x_1) \\ &= G(x, x_1)w(x_1) = w_1 e^{-jk_0(x-x_1)}, \quad x > x_1. \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$G(x, x_0) = \begin{cases} \exp[-jk_0(x - x_0)] & x > x_0, \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

„Propagator“.

GF mittels Fourier-Transformation:

$$-j(k - k_0)G_F(k, x_0) = e^{jkx_0}. \quad (2.72)$$

$$G(x, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_F(k, x_0) e^{-jkx} \frac{dk}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[jk(x_0 - x)]}{k - k_0} dk. \quad (2.73)$$

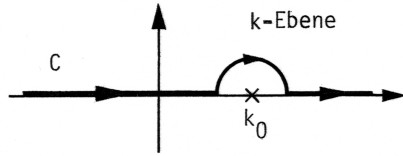


Abbildung 2.2: Integrationsweg C für das Integral Gl. (2.73), der zur richtigen Greenschen Funktion führt

$$\begin{aligned} \oint &= -2\pi j \sum \text{Residuen} = -2\pi j \left[ -\frac{1}{2\pi j} e^{jk_0(x_0 - x)} \right] \\ &= e^{jk_0(x_0 - x)} = G(x, x_0), \quad x > x_0. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Damit ist der Propagator gefunden.

Die richtige Lösung ohne „Probieren“:

$$G_F(k, x_0) = j e^{jkx_0} P \left( \frac{1}{k - k_0} \right) + j e^{jkx_0} c \delta(k - k_0). \quad (2.75)$$

$c$  muß so bestimmt werden, daß die GF

$$\begin{aligned} G(x, x_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G_F(k, x_0) e^{-jkx} \frac{dk}{2\pi} \\ &= \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P \left( \frac{1}{k - k_0} \right) e^{jk(x_0 - x)} dk + \frac{jc}{2\pi} e^{jk_0(x_0 - x)} \end{aligned} \quad (2.76)$$

die RB erfüllt.

$$G(x, x_0) = e^{jk_0(x_0 - x)} \left[ -\frac{1}{2} \text{sgn}(x_0 - x) + \frac{jc}{2\pi} \right]. \quad (2.77)$$

Für die RB  $G(x_1, x_0) = 0$  ist wegen  $x_1 \leq x < x_0$  und somit  $x < x_0$  der Funktionswert  $\text{sgn}(x_0 - x) = 1$ , und somit folgt aus Gl. (2.77)

$$\frac{jc}{2\pi} = \frac{1}{2}. \quad (2.78)$$

$$G(x, x_0) = e^{jk_0(x_0 - x)} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{sgn}(x_0 - x) \right]. \quad (2.79)$$

Dieses Ergebnis ist mit Gl. (2.74) identisch. Das Integral in Gl. (2.76) wird folgendermaßen berechnet:

1. Man substituiert die neue Variable  $v = k - k_0$ .
2. Man verwendet die Definition des Hauptwerts Gl. (1.29).
3. Man schreibt statt  $\sin[v(x_0 - x)]$  den Ausdruck  $\sin[v|x_0 - x|]\operatorname{sgn}(x_0 - x)$ .
4. Man substituiert  $u = v|x_0 - x|$ .
5. Das Integral  $\int_0^\infty \sin x dx/x$  hat den Wert  $\pi/2$ .

Man erhält:

$$\begin{aligned}
& \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\frac{1}{k - k_0}\right) e^{jk(x_0 - x)} dk = \frac{j}{2\pi} e^{jk_0(x_0 - x)} \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\frac{1}{v}\right) e^{jv(x_0 - x)} dv \\
& = -\frac{1}{\pi} e^{jk_0(x_0 - x)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin[v(x_0 - x)]}{v} dv \\
& = -\frac{1}{\pi} e^{jk_0(x_0 - x)} \operatorname{sgn}(x_0 - x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon|x_0 - x|}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \\
& = -\frac{1}{\pi} e^{jk_0(x_0 - x)} \operatorname{sgn}(x_0 - x) \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = -\frac{1}{2} e^{jk_0(x_0 - x)} \operatorname{sgn}(x_0 - x)
\end{aligned}$$

Damit ist Gl. (2.78) bewiesen.



## Kapitel 3

# Eigenfunktionen

### 3.1 Entwicklung nach Eigenfunktionen

$$\begin{aligned}\underline{L}|u_k\rangle &= \lambda_k|u_k\rangle, \\ \underline{L}^\dagger|v_l\rangle &= \mu_l|v_l\rangle,\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$f(\underline{L}) = \sum_i c_i \underline{L}^i, \quad h(\underline{L}^\dagger) = \sum_i b_i (\underline{L}^\dagger)^i,\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}f(\underline{L})|u_k\rangle &= f(\lambda_k)|u_k\rangle, \\ h(\underline{L}^\dagger)|v_l\rangle &= h(\mu_l)|v_l\rangle.\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$\left. \begin{aligned}\langle v_l|\underline{L}|u_k\rangle &= \lambda_k\langle v_l|u_k\rangle, \\ \langle u_k|\underline{L}^\dagger|v_l\rangle &= \mu_l\langle u_k|v_l\rangle,\end{aligned}\right\} \text{ und wegen } \langle v_l|\underline{L}|u_k\rangle = \langle u_k|\underline{L}^\dagger|v_l\rangle^*$$

$$(\lambda_k - \mu_l^*)\langle v_l|u_k\rangle = 0.\tag{3.4}$$

$$\langle v_l|u_k\rangle = \delta(l, k) = \begin{cases} \delta_{lk} & l, k \text{ diskret,} \\ \delta(l - k) & l, k \text{ kontinuierlich.} \end{cases}\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\int \langle v_l|x\rangle r(x) dx \langle x|u_k\rangle &= \int v_l^*(x) u_k(x) r(x) dx = \delta_{lk}, \\ \int \langle v_l|x\rangle r(x) dx \langle x|u_k\rangle &= \int v^*(l, x) u(k, x) r(x) dx = \delta(l - k).\end{aligned}\tag{3.6}$$

$$|\varphi\rangle = \sum_k |u_k\rangle \alpha_k + \int |u_k\rangle \alpha(k) dk = \sum_k^{\int} |u_k\rangle \alpha(k) dk,\tag{3.7}$$

$$|\varphi\rangle = \sum_l |v_l\rangle \beta_l + \int |v_l\rangle \beta(l) dl = \sum_l^{\int} |v_l\rangle \beta(l) dl.$$

$$\langle v_l|\varphi\rangle = \sum_k^{\int} \langle v_l|u_k\rangle \alpha(k) dk = \sum_k^{\int} \delta(l, k) \alpha(k) dk = \begin{cases} \alpha_l & l \text{ diskret,} \\ \alpha(l) & l \text{ kontinuierlich.} \end{cases}\tag{3.8}$$

$$|\varphi\rangle = \sum_k |u_k\rangle \langle v_k|\varphi\rangle + \int |u_k\rangle dk \langle v_k|\varphi\rangle = \sum_k^{\int} |u_k\rangle dk \langle v_k|\varphi\rangle,$$

$$|\varphi\rangle = \sum_l |v_l\rangle \langle u_l|\varphi\rangle + \int |v_l\rangle dl \langle u_l|\varphi\rangle = \sum_l^{\int} |v_l\rangle dl \langle u_l|\varphi\rangle,$$

$$\langle v_k|\varphi\rangle = \int \langle v_k|x'\rangle r(x') dx' \langle x'|\varphi\rangle = \begin{cases} \int v_k^*(x') \varphi(x') r(x') dx' & k \text{ diskret,} \\ \int v^*(k, x') \varphi(x') r(x') dx' & k \text{ kontinuierlich.} \end{cases}\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\sum_k^f |u_k\rangle dk \langle v_k| &= \sum_k |u_k\rangle \langle v_k| + \int |u_k\rangle dk \langle v_k| = \underline{I}, \\ \sum_l^f |v_l\rangle dl \langle u_l| &= \sum_l |v_l\rangle \langle u_l| + \int |v_l\rangle dl \langle u_l| = \underline{I}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta(x-x')}{r(x)} &= \frac{\delta(x-x')}{r(x')} \\ &= \sum_k^f u(k,x)v^*(k,x')dk = \sum_k u_k(x)v_k^*(x') + \int u(k,x)v^*(k,x')dk \\ &= \sum_l^f v(l,x)u^*(l,x')dl = \sum_l v_l(x)u_l^*(x') + \int v(l,x)u^*(l,x')dl.\end{aligned}\tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int \delta(x-x')\varphi(x')dx' \\ &= \sum_k u_k(x) \int v_k^*(x')\varphi(x')r(x')dx' + \int dk u(k,x) \int v^*(k,x')\varphi(x')r(x')dx'.\end{aligned}\tag{3.12}$$

### 3.1.1 Speziell für Hermitesche Operatoren geltende Beziehungen

$$\begin{aligned}\langle u_k | \underline{L} | u_k \rangle &= \lambda_k \langle u_k | u_k \rangle = \langle u_k | \underline{L}^\dagger | u_k \rangle = \langle u_k | \underline{L}^\dagger | u_k \rangle^* \\ \langle u_l | u_k \rangle &= \delta(l,k), \quad \sum_k^f |u_k\rangle dk \langle u_k| = \underline{I}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$\frac{\langle \varphi | \underline{L} | \varphi \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle} = \lambda_k + O(\varepsilon^2).\tag{3.14}$$

### 3.1.2 Beispiel für Eigenfunktionen

$$\underline{L}: \quad L = -d^2/dx^2; \quad \mathcal{L}: \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = u(1).\tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}K(v^*, u)|_0^1 &= u(1)v'^*(1) - v^*(1)u'(1) - u(0)v'^*(0) + v^*(0)u'(0) \\ &= u'(0)v'^*(1) - v^*(1)u'(1) + v^*(0)u'(0) \\ &= u'(0)[v^*(0) + v'^*(1)] - u'(1)v^*(1) = 0,\end{aligned}$$

$$\underline{L}^\dagger: \quad L^\dagger = -d^2/dx^2; \quad \mathcal{L}^\dagger: \quad v^*(1) = 0, \quad v'^*(1) = -v^*(0).\tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}u'' + \lambda u &= 0 && \text{Differentialgleichung,} \\ u(x) &= C \sin(x\sqrt{\lambda}) && \text{Lösung für } u(0) = 0, \\ \sqrt{\lambda} &= \sin \sqrt{\lambda} && \text{Eigenwertgleichung für } u'(0) = u(1).\end{aligned}\tag{3.17}$$

$$u_0(x) = x, \quad \lambda_0 = 0.\tag{3.18}$$

$$\sqrt{\lambda_k} = \alpha_k + j\beta_k, \quad u_k(x) = \sin[x(\alpha_k + j\beta_k)],\tag{3.19}$$

$$\alpha_k = \sin \alpha_k \cosh \beta_k, \quad \beta_k = \cos \alpha_k \sinh \beta_k.\tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}v'' + \mu v &= 0 && \text{Differentialgleichung,} \\ v(x) &= C \sin[(1-x)\sqrt{\mu}] && \text{Lösung für } v^*(1) = 0, \\ (\sqrt{\mu})^* &= \sin(\sqrt{\mu})^* && \text{Eigenwertgleichung für } v^*(0) = -v'^*(1).\end{aligned}\tag{3.21}$$

$$[\sin(a+jb)]^* = \sin[(a+jb)^*]$$

$$\begin{aligned}v_0(x) &= 1-x, && \mu_0 = \lambda_0 = 0, \\ v_k(x) &= \sin[(1-x)(\alpha_k - j\beta_k)], && (\sqrt{\mu_k})^* = \sqrt{\lambda_k} = \alpha_k + j\beta_k.\end{aligned}\tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v_0^*(x) u_0(x) dx &= \int_0^1 (1-x)x dx = \frac{1}{6}, \\
\int_0^1 v_l^*(x) u_k(x) dx &= \int_0^1 \sin[(1-x)(\alpha_l + j\beta_l)] \sin[x(\alpha_k + j\beta_k)] dx \\
&= \frac{1}{2} [1 - \cos(\alpha_k + j\beta_k)] \delta_{kl}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= x, & v_0(x) &= 6(1-x), \\
u_k(x) &= \sin[x(\alpha_k + j\beta_k)], & v_k(x) &= \frac{2}{1 - \cos(\alpha_k - j\beta_k)} \sin[(1-x)(\alpha_k - j\beta_k)].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= u_0(x) \langle v_0 | \varphi \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \langle v_k | \varphi \rangle, \\
\langle v_0 | \varphi \rangle &= \int_0^1 v_0^*(x) \varphi(x) dx = \int_0^1 6(1-x) \varphi(x) dx, \\
\langle v_k | \varphi \rangle &= \int_0^1 v_k^*(x) \varphi(x) dx = \int_0^1 \frac{2 \sin[(1-x)(\alpha_k + j\beta_k)]}{1 - \cos(\alpha_k + j\beta_k)} \varphi(x) dx.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

### 3.1.3 Beispiel zur Entwicklung nach Eigenfunktionen

$$\left. \begin{aligned} \underline{L}: L &= -d^2/dx^2, & \mathcal{L}: u(0) &= 0, u(\pi) = 0, \\ \underline{L}^\dagger: L &= -d^2/dx^2, & \mathcal{L}^\dagger: v(0) &= 0, v(\pi) = 0, \end{aligned} \right\} \text{ d. h. } \underline{L} = \underline{L}^\dagger. \tag{3.25}$$

$$u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad \lambda_k = k^2. \tag{3.26}$$

$$\delta(x - x') = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \sin(kx) \sin(kx'). \tag{3.27}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad \text{d. h. } \varphi(0) = \pi/2, \varphi(\pi) = 0. \tag{3.28}$$

$$\varphi(x) = \int_{0^-}^{\pi^+} \delta(x - x') \varphi(x') dx' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \sin(kx) \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\pi - x') \sin(kx') dx' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}. \tag{3.29}$$

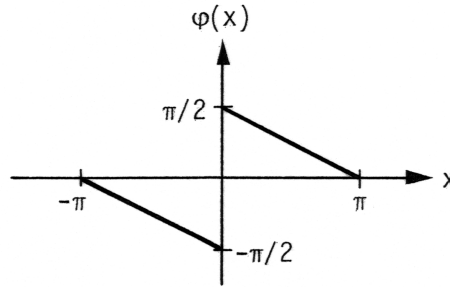


Abbildung 3.1: Darstellung der Funktion  $\varphi(x)$  von Gl. (3.28), welche für Werte  $x < 0$  gemäß der Reihe von Gl. (3.29) als ungerade Funktion fortgesetzt wurde

$$f(\zeta) = \frac{\pi \cos(\pi\zeta)}{\sin(\pi\zeta)} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\zeta \rightarrow k} \frac{\pi \cos(\pi \zeta)}{\sin(\pi \zeta)} &= \lim_{\zeta \rightarrow k} \frac{\pi \cos(\pi \zeta)}{\sin[(\zeta - k)\pi + k\pi]} \\
&= \lim_{\zeta \rightarrow k} \frac{\pi \cos(\pi \zeta)}{\sin[(\zeta - k)\pi] \cos(k\pi) + \cos[(\zeta - k)\pi] \sin(k\pi)} \\
&= \lim_{\zeta \rightarrow k} \frac{\pi}{\sin[(\zeta - k)\pi]} = \lim_{\zeta \rightarrow k} \frac{\pi}{(\zeta - k)\pi - \frac{1}{3!}(\zeta - k)^3 \pi^3 + \dots} \\
&= \lim_{\zeta \rightarrow k} \frac{1}{\zeta - k} \frac{1}{1 - O[(\zeta - k)^2]} = \lim_{\zeta \rightarrow k} \frac{1}{\zeta - k}.
\end{aligned}$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\pi \cos(\pi \zeta)}{\sin(\pi \zeta)} \frac{\sin(\zeta x)}{\zeta} d\zeta. \quad (3.31)$$

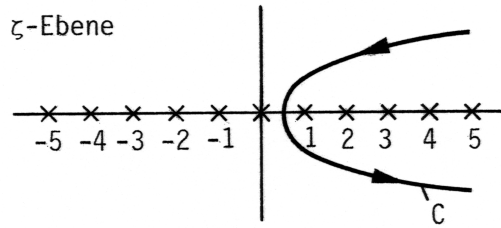


Abbildung 3.2: Integrationsweg für das Integral von Gl. (3.31) in der komplexen  $\zeta$ -Ebene

$$-\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\pi \sin(\pi \zeta)}{\sin(\pi \zeta)} \frac{\cos(\zeta x)}{\zeta} d\zeta = 0,$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_1} \frac{\pi \sin[\zeta(x - \pi)]}{\zeta \sin(\pi \zeta)} d\zeta. \quad (3.32)$$

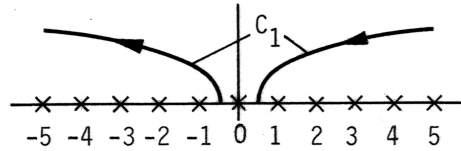


Abbildung 3.3: Der Integrationsweg längs der nicht geschlossenen Kurve  $C_1$  ersetzt den Integrationsweg  $C$  von Abb. (3.2), siehe das Integral von Gl. (3.32)

$$\oint_{C_2} = 0 = \int_{C_1} + \int_A^B + \int_B^D + \int_D^E + \int_E^G.$$

$$\int_A^B + \int_D^E = 0.$$

$$\int_{C_1} = - \int_B^D - \int_E^G. \quad (3.33)$$

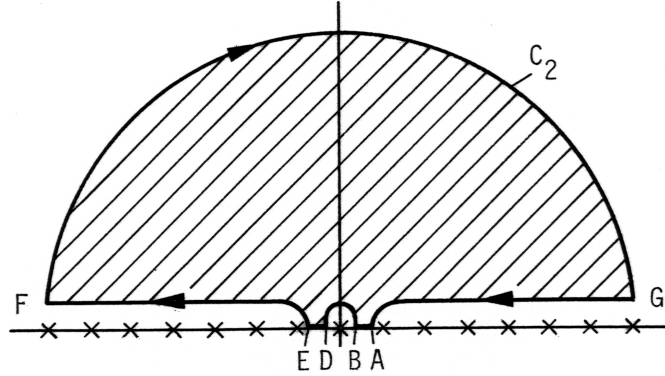


Abbildung 3.4: Das Umlaufintegral längs  $C_2$  verschwindet; es enthält als Bestandteil das Integral längs des in Abb. (3.3) gezeigten Weges  $C_1$

$$\begin{aligned}
-\int_B^D &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{\pi \sin[\varepsilon e^{j\varphi}(x-\pi)]}{\varepsilon e^{j\varphi} \sin(\pi \varepsilon e^{j\varphi})} j \varepsilon e^{j\varphi} d\varphi \\
&= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi j \pi \frac{\varepsilon e^{j\varphi}(x-\pi) - \dots}{\pi \varepsilon e^{j\varphi} - \dots} d\varphi \\
&= -j \int_0^\pi (x-\pi) d\varphi = -j\pi(x-\pi).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
&\int_F^G \frac{\sin[\zeta(x-\pi)] d\zeta}{\zeta \sin(\pi\zeta)} \\
&= \int_F^G \frac{e^{j\zeta(x-\pi)} - e^{-j\zeta(x-\pi)}}{e^{j\pi\zeta} - e^{-j\pi\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta} \\
&= \int_F^G \frac{e^{j\zeta x} d\zeta}{\zeta (e^{2j\pi\zeta} - 1)} - \int_F^G \frac{e^{-j\zeta(x-2\pi)} d\zeta}{\zeta (e^{2j\pi\zeta} - 1)}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{1}{2}(\pi - x), \quad 0 < x < 2\pi. \tag{3.36}$$

### 3.2 Die Spektraldarstellung von Operatorfunktionen

$$\begin{aligned}
|g\rangle &= \sum_k |u_k\rangle dk \langle v_k | g \rangle = \sum_l |v_l\rangle dl \langle u_l | g \rangle, \\
f(\underline{L})|g\rangle &= \sum_k f(\underline{L})|u_k\rangle dk \langle v_k | g \rangle = \sum_k |u_k\rangle f(\lambda_k) dk \langle v_k | g \rangle, \\
f(\underline{L}^\dagger)|g\rangle &= \sum_l f(\underline{L}^\dagger)|v_l\rangle dl \langle u_l | g \rangle = \sum_l |v_l\rangle f(\mu_l) dl \langle u_l | g \rangle.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
f(L)g(x) &= \sum_k u_k(x)f(\lambda_k) \int v_k^*(x_0)g(x_0)r(x_0)dx_0, \\
f(L^\dagger)g(x) &= \sum_l v_l(x)f(\mu_l) \int u_l^*(x_0)g(x_0)r(x_0)dx_0.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
f(\underline{L}) &= \int_k |u_k\rangle f(\lambda_k) dk \langle v_k|, \\
f(\underline{L}^\dagger) &= \int_l |v_l\rangle f(\mu_l) dl \langle u_l|.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\int |u_k\rangle \delta(\lambda_k - \lambda) dk \langle v_k| = (\text{Definition}) = \delta(\underline{L} - \lambda \underline{I}). \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
f(L)\delta(x - x_0) &= \sum_k u_k(x)f(\lambda_k)v_k^*(x_0)r(x_0), \\
f(L^\dagger)\delta(x - x_0) &= \sum_l v_l(x)f(\mu_l)u_l^*(x_0)r(x_0).
\end{aligned} \tag{3.41}$$

### 3.2.1 Inversion von Operatoren

$$\underline{L}|\varphi\rangle = |g\rangle \tag{3.42}$$

$$\underline{L}|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle, \quad \underline{L}^\dagger|v_l\rangle = \mu_l|v_l\rangle. \tag{3.43}$$

$$f(\underline{L}) = \underline{L}^{-1} = \underline{G} = \int_k \frac{|u_k\rangle dk \langle v_k|}{\lambda_k}. \tag{3.44}$$

$$|\varphi\rangle = \underline{G}|g\rangle = \int_k \frac{|u_k\rangle dk \langle v_k|g\rangle}{\lambda_k}, \tag{3.45}$$

$$\varphi(x) = \int_k \frac{u_k(x) dk \int v_k^*(x_0)g(x_0)r(x_0)dx_0}{\lambda_k}.$$

$$G(x, x_0) = \langle x|\underline{G}|x_0\rangle = \int_k \frac{u_k(x) dk v_k^*(x_0)}{\lambda_k}. \tag{3.46}$$

### 3.3 Grundgedanke der Störungsrechnung

$$\underline{L}|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle, \quad \underline{L} = \underline{L}^\dagger, \text{ d. h. } \lambda_k = \mu_k, \quad |u_k\rangle = |v_k\rangle. \tag{3.47}$$

$$\underline{L}|w\rangle = \beta|w\rangle, \quad |w\rangle =? \quad \beta =? \tag{3.48}$$

$$\underline{L}_I = \underline{L}_e + \underline{L}_1. \tag{3.49}$$

$$(\underline{L}_e + \underline{L}_1)|w\rangle = \beta|w\rangle. \tag{3.50}$$

$$\underline{L}_1|w\rangle = \sum_k |u_k\rangle \langle u_k|\underline{L}_1|w\rangle = (\beta \underline{I} - \underline{L}_e)|w\rangle. \tag{3.51}$$

$$|w\rangle = (\beta \underline{I} - \underline{L}_e)^{-1} \sum_k |u_k\rangle \langle u_k|\underline{L}_1|w\rangle = \sum_k |u_k\rangle \frac{\langle u_k|\underline{L}_1|w\rangle}{\beta - \lambda_k}. \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
|w\rangle &= |u_n\rangle \frac{\langle u_n|\underline{L}_1|w\rangle}{\beta - \lambda_n} + \sum_{k \neq n} |u_k\rangle \frac{\langle u_k|\underline{L}_1|w\rangle}{\beta - \lambda_k} \\
&= |u_n\rangle + \sum_{k \neq n} |u_k\rangle \frac{\langle u_k|\underline{L}_1|w\rangle}{\beta - \lambda_k}, \\
\beta &= \lambda_n + \langle u_n|\underline{L}_1|w\rangle.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$|w_0\rangle = |u_n\rangle, \quad \beta^{(0)} = \lambda_n.$$

$$|w_{\nu+1}\rangle = |u_n\rangle + \sum_{k \neq n} |u_k\rangle \frac{\langle u_k | \underline{L}_1 | w_\nu \rangle}{\beta^{(\nu)} - \lambda_k}, \quad \beta^{(\nu+1)} = \lambda_n + \langle u_n | \underline{L}_1 | w_\nu \rangle. \quad (3.54)$$

$$|w_1\rangle = |u_n\rangle + \sum_{k \neq n} |u_k\rangle \frac{\langle u_k | \underline{L}_1 | u_n \rangle}{\lambda_n - \lambda_k}, \quad \beta^{(1)} = \lambda_n + \langle u_n | \underline{L}_1 | u_n \rangle. \quad (3.55)$$

$$|\varphi\rangle = |u_n\rangle + \varepsilon |g\rangle, \quad (3.56)$$

$$\frac{\langle \varphi | \underline{L}_1 | \varphi \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle} = \lambda_n + O(\varepsilon^2). \quad (3.57)$$

### 3.3.1 Beispiel zur Störungsrechnung

$$\underline{L}: \quad L = -d^2/dx^2 = L^\dagger, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger: \quad u(0) = u(1) = 0.$$

$$u_k(x) = \sqrt{2} \sin(x\sqrt{\lambda_k}) = \sqrt{2} \sin(k\pi x),$$

$$\lambda_k = (k\pi)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.58)$$

$$\underline{L}_I: \quad L = -d^2/dx^2, \quad \mathcal{L}_I: \quad w(0) + \alpha w'(0) = 0, \quad w(1) = 0. \quad (3.59)$$

$$\langle u_k | \underline{L}_1 | w \rangle = K [u_k^*(x), w(x)] \Big|_{x=0}^{x=1} = \left( w \frac{du_k^*}{dx} - u_k^* \frac{dw}{dx} \right) \Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= -k\pi\sqrt{2}w(0) = k\pi\alpha\sqrt{2}w'(0). \quad (3.60)$$

$$\langle u_k | \underline{L}_1 | u_n \rangle = k\pi\alpha\sqrt{2}u_n'(0) = 2\pi^2 kn\alpha, \quad (3.61)$$

$$\langle u_n | \underline{L}_1 | u_n \rangle = 2\pi^2 n^2 \alpha.$$

$$|w_1\rangle = |u_n\rangle + \sum_{\substack{k \neq n \\ k=1}}^{\infty} |u_k\rangle \frac{2\alpha nk}{n^2 - k^2}, \quad \beta^{(1)} = n^2\pi^2(1 + 2\alpha). \quad (3.62)$$

### 3.3.2 Näherungen für Eigenwerte

$$\underline{L}: \quad L = -d^2/dx^2, \quad \mathcal{L}: \quad u(0) = u(1) = 0, \quad \underline{L} = \underline{L}^\dagger, \quad (3.63)$$

$$\frac{\int_0^1 \varphi^*(x) \left( -\frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) dx}{\int_0^1 |\varphi(x)|^2 dx} = \frac{\int_0^1 x(1-x)2dx}{\int_0^1 x^2(1-x)^2 dx} = 10 = \lambda + O(\varepsilon^2). \quad (3.64)$$

## 3.4 Beziehung zur Schrödingergleichung

$$Lu(x) = \lambda u(x), \quad \mathcal{L}: \text{homogene RB}, \quad L = -\frac{1}{r} \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) + q \quad (3.65)$$

$$\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} + [\lambda - Q(\xi)]y(\xi) = 0 \quad (3.66)$$

$$u(x) = \frac{y(x)}{\sqrt[4]{rp}}, \quad \xi = \int \sqrt{\frac{r}{p}} dx, \quad Q = \frac{1}{\sqrt[4]{rp}} \frac{d^2 \sqrt[4]{rp}}{d\xi^2} + q. \quad (3.67)$$

$$y(\xi) = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{\lambda - Q(\xi)}} \exp \left[ \pm j \int_{\mp\infty}^{\xi} \sqrt{\lambda - Q(z)} dz \right]. \quad (3.68)$$

$$y(\xi) = \exp[\pm j\xi\sqrt{\lambda}]. \quad (3.69)$$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{rp}} \exp \left[ \pm j\sqrt{\lambda} \int \sqrt{\frac{r}{p}} dx \right]. \quad (3.70)$$

## Anmerkung

$$|u\rangle = \lambda \underline{G}|u\rangle, \quad u(x) = \lambda \int_a^b G(x, x_0) u(x_0) r(x_0) dx_0. \quad (3.71)$$

## 3.5 Die Greensche Funktion $G_\lambda(x, x_0)$

$$\begin{aligned} \underline{L}|u_k\rangle &= \lambda_k |u_k\rangle, & \underline{L} &: L, \mathcal{L} \text{ (homogene RB)}, \\ \underline{L}^\dagger |v_l\rangle &= \mu_l |v_l\rangle, & \underline{L}^\dagger &: L^\dagger, \mathcal{L}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\underline{G}_\lambda = (\underline{L} - \lambda \underline{I})^{-1}, \quad \text{d. h.} \quad (\underline{L} - \lambda \underline{I}) \underline{G}_\lambda = \underline{I}, \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \underline{G}_\lambda &= (\underline{L} - \lambda \underline{I})^{-1} = \sum_k^f \frac{|u_k\rangle dk \langle v_k|}{\lambda_k - \lambda} = - \sum_k \frac{|u_k\rangle \langle v_k|}{\lambda - \lambda_k} - \int \frac{|u_k\rangle dk \langle v_k|}{\lambda - \lambda(k)}, \\ G_\lambda(x, x_0) &= \langle x | \underline{G}_\lambda | x_0 \rangle = - \sum_k \frac{u_k(x) v_k^*(x_0)}{\lambda - \lambda_k} - \int \frac{u(k, x) v^*(k, x_0)}{\lambda - \lambda(k)} dk. \end{aligned} \quad (3.74)$$

1. Bei  $\lambda = \lambda_k$  hat  $G_\lambda$  einen Pol erster Ordnung. Aus der Lage der Pole erster Ordnung von  $G_\lambda$  erhält man das diskrete Spektrum des Operators  $\underline{L}$  (und damit wegen  $\mu_k = \lambda_k^*$  auch das von  $\underline{L}^\dagger$ ).
2. Die Residuen von  $G_\lambda$  bei  $\lambda = \lambda_k$  haben den Wert  $-u_k(x)v_k^*(x_0)$ ; daraus kann man die Eigenfunktionen von  $\underline{L}$  und  $\underline{L}^\dagger$  ablesen.
3. Das kontinuierliche Spektrum  $\lambda = \lambda(k)$  (falls vorhanden) führt zu einem Verzweigungsschnitt von  $G_\lambda$ . Ist  $\underline{L} = \underline{L}^\dagger$ , so sind die Eigenwerte reell und der Verzweigungsschnitt liegt auf der reellen Achse der komplexen  $\lambda$ -Ebene.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint \underline{G}_\lambda d\lambda &= - \sum_k |u_k\rangle \langle v_k| = \int |u_k\rangle dk \langle v_k| - \underline{I}, \\ \frac{1}{2\pi j} \oint G_\lambda(x, x_0) d\lambda &= - \sum_k u_k(x) v_k^*(x_0) = \int u(k, x) v^*(k, x_0) dk - \frac{\delta(x-x_0)}{r(x)} \\ &= \int u(k, x) v^*(k, x_0) dk - \frac{\delta(x-x_0)}{r(x_0)}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

### 3.5.1 Beispiel zum diskreten Spektrum

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - \lambda\right) G_\lambda(x, x_0) = \delta(x - x_0), \quad G_\lambda(0, x_0) = G_\lambda(1, x_0) = 0, \quad G_\lambda \text{ aus } \mathcal{L}. \quad (3.76)$$

$$h_1(x) = \sin(x\sqrt{\lambda}), \quad h_2(x) = \sin[(1-x)\sqrt{\lambda}]$$

$$K(h_1, h_2)|_{x=x_0} = (h_2 h_1' - h_1 h_2')|_{x=x_0} = \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}$$

$$\begin{aligned} G_\lambda(x, x_0) &= \frac{\sin(x\sqrt{\lambda}) \sin[(1-x_0)\sqrt{\lambda}] H(x_0 - x)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \\ &\quad + \frac{\sin(x_0\sqrt{\lambda}) \sin[(1-x)\sqrt{\lambda}] H(x - x_0)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}, \quad 0 \leq x_0 \leq 1. \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} G_\lambda &= \frac{\sin(x\sqrt{\lambda}) [\sin \sqrt{\lambda} \cos(x_0\sqrt{\lambda}) - \cos \sqrt{\lambda} \sin(x_0\sqrt{\lambda})] H(x_0 - x)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \\ &\quad + \frac{\sin(x_0\sqrt{\lambda}) [\sin \sqrt{\lambda} \cos(x\sqrt{\lambda}) - \cos \sqrt{\lambda} \sin(x\sqrt{\lambda})] H(x - x_0)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
G_\lambda &= \text{regulärer Anteil} - \frac{\sin(x\sqrt{\lambda}) \sin(x_0\sqrt{\lambda}) \cos \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \\
&= \text{r.A.} - \frac{\sin(x\sqrt{\lambda}) \sin(x_0\sqrt{\lambda}) \cos \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} \sin[(\sqrt{\lambda} - k\pi) + k\pi]} = \text{r.A.} - \frac{\sin(x\sqrt{\lambda}) \sin(x_0\sqrt{\lambda}) \cos \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} - k\pi) \cos(k\pi)} \\
&= \text{in Polnähe} \approx \text{r.A.} - \frac{\sin(k\pi x) \sin(k\pi x_0)}{k\pi \sin(\sqrt{\lambda} - k\pi)} = \text{r.A.} - \frac{\sin(k\pi x) \sin(k\pi x_0)}{k\pi(\sqrt{\lambda} - k\pi)} \\
&= \text{r.A.} - \frac{\sin(k\pi x) \sin(k\pi x_0)(\sqrt{\lambda} + k\pi)}{k\pi(\lambda - k^2\pi^2)} = \text{r.A.} - \frac{2 \sin(k\pi x) \sin(k\pi x_0)}{\lambda - k^2\pi^2}. \\
-\frac{1}{2\pi j} \oint G_\lambda(x, x_0) d\lambda &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \sin(k\pi x) \sin(k\pi x_0) = \delta(x - x_0), \tag{3.78}
\end{aligned}$$

$$u_k(x) = v_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x). \tag{3.79}$$

### 3.5.2 Beispiel zum kontinuierlichen Spektrum

$$\begin{aligned}
\underline{L} = \underline{L}^\dagger, \quad L = -d^2/dx^2, \quad \mathcal{L}: \quad u(0) = 0, \quad \int_0^\infty |u|^2 dx < M. \\
\left(-\frac{d^2}{dx^2} - \lambda\right) G_\lambda(x, x_0) = \delta(x - x_0), \quad G_\lambda(0, x_0) = 0, \quad G_\lambda(\infty, x_0) = 0. \tag{3.80}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1(x) &= \sin(x\sqrt{\lambda}), \\
h_2(x) &= \exp(jx\sqrt{\lambda}), \quad K(h_1, h_2)|_{x=x_0} = (h_2 h_1' - h_1 h_2')|_{x=x_0} = \sqrt{\lambda}. \tag{3.81}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_\lambda(x, x_0) &= \frac{\sin(x\sqrt{\lambda}) e^{jx_0\sqrt{\lambda}} H(x_0 - x) + \sin(x_0\sqrt{\lambda}) e^{jx\sqrt{\lambda}} H(x - x_0)}{\sqrt{\lambda}} \\
&= \frac{e^{j(x+x_0)\sqrt{\lambda}}}{2j\sqrt{\lambda}} - \frac{e^{j(x_0-x)\sqrt{\lambda}}}{2j\sqrt{\lambda}} H(x_0 - x) - \frac{e^{j(x-x_0)\sqrt{\lambda}}}{2j\sqrt{\lambda}} H(x - x_0). \tag{3.82}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon \quad \text{für} \quad w_1(\lambda) = \sqrt{R} e^{j\varepsilon/2} \dots - \sqrt{R} e^{-j\varepsilon/2}, \tag{3.83}$$

$$2\pi + \varepsilon < \varphi < 4\pi - \varepsilon \quad \text{für} \quad w_2(\lambda) = -\sqrt{R} e^{j\varepsilon/2} \dots \sqrt{R} e^{-j\varepsilon/2}. \tag{3.84}$$

$$\frac{1}{2\pi j} \oint G_\lambda(x, x_0) d\lambda = 0 = \int u(k, x) v^*(k, x_0) dk - \delta(x - x_0). \tag{3.85}$$

$$0 = \int_A^B G_\lambda(x, x_0) d\lambda + \int_C^D G_\lambda(x, x_0) d\lambda. \tag{3.86}$$

$$G_\lambda^{(+)}(x, x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} G_\lambda(x, x_0)|_{\lambda=R+jr}, \quad R \geq 0, \quad \text{oberes Ufer}, \tag{3.87}$$

$$G_\lambda^{(-)}(x, x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} G_\lambda(x, x_0)|_{\lambda=R-jr}, \quad R \geq 0, \quad \text{unteres Ufer}. \tag{3.88}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi j} \oint G_\lambda(x, x_0) d\lambda = \frac{1}{2\pi j} \int_0^\infty [G_\lambda^{(+)}(x, x_0) - G_\lambda^{(-)}(x, x_0)] dR. \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned}
G_\lambda^{(+)}(x, x_0) &= \frac{\sin(x\sqrt{R}) e^{jx_0\sqrt{R}} H(x_0 - x) + \sin(x_0\sqrt{R}) e^{jx\sqrt{R}} H(x - x_0)}{\sqrt{R}}, \\
G_\lambda^{(-)}(x, x_0) &= \frac{\sin(-x\sqrt{R}) e^{-jx_0\sqrt{R}} H(x_0 - x) + \sin(-x_0\sqrt{R}) e^{-jx\sqrt{R}} H(x - x_0)}{(-\sqrt{R})}. \tag{3.90}
\end{aligned}$$

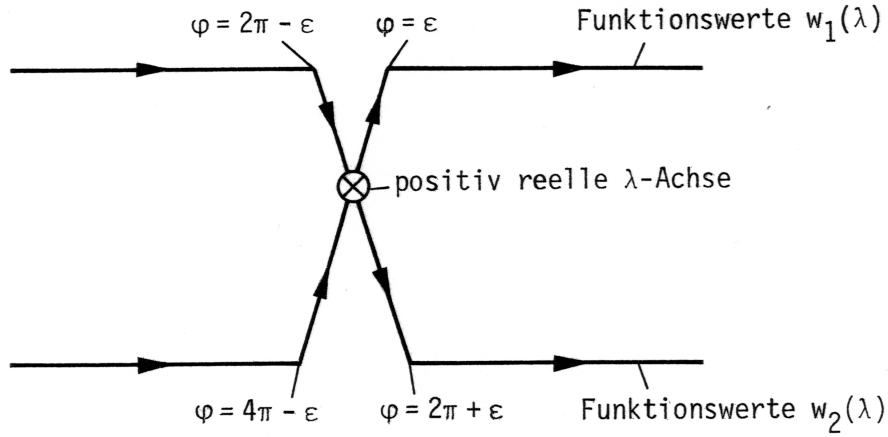


Abbildung 3.5: Die beiden Blätter der komplexen  $\lambda$ -Ebene, auf denen jeweils die Funktionswerte von  $w = \sqrt{\lambda}$  aufgetragen sind; für  $\lambda$  ist  $\lambda = R \exp(j\varphi)$  gesetzt

$$\frac{1}{2\pi j} \left[ G_\lambda^{(+)}(x, x_0) - G_\lambda^{(-)}(x, x_0) \right] = \frac{1}{\pi\sqrt{R}} \sin(x\sqrt{R}) \sin(x_0\sqrt{R}), \quad (3.91)$$

$$R = k^2$$

$$0 = \frac{1}{2\pi j} \oint G_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx_0) dk. \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(kx) \sin(kx_0) dk \\ &= - \int_0^\infty \left[ e^{2\pi j\kappa(x+x_0)} + e^{-2\pi j\kappa(x+x_0)} - e^{2\pi j\kappa(x-x_0)} - e^{-2\pi j\kappa(x-x_0)} \right] d\kappa \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi j\kappa(x+x_0)} d\kappa + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi j\kappa(x-x_0)} d\kappa \\ &= \delta(x-x_0) - \delta(x+x_0). \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\delta(x-x_0) = \delta(x+x_0) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(kx) \sin(kx_0) dk. \quad (3.94)$$

$$g(x) = g(-x) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(kx) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_0) \sin(kx_0) dx_0 \right] dk. \quad (3.95)$$

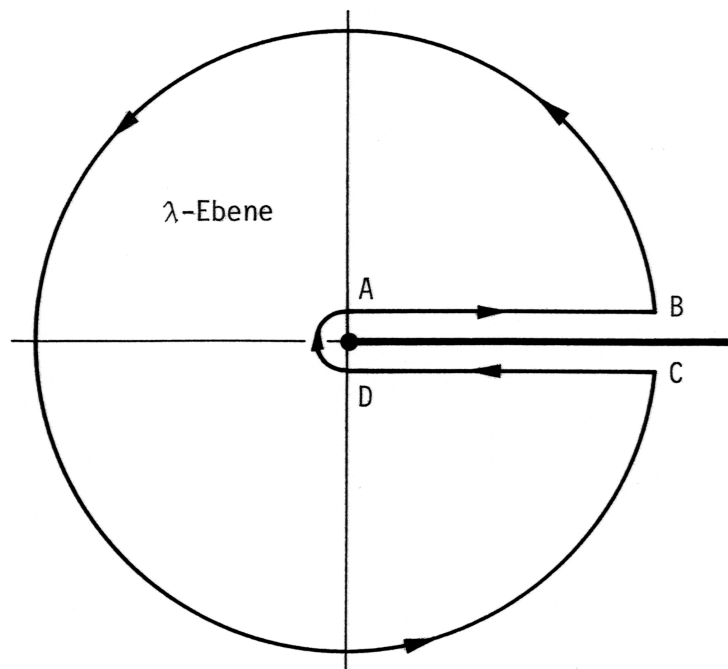


Abbildung 3.6: Integrationsweg für  $G_\lambda$  von Gl. (3.85) in der komplexen  $\lambda$ -Ebene. Er liegt im ersten Blatt der  $\lambda$ -Ebene mit  $\varepsilon < \arg \lambda < 2\pi - \varepsilon$

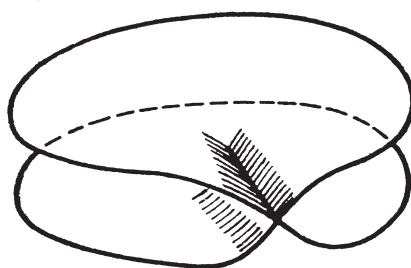


Abbildung 3.7: Die beiden Blätter der komplexen  $\lambda$ -Ebene, auf denen jeweils die Funktionswerte von  $w = \sqrt{\lambda}$  aufgetragen sind.

# Kapitel 4

## Partielle Differentialgleichungen

### 4.1 Deltafunktionen in mehreren Dimensionen

$$D = \det \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} \quad (4.1)$$

$$\int d\tau = \iiint \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n = \iiint \dots \int |D| d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \quad (4.2)$$

Fall 1: Im betrachteten Punkt gilt  $D \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \delta(x_1 - x_{10}) \delta(x_2 - x_{20}) \dots \delta(x_n - x_{n0}) &= \delta(x_i - x_{i0}) \\ &= \frac{1}{|D|} \delta(\xi_1 - \xi_{10}) \delta(\xi_2 - \xi_{20}) \dots \delta(\xi_n - \xi_{n0}) = \frac{1}{|D|} \delta(\xi_i - \xi_{i0}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Fall 2: Im betrachteten Punkt ist  $D = 0$ .

$$D_k = \iiint \dots \int D d\xi_{k+1} d\xi_{k+2} \dots d\xi_n. \quad (4.4)$$

$$\delta(x_i - x_{i0}) = \frac{1}{|D_k|} \delta(\xi_1 - \xi_{10}) \delta(\xi_2 - \xi_{20}) \dots \delta(\xi_k - \xi_{k0}). \quad (4.5)$$

#### 4.1.1 Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi, & z &= z \\ D &= \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho, & dV &= \rho d\rho d\varphi dz. \end{aligned} \quad (4.6)$$

#### 4.1.2 Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, & y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, & z &= r \cos \vartheta \\ D &= \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \vartheta, & dV &= r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

### 4.1.3 Die $\delta$ -Funktion in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) &= \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \delta(r - r_0)\delta(\vartheta - \vartheta_0)\delta(\varphi - \varphi_0).\end{aligned}\quad (4.8)$$

### 4.1.4 Beispiel für eine ignorable Koordinate

$$\begin{aligned}D_k &= \int_0^{2\pi} r^2 \sin \vartheta d\varphi = 2\pi r^2 \sin \vartheta \\ \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0) &= \frac{\delta(r - r_0)\delta(\vartheta)}{2\pi r^2 \sin \vartheta}, \quad z_0 > 0, \\ \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0) &= \frac{\delta(r - r_0)\delta(\vartheta - \pi)}{2\pi r^2 \sin \vartheta}, \quad z_0 < 0.\end{aligned}\quad (4.9)$$

### 4.1.5 Beispiel für zwei ignorable Koordinaten

$$\begin{aligned}D_k &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta = 4\pi r^2, \\ \delta(\vec{r}) &= \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}.\end{aligned}\quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}\int \delta(\vec{r}) dV &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z) dx dy dz = 1 \\ &= \int_{0-}^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} r^2 \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \int_{0-}^{\infty} \delta(r) dr = 1.\end{aligned}$$

## 4.2 Lineare Operatoren und Randbedingungen

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |x_i\rangle d\tau \langle x_i| &= \underline{1} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1, x_2, \dots, x_n\rangle dx_1 dx_2 \dots dx_n \langle x_1, x_2, \dots, x_n|,\end{aligned}\quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}\langle x_i | x_{i0} \rangle &= \delta(x_i - x_{i0}) \\ &= \delta(x_1 - x_{10})\delta(x_2 - x_{20}) \dots \delta(x_n - x_{n0}).\end{aligned}\quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
|g\rangle &= \underline{L}|u\rangle, \\
\langle x_i|g\rangle &= g(x_i) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= \langle x_i|\underline{L}|u\rangle = Lu(x_i) = Lu(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= \int \langle x_i|\underline{L}|x'_i\rangle d\tau' \langle x'_i|u\rangle = \int L(x_i, x'_i)u(x'_i)d\tau', \\
L(x_i, x'_i) &= \langle x_i|\underline{L}|x'_i\rangle = L(x_1, x_2, \dots, x_n; x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \\
\langle g|x_i\rangle &= \langle x_i|g\rangle^* = g^*(x_i).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
\int \nabla \cdot \vec{A} dV &= \int \operatorname{div} \vec{A} dV = \oint \vec{A} \cdot \vec{e} dF, \\
\int dV \nabla \dots &= \oint dF \vec{e} \dots
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
\int \partial_i A_i d\tau &= \oint A_i e_i d\sigma, \\
\int d\tau \partial_i \dots &= \oint d\sigma e_i \dots
\end{aligned} \tag{4.15}$$

1. Den formalen Operator  $L$ , der auf Komponenten  $u(x_i) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  von  $|u\rangle$  operiert.
2. Den Operatorbereich  $\mathcal{L}$ , wodurch auf einer geschlossenen  $(n-1)$ -dimensionalen Hyperfläche für  $u(x_i)$  bestimmte Randbedingungen festgelegt werden.

1. Randbedingungen 1. Art (Dirichlet-Bedingungen): Dabei ist  $u(x_i)$  auf der Hyperfläche gegeben.
2. Randbedingungen 2. Art (Neumann-Bedingungen): Dabei ist die Normalenableitung von  $u$  auf der Hyperfläche gegeben, also  $e_i \partial_i u$ ; für diesen Ausdruck verwendet man oft auch die symbolische Schreibweise  $\partial u / \partial e$  (siehe auch den folgenden Kommentar).
3. Randbedingungen 3. Art: In diesem Fall ist auf der Hyperfläche eine Linearkombination  $u + \alpha \partial u / \partial e$  gegeben.
4. Anfangsbedingungen (Cauchy-Bedingungen): Identifiziert man eine der Koordinaten (z. B.  $x_n$ ) mit der Zeitvariablen, so kann auf einer Hyperebene  $x_n = \text{const}$  die Funktion  $u(x_i)$  und  $\partial u / \partial x_n$  gegeben sein.

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = e_i \partial_i u = \frac{\partial u}{\partial e}.$$

$$\partial u / \partial e = \vec{e} \cdot \operatorname{grad} u.$$

1.  $L = \nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$  im dreidimensionalen Raum ist ein sogenannter elliptischer Operator. Die Eindeutigkeit der Lösungen verlangt Randbedingungen erster, zweiter oder dritter Art.
2.  $L = \nabla^2 - a^2 \partial / \partial t = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2 - a^2 \partial / \partial t$  (der Operator der Wärmeleitungsgleichung) ist ein sogenannter parabolischer Operator. Die Lösungen sind eindeutig bestimmt, wenn für  $t = t_1$  an allen Raumpunkten  $(x, y, z)$  eines dreidimensionalen Bereichs die Größe  $u(x, y, z, t_1)$  gegeben ist, und wenn ferner zu allen Zeiten auf der Hüllfläche dieses dreidimensionalen Bereichs Randbedingungen erster, zweiter oder dritter Art vorgeschrieben sind.
3.  $L = \nabla^2 - (1/c^2) \partial^2 / \partial t^2$  (der Operator der Wellengleichung) ist ein hyperbolischer Operator. Für eindeutige Lösungen muß zu einem Zeitpunkt  $t = t_1$  an allen Raumpunkten  $(x, y, z)$  eines dreidimensionalen Bereichs sowohl  $u$  als auch  $\partial u / \partial t$  vorgegeben sein, ferner muß zu allen Zeiten auf der Hüllfläche dieses dreidimensionalen Bereichs eine Randbedingung erster, zweiter oder dritter Art vorgeschrieben sein.

### 4.3 Adjungierter Operator. Operatoren im erweiterten Sinn

$$\begin{aligned}
\langle v|\underline{L}|u\rangle &= \langle u|\underline{L}^\dagger|v\rangle^* + \int \partial_i K_i(v^*, u) d\tau \\
&= \langle u|\underline{L}^\dagger|v\rangle^* + \oint e_i K_i(v^*, u) d\sigma, \\
\text{mit } \int \partial_i K_i(v^*, u) d\tau &= \oint e_i K_i(v^*, u) d\sigma = 0.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

1.  $\underline{L}$  ist gegeben durch den formalen Operator  $L$ , der auf Funktionen  $u(x_i)$  operiert (die Komponenten von  $|u\rangle$ ); der Operatorbereich  $\mathcal{L}$  wird so gewählt, daß für  $u(x_i)$  homogene Randbedingungen gelten.
2.  $\underline{L}^\dagger$  ist definiert durch den formal adjungierten Operator  $L^\dagger$ , der auf Funktionen  $v(x_i)$  operiert (die Komponenten von  $|v\rangle$ ); der adjungierte Operatorbereich  $\mathcal{L}^\dagger$  ist so zu wählen, daß mit den Funktionen  $u(x_i)$  aus  $\mathcal{L}$  und den Funktionen  $v(x_i)$  aus  $\mathcal{L}^\dagger$  gerade die Bedingung von Gl. (4.16) für das Konjunkt erfüllt ist.
3. Der Operator  $\underline{L}_I$  ist gegeben (siehe früher vor Gl. (2.29)) durch den formalen Operator  $L$ , der aber jetzt auf Funktionen  $w(x_i)$  operiert (auf die Komponenten von  $|w\rangle$ ); der Operatorbereich  $\mathcal{L}_I$  ist so gewählt, daß die Funktionen  $w(x_i)$  inhomogene Randbedingungen erfüllen, die aber von derselben Struktur sind, wie die homogenen Randbedingungen für die Funktionen  $u(x_i)$  aus  $\mathcal{L}$ .

$$\begin{aligned}
\langle v|\underline{L}_I|w\rangle &= \langle w|\underline{L}^\dagger|v\rangle^* + \int \partial_i K_i(v^*, w) d\tau \\
&= \langle w|\underline{L}^\dagger|v\rangle^* + \oint e_i K_i(v^*, w) d\sigma, \\
\text{mit } \int \partial_i K_i(v^*, w) d\tau &= \oint e_i K_i(v^*, w) d\sigma \neq 0.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\langle w|\underline{L}^\dagger|v\rangle^* = \langle v|\underline{L}_e|w\rangle. \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
\langle v|\underline{L}_e|w\rangle &= \langle v|\underline{L}_I|w\rangle - \int_{(+)} \partial_i K_i(v^*, w) d\tau \\
&= \langle v|\underline{L}_I|w\rangle - \oint e_i K_i(v^*, w) d\sigma \\
&= \langle v|\underline{L}_I|w\rangle - \langle v|\underline{L}_1|w\rangle = \langle v|\underline{L}_I|w\rangle + \langle v|s\rangle, \\
\langle v|\underline{L}_1|w\rangle &= -\langle v|s\rangle \\
&= \int_{(+)} \partial_i K_i(\langle v|x_i\rangle, \langle x_i|w\rangle) d\tau \\
&= \oint e_i K_i(\langle v|x_i\rangle, \langle x_i|w\rangle) d\sigma.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

#### 4.3.1 Beispiel 1: Der Konjunktvektor und der Operator $L^\dagger$

$$\underline{L}: \quad L = p(x_i) \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \mathcal{L}: \quad u(0, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq 1. \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
\int v^* p \frac{\partial u}{\partial x_1} d\tau &= \iiint \dots \int dx_2 dx_3 \dots dx_n \int_0^1 v^* p \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 \\
&= \iiint \dots \int dx_2 dx_3 \dots dx_n \left\{ v^* p u \Big|_{x_1=0}^{x_1=1} - \int_0^1 u \frac{\partial}{\partial x_1} (p v^*) dx_1 \right\} \\
&= \int u \left[ -\frac{\partial}{\partial x_1} (p^* v) \right]^* d\tau + \int \frac{\partial}{\partial x_1} (p v^* u) d\tau.
\end{aligned}$$

$$K_i \hat{=} (pv^*u, 0, 0, \dots, 0), \quad (n \text{ Komponenten}). \quad (4.21)$$

$$\iint \dots \int dx_2 dx_3 \dots dx_n [pv^*u|_{x_1=1} - pv^*u|_{x_1=0}] = 0 \quad (4.22)$$

$$\underline{L}^\dagger : L^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x_1}[p^*(x_i) \dots], \quad \mathcal{L}^\dagger : v(1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0. \quad (4.23)$$

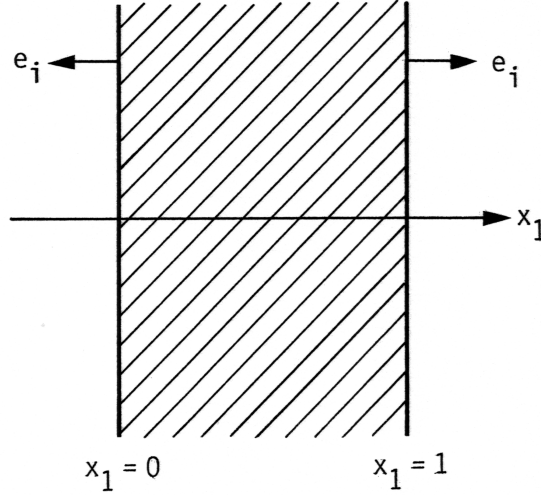


Abbildung 4.1: Schraffiert ist der  $n$ -dimensionale Bereich zwischen den beiden Hyperebenen  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = 1$ . Der Normalenvektor  $e_i$  ist nach außen orientiert

$$\oint e_i K_i d\sigma = 0 = \int d\sigma [-pv^*u|_{x_1=0} + pv^*u|_{x_1=1}].$$

$L$	$L^\dagger$	$K_i(v^*, u)$
$p(x_i) \frac{\partial}{\partial x_1}$	$-\frac{\partial}{\partial x_1}[p^*(x_i) \dots]$	$(pv^*u, 0, 0, \dots, 0)$
$p(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$	$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}[p^*(x_i) \dots]$	$\left( pv^* \frac{\partial u}{\partial x_2}, -u \frac{\partial(v^*p)}{\partial x_1}, 0, 0, \dots, 0 \right)$
$p(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$	$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}[p^*(x_i) \dots]$	$\left( pv^* \frac{\partial u}{\partial x_1} - u \frac{\partial(v^*p)}{\partial x_1}, 0, 0, \dots, 0 \right)$

### 4.3.2 Beispiel 2: Der Laplace-Operator

$$\underline{L} : L = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \mathcal{L} : u = 0 \text{ am Rand (homogene RB 1. Art)}. \quad (4.25)$$

$$\vec{K}(v^*, u) = v^* \text{grad}u - u \text{grad}v^* \hat{=} \left( v^* \frac{\partial u}{\partial x_1} - u \frac{\partial v^*}{\partial x_1}, v^* \frac{\partial u}{\partial x_2} - u \frac{\partial v^*}{\partial x_2}, v^* \frac{\partial u}{\partial x_3} - u \frac{\partial v^*}{\partial x_3} \right). \quad (4.26)$$

$$\oint \vec{e} \cdot \vec{K}(v^*, u) dF = 0 = \oint \left( v^* \frac{\partial u}{\partial e} - u \frac{\partial v^*}{\partial e} \right) dF. \quad (4.27)$$

$$\underline{L}^\dagger : L^\dagger = L = \Delta, \quad \mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L} : v = 0 \text{ am Rand}. \quad (4.28)$$



### 4.3.3 Beispiel 3: Der Operator der Wellengleichung

$$\begin{aligned}
L &= \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\
\mathcal{L} &: u(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{am Rand von } V, \\
&\quad u(\vec{x}, t)|_{t=t_1} = \frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_1} = 0 \quad \text{in allen Punkten in } V.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$K_i \hat{=} (v^* \partial_1 u - u \partial_1 v^*, v^* \partial_2 u - u \partial_2 v^*, v^* \partial_3 u - u \partial_3 v^*, -v^* \partial_t u / c^2 + u \partial_t v^* / c^2). \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
\int \partial_i K_i(v^*, u) d\tau &= \iiint \partial_i K_i(v^*, u) dV dt = 0 \\
&= \iiint [\partial_1(v^* \partial_1 u - u \partial_1 v^*) + \partial_2(v^* \partial_2 u - u \partial_2 v^*) + \partial_3(v^* \partial_3 u - u \partial_3 v^*) \\
&\quad + \frac{1}{c^2} \partial_t(-v^* \partial_t u + u \partial_t v^*)] dV dt \\
&= \iiint \left[ \operatorname{div}(v^* \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v^*) + \frac{1}{c^2} \partial_t(-v^* \partial_t u + u \partial_t v^*) \right] dV dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \oint \left( v^* \frac{\partial u}{\partial e} - u \frac{\partial v^*}{\partial e} \right) dF + \frac{1}{c^2} \int \left( -v^* \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial v^*}{\partial t} \right) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} dV.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
L^\dagger &= \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\
\mathcal{L}^\dagger &: v(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{am Rand von } V, \\
&\quad v(\vec{x}, t)|_{t=t_2} = \frac{\partial v(\vec{x}, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_2} = 0 \quad \text{in allen Punkten in } V.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

### 4.3.4 Beispiel 4: Der Operator der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}
L &= \Delta - a^2 \frac{\partial}{\partial t}, \\
\mathcal{L} &: u(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{am Rand von } V, \\
&\quad u(\vec{x}, t_1) = 0 \quad \text{in allen Punkten in } V.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$K_i \hat{=} (v^* \partial_1 u - u \partial_1 v^*, v^* \partial_2 u - u \partial_2 v^*, v^* \partial_3 u - u \partial_3 v^*, -a^2 v^* u). \tag{4.34}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -v^* \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial v^*}{\partial t} \right) \quad \text{ersetzen durch} \quad \frac{\partial}{\partial t} (-a^2 v^* u). \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
\int \partial_i K_i(v^*, u) d\tau &= \iiint \partial_i K_i(v^*, u) dV dt = 0 \\
&= \iiint [\operatorname{div}(v^* \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v^*) + \partial_t(-a^2 v^* u)] dV dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \oint \left( v^* \frac{\partial u}{\partial e} - u \frac{\partial v^*}{\partial e} \right) dF + \int (-a^2 v^* u) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} dV.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
L^\dagger &= \Delta + a^2 \frac{\partial}{\partial t}, \\
\mathcal{L}^\dagger &: v(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{am Rand von } V, \\
&\quad v(\vec{x}, t_2) = 0 \quad \text{in allen Punkten in } V.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

## 4.4 Die Lösung von inhomogenen Problemen zu inhomogenen Randbedingungen

$$\underline{L}_I|w\rangle = |g\rangle, \quad \text{d. h.} \quad Lw(x_i) = g(x_i) \quad \text{mit } w(x_i) \text{ aus } \mathcal{L}_I. \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \underline{L}|u\rangle &= |g\rangle, \quad \text{d. h.} \quad Lu(x_i) = g(x_i) \quad \text{mit } u(x_i) \text{ aus } \mathcal{L}, \\ |u\rangle &= \underline{G}|g\rangle, \quad \text{mit} \quad \underline{G}\underline{L} = \underline{L}\underline{G} = \underline{L}^\dagger \underline{G}^\dagger = \underline{G}^\dagger \underline{L}^\dagger = \underline{I}, \\ u(x_i) &= \int G(x_i, x_{i0})g(x_{i0})d\tau_0 = \int [G^\dagger(x_{i0}, x_i)]^* g(x_{i0})d\tau_0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \underline{L}G(x_i, x_{i0}) &= \delta(x_i - x_{i0}), & G(x_i, x_{i0}) & \text{ bez\u00fcglich } x_i \text{ aus } \mathcal{L}, \\ \underline{L}^\dagger G^\dagger(x_i, x_{i0}) &= \delta(x_i - x_{i0}), & G^\dagger(x_i, x_{i0}) & \text{ bez\u00fcglich } x_i \text{ aus } \mathcal{L}^\dagger. \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} w(x_i) = \langle x_i|w\rangle &= \langle x_i|\underline{G}|g\rangle - \langle x_i|\underline{G}\underline{L}_1|w\rangle \\ &= \langle x_i|\underline{G}|g\rangle + \langle x_i|\underline{G}|s\rangle. \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \langle x_i|\underline{G}\underline{L}_1|w\rangle &= -\langle x_i|\underline{G}|s\rangle \\ &= \int_{(+)} \partial_{i0} K_i(\langle x_i|\underline{G}|x_{i0}\rangle, \langle x_{i0}|w\rangle) d\tau_0 \\ &= \oint e_{i0} K_i(\langle x_i|\underline{G}|x_{i0}\rangle, \langle x_{i0}|w\rangle) d\sigma_0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} w(x_i) &= \int \langle x_i|\underline{G}|x_{i0}\rangle d\tau_0 \langle x_{i0}|g\rangle - \int \langle x_i|\underline{G}|x_{i0}\rangle d\tau_0 \langle x_{i0}|\underline{L}_1|w\rangle \\ &= \int \langle x_i|\underline{G}|x_{i0}\rangle d\tau_0 \langle x_{i0}|g\rangle + \int \langle x_i|\underline{G}|x_{i0}\rangle d\tau_0 \langle x_{i0}|s\rangle \\ &= \int_{(+)} G(x_i, x_{i0})[g(x_{i0}) - L_1 w(x_{i0})] d\tau_0 \\ &= \int_{(+)} G(x_i, x_{i0})[g(x_{i0}) + s(x_{i0})] d\tau_0 \\ &= \int G(x_i, x_{i0})g(x_{i0})d\tau_0 - \int_{(+)} \partial_{i0} K_i[G(x_i, x_{i0}), w(x_{i0})] d\tau_0 \\ &= \int G(x_i, x_{i0})g(x_{i0})d\tau_0 - \oint e_{i0} K_i[G(x_i, x_{i0}), w(x_{i0})] d\sigma_0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

### 4.4.1 Beispiel 1: L\u00f6sung der Poisson-Gleichung

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2)w(\vec{x}) = g(\vec{x}), \quad w(\vec{x}) \neq 0 \quad \text{am Rand.} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \underline{L}_I: \quad L &= \Delta, & \mathcal{L}_I: \quad w(\vec{x}) &\neq 0 \quad \text{am Rand,} \\ \underline{L}: \quad L &= \Delta, & \mathcal{L}: \quad u(\vec{x}) &= 0 \quad \text{am Rand,} \\ \underline{L}^\dagger: \quad L^\dagger &= \Delta, & \mathcal{L}^\dagger: \quad v(\vec{x}) &= 0 \quad \text{am Rand (siehe Gl. (4.28)).} \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\Delta G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad G(\vec{x}, \vec{x}_0) \quad \text{bez\u00fcglich } \vec{x} \text{ aus } \mathcal{L} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} w(\vec{x}) &= \int G(\vec{x}, \vec{x}_0)g(\vec{x}_0)dV_0 - \oint \vec{e}_0 \cdot \vec{K}[G(\vec{x}, \vec{x}_0), w(\vec{x}_0)]dF_0 \\ &= \int G(\vec{x}, \vec{x}_0)g(\vec{x}_0)dV_0 - \oint \left[ G(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial w(\vec{x}_0)}{\partial e_0} - w(\vec{x}_0) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial e_0} \right] dF_0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \vec{e}} = \vec{e} \cdot \text{grad} w. \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, \vec{x}_0) &= G^\dagger(\vec{x}, \vec{x}_0) = G^*(\vec{x}_0, \vec{x}), \quad \text{wenn } \underline{L} = \underline{L}^\dagger, \\ \text{d. h. } G(\vec{x}, \vec{x}_0) &= G(\vec{x}_0, \vec{x}) \quad \text{wenn } G \text{ reell.} \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$w(\vec{x}) = \int G(\vec{x}, \vec{x}_0) g(\vec{x}_0) dV_0 + \oint w(\vec{x}_0) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial e_0} dF_0. \quad (4.50)$$

#### 4.4.2 Beispiel 2: Anmerkung zur Lösung der Poisson-Gleichung

$$w(\vec{x}) = \int G(\vec{x}, \vec{x}_0) g(\vec{x}_0) dV_0 - \oint G(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial w(\vec{x}_0)}{\partial e_0} dF_0. \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \int \Delta w(\vec{x}) dV &= \int g(\vec{x}) dV = \int \text{div grad} w dV \\ &= \oint \vec{e} \cdot \text{grad} w dF = \oint \frac{\partial w}{\partial \vec{e}} dF. \end{aligned}$$

#### 4.4.3 Beispiel 3: Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t). \quad (4.52)$$

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \delta(t - t_0)$$

$$\begin{aligned} w(\vec{x}, t) &= \iiint G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) g(\vec{x}_0, t_0) dV_0 dt_0 \\ &\quad - \int_0^\infty dt_0 \oint \left[ G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) \frac{\partial w(\vec{x}_0, t_0)}{\partial e_0} - w(\vec{x}_0, t_0) \frac{\partial G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0)}{\partial e_0} \right] dF_0 \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \int \left[ -G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) \frac{\partial w(\vec{x}_0, t_0)}{\partial t_0} + w(\vec{x}_0, t_0) \frac{\partial G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0)}{\partial t_0} \right] \Big|_{t_0=0}^{t_0=\infty} dV_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(\vec{x}, t) &= \int_0^\infty dt_0 \iiint_{-\infty}^{+\infty} G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) g(\vec{x}_0, t_0) dx_{10} dx_{20} dx_{30} \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, 0) \frac{\partial w(\vec{x}_0, 0)}{\partial t_0} \Big|_{t_0=0} dx_{10} dx_{20} dx_{30} \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} w(\vec{x}_0, 0) \frac{\partial G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, 0)}{\partial t_0} \Big|_{t_0=0} dx_{10} dx_{20} dx_{30}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

### 4.5 Der Produktraum

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1, \varphi_2 | \psi_1, \psi_2 \rangle &= \langle \psi_1, \psi_2 | \varphi_1, \varphi_2 \rangle^* = \langle \psi_1, \psi_2 | \varphi_1, \varphi_2 \rangle^\dagger \\ &= \langle \varphi_1 | \psi_1 \rangle \langle \varphi_2 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \varphi_1 \rangle^* \langle \psi_2 | \varphi_2 \rangle^*. \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \underline{L}_1 | \varphi_1 \rangle &= | \psi_1 \rangle \quad \text{im Raum } U_1, \\ \underline{L}_2 | \varphi_2 \rangle &= | \psi_2 \rangle \quad \text{im Raum } U_2. \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned}
\underline{L}_1|\varphi_1, \varphi_2\rangle &= |\psi_1, \varphi_2\rangle, \\
\underline{L}_2|\varphi_1, \varphi_2\rangle &= |\varphi_1, \psi_2\rangle, \\
\underline{L}_1\underline{L}_2|\varphi_1, \varphi_2\rangle &= |\psi_1, \psi_2\rangle, \\
\underline{L}_2\underline{L}_1|\varphi_1, \varphi_2\rangle &= |\psi_1, \psi_2\rangle.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

$$[\underline{L}_1, \underline{L}_2] = \underline{L}_1\underline{L}_2 - \underline{L}_2\underline{L}_1 = 0. \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
\int |x_1\rangle r_1(x_1) dx_1 \langle x_1| &= \underline{I}, & \langle x_1|x'_1\rangle &= \frac{\delta(x_1 - x'_1)}{r_1(x_1)} & \text{in } U_1, \\
\int |x_2\rangle r_2(x_2) dx_2 \langle x_2| &= \underline{I}, & \langle x_2|x'_2\rangle &= \frac{\delta(x_2 - x'_2)}{r_2(x_2)} & \text{in } U_2.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
\iint |x_1, x_2\rangle r_1(x_1) r_2(x_2) dx_1 dx_2 \langle x_1, x_2| &= \underline{I} & \text{in } U = U_1 \otimes U_2, \\
\langle x_1, x_2|x'_1, x'_2\rangle &= \frac{\delta(x_1 - x'_1)\delta(x_2 - x'_2)}{r_1(x_1)r_2(x_2)}.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
|\varphi\rangle &= \iint |x_1, x_2\rangle r_1(x_1) r_2(x_2) dx_1 dx_2 \langle x_1, x_2|\varphi\rangle \\
&= \iint |x_1, x_2\rangle \varphi(x_1, x_2) r_1(x_1) r_2(x_2) dx_1 dx_2.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_1, x_2|\underline{L}|\varphi\rangle &= L\langle x_1, x_2|\varphi\rangle = L\varphi(x_1, x_2) \\
&= \iint \langle x_1, x_2|\underline{L}|x'_1, x'_2\rangle r_1(x'_1) r_2(x'_2) dx'_1 dx'_2 \langle x'_1, x'_2|\varphi\rangle \\
&= \iint L(x_1, x_2; x'_1, x'_2) \varphi(x'_1, x'_2) r_1(x'_1) r_2(x'_2) dx'_1 dx'_2.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
L(x_1, x_2; x'_1, x'_2) &= \langle x_1, x_2|\underline{L}|x'_1, x'_2\rangle \\
&= \langle x_1, x_2|\underline{L}_1\underline{L}_2|x'_1, x'_2\rangle = \langle x_1, x_2|\underline{L}_2\underline{L}_1|x'_1, x'_2\rangle \\
&= \langle x_1|\underline{L}_1|x'_1\rangle \langle x_2|\underline{L}_2|x'_2\rangle \\
&= L_1(x_1, x'_1) L_2(x_2, x'_2).
\end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\langle x_1, x_2|\underline{L}_1\underline{L}_2|\varphi\rangle = \langle x_1, x_2|\underline{L}_2\underline{L}_1|\varphi\rangle = L_1 L_2 \varphi(x_1, x_2) = L_2 L_1 \varphi(x_1, x_2). \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
\underline{L}|u_k\rangle &= \lambda_k|u_k\rangle = (\underline{L}_1 + \underline{L}_2)|u_{k1}, u_{k2}\rangle = (\lambda_{k1} + \lambda_{k2})|u_{k1}, u_{k2}\rangle, \\
\langle x_1, x_2|u_k\rangle &= u_k(x_1, x_2) = \langle x_1, x_2|u_{k1}, u_{k2}\rangle = \langle x_1|u_{k1}\rangle \langle x_2|u_{k2}\rangle = u_{k1}(x_1) u_{k2}(x_2), \\
\langle x_1, x_2|\underline{L}_1 + \underline{L}_2|u_{k1}, u_{k2}\rangle &= (\lambda_{k1} + \lambda_{k2}) \langle x_1, x_2|u_{k1}, u_{k2}\rangle, \\
(L_1 + L_2)u_{k1}(x_1)u_{k2}(x_2) &= (\lambda_{k1} + \lambda_{k2})u_{k1}(x_1)u_{k2}(x_2).
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
\langle v_{l1}, v_{l2}|u_{k1}, u_{k2}\rangle &= \delta(l_1, k_1)\delta(l_2, k_2), \\
\sum_{k_1, k_2} |u_{k1}, u_{k2}\rangle dk_1 dk_2 \langle v_{k1}, v_{k2}| &= \sum_{l_1, l_2} |v_{l1}, v_{l2}\rangle dl_1 dl_2 \langle u_{l1}, u_{l2}| = \underline{I}.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$f(\underline{L}_1, \underline{L}_2) = \sum_{k_1, k_2} |u_{k1}, u_{k2}\rangle f(\lambda_{k1}, \lambda_{k2}) dk_1 dk_2 \langle v_{k1}, v_{k2}|, \tag{4.66}$$

$$f(\underline{L}_1^\dagger, \underline{L}_2^\dagger) = \sum_{l_1, l_2} |v_{l1}, v_{l2}\rangle f(\mu_{l1}, \mu_{l2}) dl_1 dl_2 \langle u_{l1}, u_{l2}|.$$

$$\begin{aligned}
|g\rangle &= \sum_{k_1, k_2} |u_{k1}, u_{k2}\rangle dk_1 dk_2 \langle v_{k1}, v_{k2}|g\rangle, \\
f(\underline{L}_1, \underline{L}_2)|g\rangle &= \sum_{k_1, k_2} |u_{k1}, u_{k2}\rangle f(\lambda_{k1}, \lambda_{k2}) dk_1 dk_2 \langle v_{k1}, v_{k2}|g\rangle,
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
\langle v_{k1}, v_{k2}|g\rangle &= \iint \langle v_{k1}, v_{k2}|x_{10}, x_{20}\rangle r_1(x_{10}) r_2(x_{20}) dx_{10} dx_{20} \langle x_{10}, x_{20}|g\rangle \\
&= \iint v_{k1}^*(x_{10}) v_{k2}^*(x_{20}) g(x_{10}, x_{20}) r_1(x_{10}) r_2(x_{20}) dx_{10} dx_{20}.
\end{aligned}$$

$$f(L_1, L_2)g(x_1, x_2) = f(L_1, L_2) \iint \delta(x_{10} - x_1)\delta(x_{20} - x_2)g(x_{10}, x_{20})dx_{10}dx_{20} \quad (4.68)$$

$$= \sum_{k_1, k_2} f(\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2})u_{k_1}(x_1)u_{k_2}(x_2)dk_1dk_2 \iint v_{k_1}^*(x_{10})v_{k_2}^*(x_{20})g(x_{10}, x_{20})r_1(x_{10})r_2(x_{20})dx_{10}dx_{20}.$$

$$\begin{aligned} & f(L_1, L_2)\delta(x_1 - x_{10})\delta(x_2 - x_{20}) \\ &= \sum_{k_1, k_2} f(\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2})u_{k_1}(x_1)u_{k_2}(x_2)v_{k_1}^*(x_{10})v_{k_2}^*(x_{20})r_1(x_{10})r_2(x_{20})dk_1dk_2, \end{aligned} \quad (4.69)$$

## 4.6 Die Greensche Funktion $G_\lambda$ . Umkehroperatoren

$$\underline{G}_\lambda = (\underline{L}_1 + \underline{L}_2 - \lambda \underline{I})^{-1} = - \sum_{k_1, k_2} \frac{|u_{k_1}, u_{k_2}\rangle dk_1 dk_2 \langle v_{k_1}, v_{k_2}|}{\lambda - [\lambda_1(k_1) + \lambda_2(k_2)]}. \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint \underline{G}_\lambda d\lambda &= - \sum_{k_1, k_2} |u_{k_1}, u_{k_2}\rangle \langle v_{k_1}, v_{k_2}| \\ &= \iint |u_{k_1}, u_{k_2}\rangle dk_1 dk_2 \langle v_{k_1}, v_{k_2}| - \underline{I}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \underline{G} = (\underline{L}_1 + \underline{L}_2)^{-1} &= \sum_{k_1, k_2} (\underline{L}_1 + \lambda_{k_2} \underline{I})^{-1} |u_{k_1}, u_{k_2}\rangle \langle v_{k_1}, v_{k_2}| \\ &= \sum_{k_1, k_2} (\underline{L}_2 + \lambda_{k_1} \underline{I})^{-1} |u_{k_1}, u_{k_2}\rangle \langle v_{k_1}, v_{k_2}| \\ &= \sum_{k_1, k_2} \frac{|u_{k_1}, u_{k_2}\rangle \langle v_{k_1}, v_{k_2}|}{\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2}} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{(2)} d\lambda \sum_{k_1, k_2} \frac{(\underline{L}_1 + \lambda \underline{I})^{-1} |u_{k_1}, u_{k_2}\rangle \langle v_{k_1}, v_{k_2}|}{\lambda - \lambda_{k_2}} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{(1)} d\lambda \sum_{k_1, k_2} \frac{(\underline{L}_2 + \lambda \underline{I})^{-1} |u_{k_1}, u_{k_2}\rangle \langle v_{k_1}, v_{k_2}|}{\lambda - \lambda_{k_1}}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} \langle x_1, x_2 | \underline{G} | g \rangle &= \sum_{k_1, k_2} (L_2 + \lambda_{k_1})^{-1} u_{k_1}(x_1) u_{k_2}(x_2) \langle v_{k_1}, v_{k_2} | g \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{(1)} d\lambda \sum_{k_1, k_2} \frac{(L_2 + \lambda)^{-1} u_{k_1}(x_1) u_{k_2}(x_2) \langle v_{k_1}, v_{k_2} | g \rangle}{\lambda - \lambda_{k_1}}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\langle x_1, x_2 | \underline{G} | g \rangle = \sum_{k_1} c_{k_1}(x_2) u_{k_1}(x_1). \quad (4.74)$$

$$c_{k_1}(x_2) = \sum_{k_2} \frac{u_{k_2}(x_2) \langle v_{k_1}, v_{k_2} | g \rangle}{\lambda_{k_2} + \lambda_{k_1}} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{(1)} d\lambda \sum_{k_2} \frac{u_{k_2}(x_2) \langle v_{k_1}, v_{k_2} | g \rangle}{(\lambda_{k_2} + \lambda)(\lambda - \lambda_{k_1})}. \quad (4.75)$$

$$\langle x_1, x_2 | \underline{G} | g \rangle = \sum_{k_2} c_{k_2}(x_1) u_{k_2}(x_2), \quad (4.76)$$

#### 4.6.1 Simultane Eigenkets

$$[Q_i, Q_j] = Q_i Q_j - Q_j Q_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.77)$$

$$Q_i |u_k\rangle = \lambda_{ik} |u_k\rangle \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} Q_j Q_i |u_k\rangle &= \lambda_{ik} Q_j |u_k\rangle = Q_j Q_i |u_k\rangle, \\ Q_i \{Q_j |u_k\rangle\} &= \lambda_{ik} \{Q_j |u_k\rangle\}, \\ Q_j |u_k\rangle &\sim |u_k\rangle, \\ Q_j |u_k\rangle &= \lambda_{jk} |u_k\rangle \end{aligned} \quad (4.79)$$

#### 4.6.2 Inversion eines speziellen Operators

$$\begin{aligned} [P_i, Q_j] &= 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \\ P_i &\text{ aus } U_1, \quad Q_i \text{ aus } U_2. \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$[Q_i, Q_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad Q_i \text{ aus } U_2. \quad (4.81)$$

$$L = \sum_{i=1}^n P_i Q_i \quad (4.82)$$

### 4.7 Die dyadische Greensche Funktion

$$\begin{aligned} L |u_i\rangle &= |g_i\rangle, \quad i = 1, 2, 3, \\ \langle \vec{x} | L |u_i\rangle &= \langle \vec{x} | g_i\rangle, \\ L u_i(\vec{x}) &= g_i(\vec{x}), \quad u_i(\vec{x}) \text{ aus } \mathcal{L} \text{ (homogene Randbedingungen)}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \langle v_i | L |u_i\rangle &= \sum_{i=1}^3 \langle u_i | L^\dagger |v_i\rangle^* + \oint \vec{e} \cdot \vec{K}(v_i^*, u_i) dF \\ &\text{mit } \oint \vec{e} \cdot \vec{K}(v_i^*, u_i) dF = 0. \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$|u_i\rangle = \sum_{j=1}^3 G_{ij} |g_j\rangle, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.85)$$

$$(L G_{ij} - \delta_{ij} L) |g_j\rangle = 0, \quad (4.86)$$

$$L G_{ij} = \delta_{ij} L, \quad G_{ij} = G_{ji}. \quad (4.87)$$

$$\langle \vec{x} | G_{ij} | \vec{x}_0\rangle = G_{ij}(\vec{x}, \vec{x}_0)$$

1. Die Normalkomponente und die Tangentialkomponente des Vektorfeldes am Rand des dreidimensionalen Bereichs, oder aber
2. die Divergenz des Vektorfeldes und die Tangentialkomponente der Rotation am Rand des dreidimensionalen Bereichs.

Spezialfälle

1. Longitudinale Felder: Als solche werden Felder bezeichnet, bei denen die Rotation überall verschwindet. In diesem Fall kann als Randbedingung alternativ die Divergenz oder die Normalkomponente des Feldes vorgeschrieben werden.
2. Transversale Felder: Als solche bezeichnet man Felder, bei denen die Divergenz überall verschwindet. In diesem Fall kann als Randbedingung alternativ die Tangentialkomponente des Feldes oder die Tangentialkomponente der Rotation des Feldes vorgeschrieben werden.

## Kapitel 5

# Beispiele für Greensche Funktionen

### 5.1 Der Laplace-Operator in zwei Dimensionen in kartesischen Koordinaten

Rechteck  $0 \leq x_1 \leq a$ ,  $0 \leq x_2 \leq b$ :

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)w(x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \quad w \neq 0 \quad \text{am Rand.} \quad (5.1)$$

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)G(x_1, x_2; x_{10}, x_{20}) = \delta(x_1 - x_{10})\delta(x_2 - x_{20}), \quad G = 0 \quad \text{am Rand.} \quad (5.2)$$

#### 5.1.1 Erstes Lösungsverfahren: Ein Operator wird als Konstante betrachtet

$$\begin{aligned} \underline{L}_1: \quad L_1 &= -\partial^2/\partial x_1^2, & \mathcal{L}_1: \quad u_1(x_1) &= 0 & \text{für } x_1 = 0, x_1 = a, \\ \underline{L}_2: \quad L_2 &= +\partial^2/\partial x_2^2, & \mathcal{L}_2: \quad u_2(x_2) &= 0 & \text{für } x_2 = 0, x_2 = b. \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$-\frac{d^2 G}{dx_1^2} - L_2 G = \delta(x_1 - x_{10})\delta(x_2 - x_{20}), \quad G = 0 \quad \text{für } x_1 = 0, x_1 = a. \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} h_1(x_1) &= \sin(x_1\sqrt{L_2}), & h_2(x_1) &= \sin[(a - x_1)\sqrt{L_2}], \\ K(h_1, h_2) &= h_2 h_1' - h_1 h_2' = \sqrt{L_2} \sin(a\sqrt{L_2}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

sofort angeschrieben werden:

$$G(x_1, x_2; x_{10}, x_{20}) = \begin{cases} \frac{\sin(x_1\sqrt{L_2}) \sin[(a - x_{10})\sqrt{L_2}]\delta(x_2 - x_{20})}{\sqrt{L_2} \sin(a\sqrt{L_2})}, & 0 \leq x_1 < x_{10}, \\ \frac{\sin(x_{10}\sqrt{L_2}) \sin[(a - x_1)\sqrt{L_2}]\delta(x_2 - x_{20})}{\sqrt{L_2} \sin(a\sqrt{L_2})}, & x_{10} < x_1 \leq a. \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\frac{d^2 u_{k2}(x_2)}{dx_2^2} = \lambda_{k2} u_{k2}(x_2), \quad u_{k2}(0) = u_{k2}(b) = 0. \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} u_{k2}(x_2) &= C \sinh(x_2\sqrt{\lambda_{k2}}), \\ 0 &= \sinh(b\sqrt{\lambda_{k2}}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\lambda_{k2} = -n^2 = -\frac{k^2 \pi^2}{b^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

$$u_{k2}(x_2) = v_{k2}(x_2) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{k\pi x_2}{b}\right). \quad (5.10)$$

$$f(\sqrt{L_2})\delta(x_2 - x_{20}) = \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{jk\pi}{b}\right) \frac{2}{b} \sin\left(\frac{k\pi x_2}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi x_{20}}{b}\right). \quad (5.11)$$

$$G = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sinh\left(\frac{k\pi x_1}{b}\right) \sinh\left[\frac{k\pi(a-x_{10})}{b}\right] \sin\left(\frac{k\pi x_2}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi x_{20}}{b}\right)}{k\pi \sinh\left(\frac{k\pi a}{b}\right)}, & 0 \leq x_1 < x_{10}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sinh\left(\frac{k\pi x_{10}}{b}\right) \sinh\left[\frac{k\pi(a-x_1)}{b}\right] \sin\left(\frac{k\pi x_2}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi x_{20}}{b}\right)}{k\pi \sinh\left(\frac{k\pi a}{b}\right)}, & x_{10} < x_1 \leq a. \end{cases} \quad (5.12)$$

### 5.1.2 Zweites Lösungsverfahren: Direkte Inversion des Operators

$$\begin{aligned} \underline{L}_1: \quad L_1 &= -\partial^2/\partial x_1^2, & \mathcal{L}_1: \quad u_1(x_1) &= 0 & \text{für } x_1 = 0, x_1 = a, \\ \underline{L}_2: \quad L_2 &= -\partial^2/\partial x_2^2, & \mathcal{L}_2: \quad u_2(x_2) &= 0 & \text{für } x_2 = 0, x_2 = b. \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} u_{k1}(x_1) = v_{k1}(x_1) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{k_1\pi x_1}{a}\right), & \lambda_{k_1} &= \frac{k_1^2\pi^2}{a^2}, & k_1 = 1, 2, \dots, \\ u_{k2}(x_2) = v_{k2}(x_2) &= \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{k_2\pi x_2}{b}\right), & \lambda_{k_2} &= \frac{k_2^2\pi^2}{b^2}, & k_2 = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2; x_{10}, x_{20}) &= (L_1 + L_2)^{-1} \delta(x_1 - x_{10}) \delta(x_2 - x_{20}) \\ &= \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{4ab \sin\left(\frac{k_1\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{k_2\pi x_2}{b}\right) \sin\left(\frac{k_1\pi x_{10}}{a}\right) \sin\left(\frac{k_2\pi x_{20}}{b}\right)}{k_1^2\pi^2 b^2 + k_2^2\pi^2 a^2}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

## 5.2 Der Laplace-Operator in ebenen Polarkoordinaten

$$-\Delta w(\rho, \varphi) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = g(\rho, \varphi), \quad w(a, \varphi) = 0 \quad (5.16)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial G}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad G = 0 \quad \text{bei } \rho = a. \quad (5.17)$$

$$L = P_1 Q_1 + P_2 Q_2, \quad \begin{cases} P_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right), & P_2 = \frac{1}{\rho^2}, \\ Q_1 = 1 & Q_2 = -\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{cases} \quad (5.18)$$

$$LG = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dG}{d\rho} \right) + \frac{q^2}{\rho^2} G = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0). \quad (5.19)$$

$$\left[ -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{q^2}{\rho^2} \right] u_k(\rho) = \lambda_k u_k(\rho), \quad u_k(a) = 0; \quad u_k(0) \text{ endlich.} \quad (5.20)$$

$$u_k(\rho) = C_k J_q(\rho \sqrt{\lambda_k}). \quad (5.21)$$

$$u_k(a) = 0 = J_q(a \sqrt{\lambda_k}) = J_q(\alpha_{qk}), \quad \lambda_k = \frac{\alpha_{qk}^2}{a^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.22)$$

$$u_k(\rho) = v_k(\rho) = C_k J_q\left(\frac{\alpha_{qk}\rho}{a}\right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.23)$$

$$\langle u_k | v_l \rangle = \int_0^a u_k(\rho) v_l(\rho) \rho d\rho = C_k^2 \frac{a^2}{2} [J_q'(\alpha_{qk})]^2 \delta_{kl}. \quad (5.24)$$



$$u_k(\rho) = v_k(\rho) = \frac{\sqrt{2}J_q\left(\frac{\alpha_{qk}\rho}{a}\right)}{aJ'_q(\alpha_{qk})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.25)$$

$$\langle \rho | \rho_0 \rangle = \frac{\delta(\rho - \rho_0)}{\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_q\left(\frac{\alpha_{qk}\rho}{a}\right)J_q\left(\frac{\alpha_{qk}\rho_0}{a}\right)}{[aJ'_q(\alpha_{qk})]^2}. \quad (5.26)$$

$$G = L^{-1} \left[ \frac{\delta(\rho - \rho_0)}{\rho} \right] \delta(\varphi - \varphi_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_q\left(\frac{\alpha_{qk}\rho}{a}\right)J_q\left(\frac{\alpha_{qk}\rho_0}{a}\right)\delta(\varphi - \varphi_0)}{[\alpha_{qk}J'_q(\alpha_{qk})]^2}. \quad (5.27)$$

$$-\frac{d^2 u_m(\varphi)}{d\varphi^2} = \lambda_m u_m(\varphi), \quad u_m(0) = u_m(2\pi), \quad u'_m(0) = u'_m(2\pi). \quad (5.28)$$

$$u_m(\varphi) = C_m e^{j\varphi\sqrt{\lambda_m}}, \quad \lambda_m = m^2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.29)$$

$$u_m(\varphi) = v_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jm\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \lambda_m = m^2. \quad (5.30)$$

$$\delta(\varphi - \varphi_0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_m(\varphi)v_m^*(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{jm(\varphi - \varphi_0)}. \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} f(\sqrt{Q_2})\delta(\varphi - \varphi_0) &= f(q)\delta(\varphi - \varphi_0) = \sum_m f(\sqrt{\lambda_m})u_m(\varphi)v_m^*(\varphi_0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)e^{jm(\varphi - \varphi_0)}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$G(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{J_m\left(\frac{\alpha_{mk}\rho}{a}\right)J_m\left(\frac{\alpha_{mk}\rho_0}{a}\right)e^{jm(\varphi - \varphi_0)}}{\pi[\alpha_{mk}J'_m(\alpha_{mk})]^2}. \quad (5.33)$$

### 5.2.1 Der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten

$$L = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\Delta. \quad (5.34)$$

$$L = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + A. \quad (5.35)$$

$$P_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right), \quad P_2 = \frac{1}{\rho^2}, \quad P_3 = A, \quad (5.36)$$

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = -\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad Q_3 = 1.$$

$$LG = \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{q^2}{\rho^2} + A \right] G = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0), \quad (5.37)$$

### 5.3 Der Laplace-Operator in drei Dimensionen

$$-\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) w(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3) \quad (5.38)$$

$$-\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad G \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (5.39)$$

$$\underline{G} = (\underline{L}_1 + \underline{L}_2 + \underline{L}_3)^{-1} = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \frac{|u_{k_1}, u_{k_2}, u_{k_3}\rangle dk_1 dk_2 dk_3 \langle v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3}|}{\lambda_1(k_1) + \lambda_2(k_2) + \lambda_3(k_3)} \quad (5.40)$$

$$L_1 u_{k_1}(x_1) = -\frac{d^2 u_{k_1}(x_1)}{dx_1^2} = \lambda_{k_1} u_{k_1}(x_1). \quad (5.41)$$

$$u(k_1, x_1) = v(k_1, x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jk_1 x_1}, \quad \lambda_{k_1} = k_1^2, \quad -\infty < k_1 < \infty. \quad (5.42)$$

$$\langle u_{k_1} | v_{l_1} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u^*(k_1, x_1) v(l_1, x_1) dx_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(l_1 - k_1)x_1} dx_1 = \delta(l_1 - k_1). \quad (5.43)$$

$$\delta(x_1 - x_{10}) = \int u(k_1, x_1) v^*(k_1, x_{10}) dk_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk_1(x_1 - x_{10})} dk_1. \quad (5.44)$$

$$f(L_1) \delta(x_1 - x_{10}) = \int f(\lambda_{k_1}) u(k_1, x_1) v^*(k_1, x_{10}) dk_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k_1^2) e^{jk_1(x_1 - x_{10})} dk_1. \quad (5.45)$$

$$G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[j\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)]}{\vec{k}^2} dk_1 dk_2 dk_3. \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} \vec{k}^2 &= k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2, \\ dk_1 dk_2 dk_3 &\rightarrow k^2 \sin \vartheta dk d\vartheta d\varphi, \\ \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) &= k |\vec{x} - \vec{x}_0| \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, \vec{x}_0) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^\infty \exp(jk |\vec{x} - \vec{x}_0| \cos \vartheta) dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) \int_0^\infty \exp(jk |\vec{x} - \vec{x}_0| \cos \vartheta) dk \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin(k |\vec{x} - \vec{x}_0|)}{k |\vec{x} - \vec{x}_0|} dk = \frac{1}{2\pi^2 |\vec{x} - \vec{x}_0|} \int_0^\infty \frac{\sin \xi d\xi}{\xi} \\ &= \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_0|}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$-\Delta \varphi(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon}. \quad (5.49)$$

$$\varphi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}_0)}{4\pi\varepsilon |\vec{x} - \vec{x}_0|} dV_0. \quad (5.50)$$

## 5.4 Die Wellengleichung

$$-\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t) \quad (5.51)$$

$$-\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \delta(t - t_0). \quad (5.52)$$

$$L_4 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad L_4 u(\omega, t) = \lambda_\omega u(\omega, t) \quad (5.53)$$

$$u(\omega, t) = v(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\omega t}, \quad \lambda_\omega = -\frac{\omega^2}{c^2}, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (5.54)$$

$$\delta(t - t_0) = \int u(\omega, t)v^*(\omega, t_0)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega, \quad (5.55)$$

$$f(L_4)\delta(t - t_0) = \int f(\lambda_\omega)u(\omega, t)v^*(\omega, t_0)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(-\frac{\omega^2}{c^2}\right) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega.$$

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[j\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + j\omega(t - t_0)]}{\vec{k}^2 - \omega^2/c^2} dk_1 dk_2 dk_3 d\omega \\ &= -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{+\infty} dk_1 dk_2 dk_3 e^{j\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega(t-t_0)} d\omega}{(\omega + ck)(\omega - ck)}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) &= \\ &= -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{+\infty} dk_1 dk_2 dk_3 e^{j\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)} 2\pi j H(t - t_0) \left[ \frac{e^{jck(t-t_0)}}{2ck} - \frac{e^{-jck(t-t_0)}}{2ck} \right]. \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} G &= -\frac{jc}{2(2\pi)^3} H(t - t_0) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) \int_0^\infty e^{jk|\vec{x} - \vec{x}_0| \cos \vartheta} 2j \sin[ck(t - t_0)] k dk \\ &= \frac{c}{(2\pi)^2} H(t - t_0) \int_0^\infty \frac{2j \sin[k|\vec{x} - \vec{x}_0|]}{jk|\vec{x} - \vec{x}_0|} \cdot \sin[ck(t - t_0)] k dk \\ &= \frac{cH(t - t_0)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin[kc(t - t_0)] \sin[k|\vec{x} - \vec{x}_0|] dk. \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) &= \frac{H(t - t_0)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|} \left[ \delta\left(t - t_0 - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_0|}{c}\right) - \delta\left(t - t_0 + \frac{|\vec{x} - \vec{x}_0|}{c}\right) \right] \\ &= \frac{H(t - t_0)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|} \delta\left(t - t_0 - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_0|}{c}\right). \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} w(\vec{x}, t) &= \iint G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) g(\vec{x}_0, t_0) dV_0 dt_0 \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{g\left(x_{10}, x_{20}, x_{30}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_0|}{c}\right)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|} dx_{10} dx_{20} dx_{30}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

## 5.5 Die eindimensionale Wärmeleitung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial}{\partial t}\right) w(x, t) = 0, \quad w(x, 0) = w_0(x), \quad w \rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty. \quad (5.61)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial}{\partial t}\right) G(x, t; x_0, t_0) = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0), \quad (5.62)$$

$$G = 0 \quad \text{für } t = 0, |x| \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty.$$

$$\frac{dG}{dt} + \frac{L_1}{a^2} G = -\frac{1}{a^2} \delta(x - x_0)\delta(t - t_0), \quad G = 0 \text{ für } t = 0, \quad (5.63)$$

$$G = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0, \\ C \exp(-L_1 t/a^2), & t_0 < t < \infty. \end{cases} \quad (5.64)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [G(t_0 + \varepsilon) - G(t_0 - \varepsilon)] = C \exp(-L_1 t_0/a^2) = -\delta(x - x_0)/a^2. \quad (5.65)$$

$$G(x, t; x_0, t_0) = -\frac{H(t - t_0)}{a^2} e^{L_1(t_0 - t)/a^2} \delta(x - x_0). \quad (5.66)$$

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk(x-x_0)} dk, \quad f(L_1)\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k^2) e^{jk(x-x_0)} dk. \quad (5.67)$$

$$G(x, t; x_0, t_0) = -\frac{H(t - t_0)}{2\pi a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-k^2 \frac{t - t_0}{a^2} + jk(x - x_0)\right] dk. \quad (5.68)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-c_1^2 k^2 - 2c_2 k] dk = \frac{\sqrt{\pi}}{c_1} \exp\left(\frac{c_2^2}{c_1^2}\right), \quad c_1 > 0, \quad (5.69)$$

$$G(x, t; x_0, t_0) = -\frac{H(t - t_0)}{\sqrt{4\pi a^2(t - t_0)}} \exp\left[-\frac{a^2(x - x_0)^2}{4(t - t_0)}\right]. \quad (5.70)$$

$$w(x_1, x_2) = -\iiint \left(\frac{\partial K_1}{\partial x_{10}} + \frac{\partial K_2}{\partial x_{20}}\right) dx_{10} dx_{20}, \quad (5.71)$$

$$K_i(G, w) \hat{=} \left(G \frac{\partial w}{\partial x_i} - w \frac{\partial G}{\partial x_i}, -a^2 G w\right).$$

$$w(x, t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dt_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_0} \left[ G \frac{\partial w}{\partial x_0} - w \frac{\partial G}{\partial x_0} \right] + \frac{\partial}{\partial t_0} [-a^2 G w] \right\}. \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned} w(x, t) &= a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} [G(x, t; x_0, t_0) w(x_0, t_0)] \Big|_{t_0=0}^{t_0=\infty} dx_0 \\ &= -a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, t; x_0, 0) w_0(x_0) dx_0 \\ &= \frac{H(t)}{\sqrt{2\pi(2t/a^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} w_0(x_0) \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2(2t/a^2)}\right] dx_0. \end{aligned} \quad (5.73)$$

## 5.6 Die Helmholtzgleichung

$$w(\vec{x}, t) = w(\vec{x}) \exp(j\omega t), \quad g(\vec{x}, t) = g(\vec{x}) \exp(j\omega t) \quad (5.74)$$

$$-(\Delta + k_0^2)w(\vec{x}) = g(\vec{x}), \quad k_0 = \frac{\omega}{c}. \quad (5.75)$$

$$w(\vec{x}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\vec{x}_0) \exp(-jk_0|\vec{x} - \vec{x}_0|)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|} dx_{10} dx_{20} dx_{30} = \int G(\vec{x}, \vec{x}_0) g(\vec{x}_0) dV_0. \quad (5.76)$$

$$G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \frac{\exp(-jk_0|\vec{x} - \vec{x}_0|)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|}. \quad (5.77)$$

## 5.7 Tensoroperatoren

$$\underline{L}_{ij}|u_j\rangle = |g_i\rangle, \quad (5.78)$$

$$\langle \vec{x}|\underline{L}_{ij}|u_j\rangle = \langle \vec{x}|g_i\rangle = L_{ij}u_j(\vec{x}) = g_i(\vec{x}). \quad (5.79)$$

$$|u_i\rangle = \underline{G}_{ij}|g_j\rangle \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned} \underline{L}_{ij}\underline{G}_{jk}|g_k\rangle &= |g_i\rangle = \delta_{ik}\underline{I}|g_k\rangle, \\ \underline{L}_{ij}\underline{G}_{jk} &= \delta_{ik}\underline{I}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

$$\langle \vec{x}|\underline{L}_{ij}\underline{G}_{jk}|\vec{x}_0\rangle = \delta_{ik}\langle \vec{x}|\vec{x}_0\rangle = L_{ij}G_{jk}(\vec{x}, \vec{x}_0) = \delta_{ik}\delta(\vec{x} - \vec{x}_0). \quad (5.82)$$

$$u_i(\vec{x}) = \langle \vec{x}|u_i\rangle = \langle \vec{x}|\underline{G}_{ij}|g_j\rangle = \int \langle \vec{x}|\underline{G}_{ij}|\vec{x}_0\rangle dV_0 \langle \vec{x}_0|g_j\rangle = \int G_{ij}(\vec{x}, \vec{x}_0)g_j(\vec{x}_0)dV_0 \quad (5.83)$$

## 5.8 Das elektromagnetische Feld

$$\text{rot}\vec{H}(\vec{x}, t) = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{J}(\vec{x}, t), \quad (5.84)$$

$$\text{rot}\vec{E}(\vec{x}, t) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}(\vec{x}, t)}{\partial t},$$

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{H}(\vec{x}) &= j\omega\varepsilon_0\vec{E}(\vec{x}) + \vec{J}(\vec{x}), \\ \text{rot}\vec{E}(\vec{x}) &= -j\omega\mu_0\vec{H}(\vec{x}), \end{aligned} \quad (5.85)$$

$$\text{rotrot}\vec{E}(\vec{x}) - k_0^2\vec{E}(\vec{x}) = -j\omega\mu_0\vec{J}(\vec{x}). \quad (5.86)$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{für 2 oder mehr Indizes gleich,} \\ 1 & \text{für } i, j, k = 123 \text{ oder zyklische Vertauschungen,} \\ -1 & \text{für } i, j, k \text{ sonst.} \end{cases} \quad (5.87)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}. \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{A} & \quad \partial_i A_i, \\ \text{rot}\vec{A} & \quad \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k, \\ \Delta\vec{A} & \quad \partial_j\partial_j A_i, \\ \text{grad}A & \quad \partial_i A, \\ \text{rotrot}\vec{A} = \text{graddiv}\vec{A} - \Delta\vec{A} & \quad \varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{kpq}\partial_p A_q = \partial_i\partial_j A_j - \partial_j\partial_j A_i. \end{aligned} \quad (5.89)$$

$$(\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq}\partial_j\partial_p - k_0^2\delta_{iq})E_q(\vec{x}) = -j\omega\mu_0 J_i(\vec{x}) = L_{iq}E_q(\vec{x}) = g_i(\vec{x}). \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned} L_{iq}G_{q\ell}(\vec{x}, \vec{x}_0) &= \delta_{i\ell}\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \\ &= (\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq}\partial_j\partial_p - k_0^2\delta_{iq})G_{q\ell}(\vec{x}, \vec{x}_0) \\ &= [(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp})\partial_j\partial_p - k_0^2\delta_{iq}]G_{q\ell}(\vec{x}, \vec{x}_0) \\ &= (\partial_i\partial_q - \delta_{iq}\partial_j\partial_j - k_0^2\delta_{iq})G_{q\ell}(\vec{x}, \vec{x}_0). \end{aligned} \quad (5.91)$$

$$G_{q\ell}(\vec{x}, \vec{x}_0) = \left( \delta_{q\ell} + \frac{1}{k_0^2} \partial_q\partial_\ell \right) G(\vec{x}, \vec{x}_0). \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned} \delta_{i\ell}\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) &= (\partial_i\partial_q - \delta_{iq}\partial_j\partial_j - k_0^2\delta_{iq}) \left( \delta_{q\ell} + \frac{1}{k_0^2} \partial_q\partial_\ell \right) G(\vec{x}, \vec{x}_0) \\ &= \left( \partial_i\partial_\ell - \delta_{i\ell}\partial_j\partial_j - k_0^2\delta_{i\ell} + \frac{1}{k_0^2} \partial_i\partial_\ell\partial_q\partial_q - \frac{1}{k_0^2} \partial_i\partial_\ell\partial_j\partial_j - \partial_i\partial_\ell \right) G(\vec{x}, \vec{x}_0) \\ &= -\delta_{i\ell}(\partial_j\partial_j + k_0^2)G(\vec{x}, \vec{x}_0). \end{aligned}$$

$$-(\Delta + k_0^2)G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad (5.93)$$

$$G_{ij}(\vec{x}, \vec{x}_0) = \left( \delta_{ij} + \frac{1}{k_0^2} \partial_i \partial_j \right) \frac{\exp(-jk_0|\vec{x} - \vec{x}_0|)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|}. \quad (5.94)$$

$$\overleftrightarrow{G}(\vec{x}, \vec{x}_0) = \left( \overleftrightarrow{I} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla \right) \frac{\exp(-jk_0|\vec{x} - \vec{x}_0|)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|}. \quad (5.95)$$

$$E_i(\vec{x}) = -j\omega\mu_0 \int J_j(\vec{x}_0) \left( \delta_{ij} + \frac{1}{k_0^2} \partial_i \partial_j \right) \frac{\exp(-jk_0|\vec{x} - \vec{x}_0|)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|} dV_0. \quad (5.96)$$

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} - j\kappa\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \vec{H}, \\ \vec{B} &= j\kappa\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \vec{E} + \mu \vec{H} \end{aligned} \quad (5.97)$$

## 5.9 Anmerkungen zur analytischen Schreibweise der Tensorrechnung

Tensorrechnung [12]. Stufe eines Tensors

$$A, \quad A_i, \quad A_{ij}, \quad A_{ijk}, \quad A_{ijkl}, \dots \quad (5.98)$$

Summierungskonvention, Beispiel:

$$A_{iik} = \sum_{i=1}^3 A_{iik} = A_{11k} + A_{22k} + A_{33k} = B_k \quad (5.99)$$

Beispiele (Symbol  $\hat{=}$  bedeutet „entspricht“):

$$A_i B_i = C \hat{=} \vec{A} \cdot \vec{B} = C$$

$$A_i B_j = C_{ij} \hat{=} \vec{A} \vec{B} = \overleftrightarrow{C}$$

$$A_{ij} B_i C_j = D \hat{=} \overleftrightarrow{A} : \vec{B} \vec{C} = D$$

$$A_{ij} B_j = C_i \hat{=} \overleftrightarrow{A} \cdot \vec{B} = \vec{C}$$

$$\delta_{ij} B_{ij} = B_{ii} = C \hat{=} \overleftrightarrow{I} : \overleftrightarrow{B} = C$$

$$\delta_{ij} A_{ijk} = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} A_{ijk} = A_{iik} = A_{11k} + A_{22k} + A_{33k} = B_k \quad (5.100)$$

Eine Zuordnung von zwei Vektoren zu einem dritten Vektor kann daher nur über einen Tensor dritter Stufe erfolgen:

$$A_{ijk} B_j C_k = D_i \quad (5.101)$$

Eine spezielle Wahl

$$\varepsilon_{ijk} A_j B_k = C_i \quad (5.102)$$

$$C_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1 \quad (\text{Rechtssystem}); \quad C_3 = A_2 B_1 - A_1 B_2 \quad (\text{Linkssystem});$$

Mit Vektoren  $\vec{A} \hat{=} (1, 0, 0)$ ,  $\vec{B} \hat{=} (0, 1, 0)$  Rechtssystem:  $\vec{C} \hat{=} (0, 0, 1)$ , Linkssystem:  $\vec{C} \hat{=} (0, 0, -1)$

Symbolische Schreibweise

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

definiert immer  $C_3 = A_1B_2 - A_2B_1!$  (daher „axialer Vektor“ „polarer Vektor“).

Übung: Länge des Vektors Gl. (5.102)

$$\begin{aligned}
 C_i C_i &= \varepsilon_{ijk} A_j B_k \varepsilon_{ipq} A_p B_q \\
 &= (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}) A_j B_k A_p B_q \\
 &= A_j B_k A_j B_k - A_j B_k A_k B_j \\
 &= A_j A_j B_k B_k - A_j B_j A_k B_k \\
 &= A^2 B^2 - (AB \cos \vartheta)^2 = A^2 B^2 \sin^2 \vartheta
 \end{aligned} \tag{5.103}$$

$AB \sin \vartheta$  ist die Fläche des Parallelogramms.

Ex-Ex-Produkt:

$$\vec{F} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \tag{5.104}$$

Analytische Schreibweise (beachte:  $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$ ):

$$\begin{aligned}
 F_i &= \varepsilon_{ijk} A_j (\varepsilon_{kpq} B_p C_q) \\
 &= (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) A_j B_p C_q \\
 &= B_i (A_j C_j) - C_i (A_j B_j) \doteq \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})
 \end{aligned} \tag{5.105}$$

Für Umformungen wichtig:

$$G_{ij} = -G_{ji} = A_{ij} - A_{ji} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kpq} A_{pq} \tag{5.106}$$

Gegenüberstellung einiger Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 \nabla &\doteq \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \\
 \nabla \vec{A} \quad (\text{dyadisches Produkt}) &\doteq \partial_i A_j \quad (\text{Gradiententensor}) \\
 \text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} &\doteq \partial_i A_i \\
 \text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} &\doteq \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \\
 \Delta \vec{A} = \nabla^2 \vec{A} = \nabla \cdot \nabla \vec{A} &\doteq \partial_j \partial_j A_i \\
 \text{grad } A = \nabla A &\doteq \partial_i A \\
 \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} &\doteq \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{kpq} \partial_p A_q = \partial_i \partial_j A_j - \partial_j \partial_j A_i
 \end{aligned} \tag{5.107}$$

Beachte: Divergenz = Spur des Gradiententensors (Invariante).

$$\begin{aligned}
 \text{div}(a \vec{B}) &= a \text{div } \vec{B} + \vec{B} \cdot \text{grad } a \doteq \partial_i (a B_i) = a \partial_i B_i + B_i \partial_i a \\
 \text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} \doteq \partial_i \varepsilon_{ijk} A_j B_k = B_k \varepsilon_{kij} \partial_i A_j - A_j \varepsilon_{jik} \partial_i B_k
 \end{aligned} \tag{5.108}$$

Doppelte Überschiebung  $S_{ij} = S_{ji}$  mit  $A_{ij} = -A_{ji}$  ist null:

$$S_{ij} A_{ij} = S_{ji} A_{ij} = S_{ij} A_{ji} = -S_{ij} A_{ij} \quad \text{daher} \quad 2S_{ij} A_{ij} = 0 \tag{5.109}$$

Folge:

$$\begin{aligned}
 \text{rot grad } a = 0 &\doteq \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k a = 0 \\
 \text{div rot } \vec{A} = 0 &\doteq \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = 0
 \end{aligned} \tag{5.110}$$

Beispiel einer nichttrivialen Umformung durch Anwendung von Gl. (5.106): Strömungslehre

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} + \frac{1}{2} \text{grad}(\vec{v} \cdot \vec{v}) \quad (5.111)$$

Strömungsfeld  $\vec{v}(\vec{r}, t) \hat{=} v_i(x_j, t)$  in analytischer Schreibweise (Abkürzung  $\partial_t \hat{=} d/dt$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} &= \partial_t v_i + \partial_j v_i \frac{dx_j}{dt} = \partial_t v_i + v_j \partial_j v_i \\ &= \partial_t v_i + v_j \partial_j v_i - v_j \partial_i v_j + v_j \partial_i v_j \\ &= \partial_t v_i - v_j (\partial_i v_j - \partial_j v_i) + \frac{1}{2} \partial_i (v_j v_j) \\ &= \partial_t v_i - v_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kpq} \partial_p v_q + \frac{1}{2} \partial_i (v_j v_j) \\ &= \partial_t v_i - \varepsilon_{ijk} v_j (\varepsilon_{kpq} \partial_p v_q) + \frac{1}{2} \partial_i (v_j v_j) \end{aligned} \quad (5.112)$$

Man beachte ferner folgende Beziehungen:

Für den Ortsvektor  $\vec{r} \hat{=} x_i$  gilt

$$\text{div } \vec{r} \hat{=} \partial_i x_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \delta_{ii} = 3$$

ferner

$$\text{rot } \vec{r} \hat{=} \varepsilon_{ijk} \partial_j x_k = \varepsilon_{ijk} \delta_{jk} = 0$$

Man beachte weiterhin:

$$\frac{\partial A_i}{\partial A_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial A_{ij}}{\partial A_{k\ell}} = \delta_{ik} \delta_{j\ell} \quad \text{usw.}$$

Die Reihenentwicklung einer Skalarfunktion  $A(x_i)$  an einer Stelle  $x_i = \hat{x}_i + a_i$  sei als letztes Beispiel genannt (n-te partielle Ableitungen  $\partial_i^n A$  sind an der Stelle  $x_i = \hat{x}_i$  zu nehmen):

$$\begin{aligned} A(x_i) &= A(\hat{x}_i) + \frac{\partial A}{\partial x_i} a_i + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j} a_i a_j + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 A}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} a_i a_j a_k \\ &= A(\hat{x}_i) + (a_i \partial_i) A + \frac{1}{2!} (a_i a_j \partial_i \partial_j) A + \frac{1}{3!} (a_i a_j a_k \partial_i \partial_j \partial_k) A \\ &= A(\hat{x}_i) + (a_i \partial_i) A + \frac{1}{2!} (a_i \partial_i)^2 A + \frac{1}{3!} (a_i \partial_i)^3 A \\ &= \exp(a_i \partial_i) A \end{aligned} \quad (5.113)$$

Das Ergebnis ist gleichzeitig ein Beispiel für die Wirkung einer Operatorenfunktion (eine Funktion, die als Potenzreihe dargestellt werden kann) des Operators  $\partial_i$  auf eine Funktion  $A(x_i)$ .



# Literaturverzeichnis

- [1] Butkovskiy, A. G.: Ellis Horwood Series in Mathematics and its Applications, Green's functions and transfer functions handbook. Chichester: Ellis Horwood Limited, a Division of John Wiley & Sons 1982
- [2] Economou, E. N.: Green's functions in quantum physics. Berlin: Springer 1979
- [3] Friedman, B.: Principles and techniques of applied mathematics. New York: Wiley 1956
- [4] Gelfand, I. M.; Schilow, G. E.: Verallgemeinerte Funktionen, Bd. 1–4. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1960
- [5] Harrington, R. F.: Time-harmonic electromagnetic fields. New York: McGraw Hill 1961
- [6] Lindell, I. V.: Simple derivation of various Green dyadics for chiral media. Arch. Elektron. Übertrag.tech. 44 (1990), S. 427–429
- [7] Moon, P.; Spencer, D. E.: Field theory handbook, 2. Aufl. Berlin: Springer 1971
- [8] Morse, P. M.; Feshbach, H.: Methods of theoretical physics. New York: McGraw Hill 1953
- [9] Roach, G. F.: Green's functions — introductory theory with applications. New York: Van Nostrand-Reinhold 1970
- [10] Schwank, F.: Randwertprobleme. Leipzig: Teubner 1951
- [11] Tai, C. T.: Dyadic Green's functions in electromagnetic theory. San Francisco, London, Toronto: Intext Educational Publishers 1971
- [12] Duschek, A., Hochrainer, A.: Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung (Teil 1: Tensoralgebra, Teil 2: Tensoranalysis, Teil 3: Anwendungen in Physik und Technik). Springer-Verlag, Wien, 1965-1970

# Berichtigungen

Anmerkung: Dieses Skriptum wurde ursprünglich mit einer älteren PC-Tex-Version erstellt und später auf Miktex2.1 umgestellt. Diese Umstellung wurde weitgehend mit Makros automatisch durchgeführt. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß sich dabei auch Fehler eingeschlichen haben, die bis heute noch nicht entdeckt wurden. Wenn Ihnen Fehler auffallen, so bitte ich um eine Mitteilung per E-mail an `gerhard.grau @ kit.edu`

In der Version 2007/2008 wurde eine Korrektur in Gl. (5.110) durchgeführt. Die vorliegende Version ist die von WS 2017/2018. In ihr wurden an die pdf-Version des Skripts 10 Seiten angefügt, welche handschriftliche Zusammenstellungen von Formeln enthalten (gedacht zur Hilfe bei der Wiederholung der Vorlesung vor einer Prüfung oder zur Erläuterung nicht im Detail abgeleiteter Formeln).

1. Diskussion der Randbedingungen RB

2. Operatoren, adjungierte Operatoren

$$\int \langle x | \rangle dx \langle x | = \underline{I} \quad \langle x | x' \rangle = \delta(x-x') \quad \langle x | \psi \rangle = \psi(x) \quad \langle x | L | x' \rangle = L(x, x')$$

$$L | u \rangle = | g \rangle \rightarrow \langle x | L | u \rangle = L \langle x | u \rangle = Lu(x) = \langle x | g \rangle = g(x) \rightarrow Lu(x) = g(x)$$

Lösung:  $\underline{G} \underline{L} = \underline{L} \underline{G} = \underline{I} \rightarrow \langle x | \underline{L} \underline{G} | x_0 \rangle = \langle x | x_0 \rangle = L \langle x | \underline{G} | x_0 \rangle = \underline{L} G(x, x_0) = \delta(x-x_0)$

$$\langle v | \underline{L} | u \rangle = [(\langle v | \underline{L} | u \rangle)^+ ]^+ = [\langle u | \underline{L}^+ | v \rangle]^+ = \underline{\langle u | \underline{L}^+ | v \rangle}^*$$

$$\int \langle v | x \rangle dx \langle x | \underline{L} | u \rangle = \left[ \int \langle u | x \rangle dx \langle x | \underline{L}^+ | v \rangle \right]^*$$

$$\int v^*(x) Lu(x) dx = \int u(x) [L^+ v(x)]^* dx$$

$\underline{L}$ :  $L, \mathcal{L}$  (RB für  $u(x)$ )

$\underline{L}^+$ :  $L^+, \mathcal{L}^+$  (RB für  $v(x)$ , so daß obige Beziehung gilt)

$\underline{L} = \underline{L}^+$  (d.h.  $L = L^+, \mathcal{L} = \mathcal{L}^+$ ): selbst adjungierter Operator.

3. Allgemeiner linearer Differentialoperator 2. Ordnung

$$L = a(x) \frac{d^2}{dx^2} + b(x) \frac{d}{dx} + c(x) \rightarrow L^+ = \frac{d^2}{dx^2} [a^*(x) \dots] - \frac{d}{dx} [b^*(x) \dots] + c^*(x)$$

4. Konvergenz/Metrik

$$L = -\frac{1}{h(x)} \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) \quad \text{Annahme: } h(x) \text{ reell, } > 0.$$

Basissystem:  $\int \langle x | \rangle h(x) dx \langle x | = \underline{I} \quad \langle x | x' \rangle = \frac{\delta(x-x')}{h(x)}$

Damit:  $\underline{L} \underline{G} = \underline{I} \rightarrow LG(x, x_0) = \frac{\delta(x-x_0)}{h(x)}$

$$\underline{L} | u \rangle = | g \rangle \rightarrow | u \rangle = \underline{G} | g \rangle$$

$$\langle x | u \rangle = \langle x | \underline{G} | g \rangle = \int \langle x | \underline{G} | x_0 \rangle h(x_0) dx_0 \langle x_0 | g \rangle$$

$$u(x) = \int G(x, x_0) g(x_0) h(x_0) dx_0$$

5. Was bringt das? Jetzt gilt:  $\int v^*(x) Lu(x) h(x) dx = \int u(x) [L^+ v(x)]^* h(x) dx$

$$-\int_0^1 v^* \frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) \frac{h dx}{h} = -v^* p \frac{du}{dx} \Big|_0^1 + \int_0^1 p \frac{du}{dx} \frac{dv^*}{dx} dx = -v^* p \frac{du}{dx} \Big|_0^1 + p u \frac{dv^*}{dx} \Big|_0^1 - \int_0^1 u \frac{d}{dx} \left( p \frac{dv^*}{dx} \right) dx =$$

$$= -p \left( v^* \frac{du}{dx} - u \frac{dv^*}{dx} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 u \left[ -\frac{1}{h} \frac{d}{dx} \left( p \frac{dv^*}{dx} \right) \right]^* h dx$$

d.h.:  $\langle v | \underline{L} | u \rangle = \langle u | \underline{L}^+ | v \rangle^* + k(v^*, u) \Big|_0^1$  mit:  $k(v^*, u) \Big|_0^1 = \int_0^1 \frac{dk(v^*, u)}{dx} dx = 0$

$$v^* Lu = u (L^+ v)^* + \frac{1}{h} \frac{dk(v^*, u)}{dx}$$

$\underline{L}$ :  $L = -\frac{1}{h} \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) + q, \quad u \text{ aus } \mathcal{L}$

$\underline{L}^+$ :  $L^+ = -\frac{1}{h} \frac{d}{dx} \left( p^* \frac{d}{dx} \right) + q^*, \quad v \text{ aus } \mathcal{L}^+, \text{ so, daß } k(v^*, u) \Big|_0^1 = 0$

Formal SA (selbstadjungiert) :  $L=L^+$  (g.l.  $p, q$  reell)

SA:  $L=L^+, \mathcal{L}=\mathcal{L}^+$  (identische RB für  $u, v$ )

- a) Wenn  $Lu=0, L^+v=0$ , dann  $k(v^*, u) = \text{const}$
- b) Wenn  $L=L^+$  und  $Lu=0, Lv=0$ , dann  $k(v^*, u) = \text{const}$
- c) Wenn  $L=L^+$  und  $u, v$  linear abhängig mit  $Lu=Lv=0$ , dann  $k(v^*, u) \equiv 0$

6. Randwerte, unter dem Integral schreiben" (Operatoren im erweiterten Sinn)

Gegeben sei:  $\underline{L}_I: L, \mathcal{L}_I$  (inhomogene RB für  $w(x)$ )  
 $\underline{L}: L, \mathcal{L}$  (Struktur wie  $\mathcal{L}_I$ , aber homogen,  $u(x)$ )  
 $\underline{L}^+: L^+, \mathcal{L}^+$  (für  $v(x)$ )

Was gilt

$$\langle v | \underline{L} | u \rangle = \langle u | \underline{L}^+ | v \rangle^* + k(v^*, u) \Big|_0^1 \quad \text{mit } k(v^*, u) \Big|_0^1 = 0$$

$$\langle v | \underline{L}_I | w \rangle = \langle w | \underline{L}^+ | v \rangle^* + k(v^*, w) \Big|_0^1 \quad \text{aber } k(v^*, w) \Big|_0^1 \neq 0, \text{ da andere RB.}$$

Definition:  $\langle v | \underline{L}_e | w \rangle \stackrel{!}{=} \langle w | \underline{L}^+ | v \rangle^*$   
 $= \langle v | \underline{L}_I | w \rangle - k(v^*, w) \Big|_0^1 \quad \Leftrightarrow \text{sei } \underline{L}_I = \underline{L}_e + \underline{L}_1$   
 $= \langle v | \underline{L}_e + \underline{L}_1 | w \rangle - k(v^*, w) \Big|_0^1$

ergo:  $\langle v | \underline{L}_1 | w \rangle = k(v^*, w) \Big|_0^1 = k(\langle v | x_0 \rangle, \langle x_0 | w \rangle) \Big|_{x_0=0}^{x_0=1}$

7. Lösung inhomogener Probleme zu inhomogenen Randbedingungen

Problem:  $\underline{L}_I | w \rangle = | g \rangle \quad \underline{L}_I: L, \mathcal{L}_I$

Löse:  $\underline{G}$ , also  $L\underline{G}(x, x_0) = \frac{\delta(x-x_0)}{r(x)}$  mit Gauß  $\mathcal{L}$  (homogene RB!!)

$$(\underline{L}_e + \underline{L}_1) | w \rangle = | g \rangle$$

$$\underline{L}_e | w \rangle = | g \rangle - \underline{L}_1 | w \rangle$$

$$\underline{G} \underline{L}_e | w \rangle = \underline{G} | w \rangle = \underline{G} | g \rangle - \underline{G} \underline{L}_1 | w \rangle$$

$$w(x) = \langle x | w \rangle = \langle x | \underline{G} | g \rangle - \langle x | \underline{G} \underline{L}_1 | w \rangle = \text{siehe den Definition von } \underline{L}_1 =$$

$$= \langle x | \underline{G} | g \rangle - k(\langle x | \underline{G} | x_0 \rangle, \langle x_0 | w \rangle) \Big|_{x_0=0}^{x_0=1}$$

$$w(x) = \int_0^1 \underline{G}(x, x_0) g(x_0) r(x_0) dx_0 - k[\underline{G}(x, x_0), w(x_0)] \Big|_{x_0=0}^{x_0=1}$$

a) beachte: Ableitungen in  $k$  betreffen sich auf die Variable  $x_0$ !

$w(x) = \text{Teil 1} + \text{Teil 2}$

Teil 1 = Lösung des inhomogenen Problems zu homogenen RB (weil  $\underline{G}$  aus  $\mathcal{L}$ !)

Teil 2: Lösung des homogenen Problems zu inhomogenen RB

Superponierbar, da lineare Probleme

# PROBLEM

LÖSE  $Lw(x) = g(x)$  INHOM. RB FÜR  $w$  ( $\underline{L}: L, \underline{L}_I$ )

MIT  $L = -\frac{1}{h} \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) + q$   $h$  reell,  $> 0$

SUCHE  $LG(x, x_0) = \frac{\delta(x-x_0)}{h}$  MIT HOMOG. RB FÜR  $G$  ( $\underline{L}: L, \underline{L}$ )

BERECHNE KONJUNKT  $K(v_1^*, u) = -p \left( v_1^* \frac{du}{dx} - u \frac{dv_1^*}{dx} \right)$

DANN GILT:

$$w(x) = \int_0^1 G(x, x_0) g(x_0) h(x_0) dx_0 - K[G(x, x_0), w(x_0)] \Big|_{x_0=0}^{x_0=1}$$

BEACHT: ABLEITUNGEN IM KONJUNKT NACH VARIABLEM  $x_0$  BILDEN!

BERECHNUNG VON G:  $-\frac{1}{h} \frac{d}{dx} \left( p \frac{dG}{dx} \right) + qG = \frac{\delta(x-x_0)}{h}$  INTEGRIERT  $\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon}$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ -p(x) \frac{dG(x, x_0)}{dx} \right]_{x=x_0-\epsilon}^{x=x_0+\epsilon} = 1, \text{ STETIG BEI } x=x_0$$

UNGEMISCHTE RB:

$$G(x, x_0) = \frac{r_1(x) r_2(x_0) H(x_0-x) + r_1(x_0) r_2(x) H(x-x_0)}{K(r_1, r_2)_{x=x_0}} \quad 0 \leq x_0 \leq 1$$

$r_1(x), r_2(x)$  LÖSUNGEN VON  $LG=0$ , WELCHE HOMOG. RB BEI  $x=0$ , BZW.  $x=1$  ERFÜLLEN.

GEMISCHTE RB:

$$G(x, x_0) = c_1 r_1(x) + c_2 r_2(x) + \frac{r_1(x) r_2(x_0) H(x_0-x) + r_1(x_0) r_2(x) H(x-x_0)}{K(r_1, r_2)_{x_0=0}} \quad 0 \leq x_0 \leq 1$$

$r_1(x), r_2(x)$  BELIEBIGE LINEAR UNABHÄNGIGE LÖSUNGEN VON  $LG=0$ ,  $c_1, c_2$  WERDEN AUS DEN HOMOG. RB (Z.B.  $G(0, x_0) = G'(0, x_0) = 0$ ) ERMITTELT.

MIT FOURIERTRANSFORMATION

Z.B.:  $-\frac{d^2 G}{dx^2} = \delta(x-x_0)$

$$G(x, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_F(f, x_0) e^{2\pi j f x} df, \quad G_F(f, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x_0) e^{-2\pi j f x} dx$$

ERGO:

$$4\pi^2 f^2 G_F(f, x_0) = e^{-2\pi j f x_0}$$

$$G_F(f, x_0) = \frac{e^{-2\pi j f x_0}}{4\pi^2 f^2}$$

→ GILT BEI  $f=0$  NICHT, DA DORT KEINE ANLEITUNG BESTEHT!

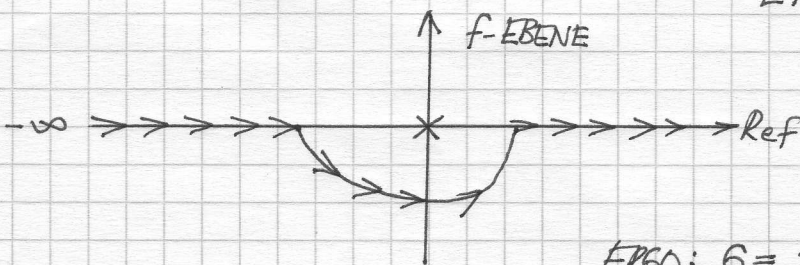
$$G(x, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[2\pi j f (x-x_0)]}{4\pi^2 f^2} df$$

UNSENS! HILFT, WENN MAN INTEG. WEGS ERRATEN KANN, ETWA BEI KAUSALER GF,  $G=0$  FÜR  $x < x_0$

UNTEN SCHLIESSEN:  $\oint = 0$ , HALBKREIS  $= 0$ , ERGO  $G=0$

OBEN SCHLIESSEN:  $\oint = 2\pi j \cdot \text{RESIDUUM}$ , HALBKREIS  $= 0$

ERGO:  $G = 2\pi j \cdot \text{RESIDUUM}$ .



# EIGENFUNKTIONEN

1

$$L|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle$$

$$L^+|v_\ell\rangle = \mu_\ell|v_\ell\rangle$$

EIGENKETS VON  $L, L^+$

WENN  $f(L), R(L^+)$  POTENZREIHEN:

$$f(L)|u_k\rangle = f(\lambda_k)|u_k\rangle$$

$$R(L^+)|v_\ell\rangle = R(\mu_\ell)|v_\ell\rangle$$

MAN KANN BEWEISEN:

$$\langle v_\ell | u_k \rangle = \delta(\ell, k) \quad \lambda_k = \mu_k^* \quad \int_k |u_k\rangle dk \langle v_k| = \int_\ell |v_\ell\rangle d\ell \langle u_\ell| = I$$

MIT BASIS

$$\int |x\rangle u(x) dx \langle x| = I \quad \langle x|x'\rangle = \frac{\delta(x-x')}{u(x)} \quad \langle x|u_k\rangle = \begin{cases} u(k, x) & \text{1. KONTIN.} \\ u_k(x) & \text{2. DISKRET} \end{cases}$$

KANN MAN JEDE FUNKTION ENTWEDER NACH FUNKTIONEN  $u_k(x)$  ODER  $v_\ell(x)$  ENTWICKELN. BEISPIEL:

$$|\varphi\rangle = I|\varphi\rangle = \int_k |u_k\rangle dk \langle v_k|\varphi\rangle$$

$$\varphi(x) = \langle x|\varphi\rangle = \int_k \langle x|u_k\rangle dk \int \langle v_k|x_0\rangle u(x_0) dx_0 \langle x_0|\varphi\rangle$$

$$= \int_k u(k, x) dk \int v^*(k, x_0) \varphi(x_0) u(x_0) dx_0$$

$$= \sum_k u_k(x) \int v_k^*(x_0) \varphi(x_0) u(x_0) dx_0 + \int u(k, x) \left[ \int v^*(k, x_0) \varphi(x_0) u(x_0) dx_0 \right] dk$$

EIGENFUNKTIONEN SIND LÖSUNGEN VON  $L|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle$ , D.H.  $L u_k(x) = \lambda_k u_k(x)$  ODER  $L u(k, x) = \lambda(k) u(k, x)$  (KONT.+DISKR. SPEKTRUM) ZU BESTIMMTEN RANDBEDINGUNGEN (BEACHT: NORMIERBAR, DA  $\langle v_\ell | u_k \rangle = \delta(\ell, k)$  GEFORDERT!)

SPEZIELL HERMITESCHE OPERATOREN  $L = L^+$ :

$$\langle u_\ell | u_k \rangle = \delta(\ell, k) \quad \int_k |u_k\rangle dk \langle u_k| = I \quad \text{EIGENWERTE SIND REELL!}$$

IST  $|\varphi\rangle$  EINE NÄHERUNG VON  $|u_k\rangle$  (ABWEICHUNG  $\sim \epsilon$ ), SO GILT

$$\frac{\langle \varphi | L | \varphi \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle} = \lambda_k + O(\epsilon^2) \quad \text{SCHLECHTE NÄHERUNG FÜR } |u_k\rangle \text{ GIBT GUTE NÄHERUNG FÜR EIGENWERT}$$

BEISPIEL:  $L = L^+$  ( $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ ,  $L: u(0) = u(\pi) = 0$ )

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda u \rightarrow u(x) \sim \sin(x\sqrt{\lambda}), \text{ DA } \pi\sqrt{\lambda} = k\pi \rightarrow \lambda = k^2, k=1, 2, \dots \quad (k=0 \text{ KEINE LÖSUNG!!})$$

$$u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx) \quad (\text{NORMIERT, } \langle u_k | u_k \rangle = 1)$$

WEGEN  $\sum_k |u_k\rangle \langle u_k| = I \rightarrow \sum_k \langle x|u_k\rangle \langle u_k|x'\rangle = \langle x|x'\rangle$  FOLGT:

$$\sum_k u_k(x) \cdot u_k^*(x') = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx) \sin(kx') = \delta(x-x') \quad \text{DAMIT JEDE FUNKTION ENTWICKELT IN } 0 < x < \pi$$

$$\varphi(x) = \int \delta(x-x_0) \varphi(x_0) dx_0 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx) \int_0^{\pi} \varphi(x_0) \sin(kx_0) dx_0$$

ACHTUNG: RANDWERTE EVENTUELL NUR AUS INTERVALLINNEREM ERBEICHT!

# 1. OPERATORFUNKTIONEN, UMKEHROPERATOREN (GREENSCHER OP.)

AUS  $\underline{L}|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle$      $\langle u_k|v_e\rangle = \delta(k,e)$      $\int |u_k\rangle dk \langle v_k| = \int |v_e\rangle de \langle u_e| = \underline{I}$   
 $\underline{L}^+|v_e\rangle = \mu_e|v_e\rangle$      $\mu_k = \lambda_k^*$

FOLGT  $f(\underline{L}) = f(\underline{L})\underline{I} = \int |u_k\rangle f(\lambda_k) dk \langle v_k|$     SPEKTRALDARSTELLUNG  
 $f(\underline{L}^+) = f(\underline{L}^+)\underline{I} = \int |v_e\rangle f(\mu_e) de \langle u_e|$

ERGO WIRKUNG EINER OP.FUNKTION AUF BELIEBIGEN KET BEKANNT:

$f(\underline{L})|g\rangle = f(\underline{L}) \int |u_k\rangle dk \langle v_k|g\rangle = \int |u_k\rangle f(\lambda_k) dk \langle v_k|g\rangle$

$f(\underline{L}^+)|g\rangle = f(\underline{L}^+) \int |v_e\rangle de \langle u_e|g\rangle = \int |v_e\rangle f(\mu_e) de \langle u_e|g\rangle$

ANWENDUNG:

$f(\underline{L}) = \underline{L}^{-1} = \underline{G}$  ; PROBLEM:  $\underline{L}|\varphi\rangle = |g\rangle$

LÖSUNG:  $|\varphi\rangle = \underline{L}^{-1}|g\rangle$ , SIEHE OBEN:

$|\varphi\rangle = \int \frac{|u_k\rangle dk \langle v_k|g\rangle}{\lambda_k}$      $\underline{G} = \int \frac{|u_k\rangle dk \langle v_k|}{\lambda_k}$

IN KOMPONENTEN BEZÜGLICH EINER BASIS  $\int |x\rangle u(x) dx \langle x| = \underline{I}$      $\langle x|x'\rangle = \frac{\delta(x-x')}{u(x)}$

$\varphi(x) = \langle x|\varphi\rangle = \int \frac{u(k,x) dk}{\lambda_k} \cdot \int v^*(k,x_0) g(x_0) u(x_0) dx_0$

$G(x,x_0) = \langle x|\underline{G}|x_0\rangle = \int \frac{u(k,x) v^*(k,x_0)}{\lambda_k} dk$

## 2. STÖRUNGSRECHNUNG

VON FRÜHER:  $\underline{L} = \underline{L}_1 + \underline{L}_2$  (L, L<sub>2</sub> INHOMOG. RB)

$\underline{L}$  (L, L<sub>2</sub> HOMOG. RB)

$\underline{L}^+$  (L<sup>+</sup>, L<sup>+</sup> ADJUNG. RB)

$\underline{L}_1 = \underline{L}_e + \underline{L}_1$  ;  $\underline{G}\underline{L} = \underline{G}\underline{L}_e = \underline{I}$

$\langle v|\underline{L}_1|w\rangle = K(v^*,w)|_0^1 = K(\langle v|x_0\rangle, \langle x_0|w\rangle)|_{x_0=0}^{x_0=1}$

ANWENDUNG  $\underline{L} = \underline{L}^+$ ,  $\mu_k = \lambda_k$  (DISKR. SPEKTRUM),  $|u_k\rangle = |v_k\rangle$  SEI BEKANNT.

GESUCHT:  $\underline{L}_1|w\rangle = \beta|w\rangle$      $|w\rangle = ?$      $\beta = ?$

$(\underline{L}_1 - \underline{L}_e)|w\rangle = \underline{L}_1|w\rangle = \sum |u_k\rangle \langle u_k|\underline{L}_1|w\rangle$

$|w\rangle = (\underline{L}_1 - \underline{L}_e)^{-1} \sum |u_k\rangle \langle u_k|\underline{L}_1|w\rangle = \sum \frac{|u_k\rangle \langle u_k|\underline{L}_1|w\rangle}{\beta - \lambda_k}$

ANNAHME: MAN SUCHE  $|w\rangle$ , DAS FÜR  $\underline{L}_1 = 0 \rightarrow |u_n\rangle$  GEHT!

$|w\rangle = |u_n\rangle \cdot \underbrace{\frac{\langle u_n|\underline{L}_1|w\rangle}{\beta - \lambda_n}}_1 + \sum_{k \neq n} |u_k\rangle \cdot \frac{\langle u_k|\underline{L}_1|w\rangle}{\beta - \lambda_k}$

ERGO:  $\beta = \lambda_n + \langle u_n|\underline{L}_1|w\rangle$

SUKZESSIVE NÄHERUNGEN, ALS NULLTE NÄHERUNG  $|w_0\rangle = |u_n\rangle$ ,  $\beta^{(0)} = \lambda_n$  GESETZT

### 3. BEZIEHUNG ZUR SCHRÖDINGERGEICHUNG

$L u(x) = \lambda u(x)$ ,  $u(x)$  AUS  $\mathcal{L}$  (HOMOG. RB),  $L = -\frac{1}{\hbar} \frac{d}{dx} (p \frac{d}{dx}) + q$  IST TRANSFORMIERBAR (FORMEL S. ABSCHN. 3.4)

IN:  $\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} + [\lambda - Q(\xi)] y(\xi) = 0$   $\lambda$  ENERGIEEIGENWERT  
 $Q$  POTENTIALVERTEILUNG

WKB(-) - NÄHERUNG GILT FÜR  $\lambda$  NICHT „NAHE“  $\lambda = Q(\xi)$ ;  $Q(\xi) \rightarrow 0$  FÜR  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , DANN ASYMPTOTISCHE LÖSUNGEN  $y \sim \exp(\pm j \xi \sqrt{\lambda})$  (WELLE)

ACHTUNG: LÖSUNGEN, DIE  $\lambda = Q$  EINSCHLIESSEN, SIEHE

GHATAK, A.K.; GALLAWAY, R.L.; GOYAL, I.C.: MODIFIED AIRY FUNCTION AND WKB SOLUTIONS TO THE WAVE EQUATION. NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY NIST MONOGRAPH 176, U.S. GOVERNMENT PRINTING OFFICE, WASHINGTON 1991. (AM INSTITUT IN DER BIBLIOTHEK SIGNATUR G 117)

### 4. EIGENFUNKTIONEN, EIGENWERTE AUS $G_\lambda(x, x_0) = \langle x | G_\lambda | x_0 \rangle$ BERECHNEN

$G_\lambda$  WIRD DEFINIERT ALS:  $(L - \lambda I) G_\lambda = I$

$\langle x | (L - \lambda I) G_\lambda | x_0 \rangle - \lambda \langle x | G_\lambda | x_0 \rangle = \langle x | x_0 \rangle \longrightarrow L G_\lambda(x, x_0) - \lambda G_\lambda(x, x_0) = \frac{\delta(x - x_0)}{\hbar(x)}$   $G_\lambda$  AUS  $\mathcal{L}$

$G_\lambda = (L - \lambda I)^{-1} = (L - \lambda I)^{-1} \int |u_k\rangle dk \langle v_k| = - \int \frac{|u_k\rangle dk \langle v_k|}{\lambda - \lambda_k}$   
 $= - \sum \frac{|u_k\rangle \langle v_k|}{\lambda - \lambda_k} - \int \frac{|u_k\rangle dk \langle v_k|}{\lambda - \lambda(k)}$ , DAS HEISST

$G_\lambda(x, x_0) = - \sum \frac{u_k(x) v_k^*(x_0)}{\lambda - \lambda_k} - \int \frac{u(k, x) v^*(k, x_0) dk}{\lambda - \lambda_k}$

IN KOMPLEXER  $\lambda$ -EBENE :

- a) DISKRETE EIGENWERTE SIND POLE 1. ORDNUNG
- b) AUS RESIDUEN KANN  $u_k(x)$ ,  $v_k^*(x)$  ABGELESEN WERDEN.
- c) ANTEILE DES KONTINUIERLICHEN SPEKTRUMS ENTSPRECHEN EINEM VERZWEIGUNGSSCHNITT IN DER  $\lambda$ -EBENE. (BEI  $L = L^+$  LIEGT DIESER AUF DER REELLEN AXSE, DA JA  $\lambda(k)$  REELL SEIN MUSS)

BILDET MAN EIN UMLAUFINTEGRAL VON  $G_\lambda$  ÜBER EINEN BEREICH, DER ALLE POLE 1. ORDNUNG ENTHÄLT, SO FOLGT:

$\frac{1}{2\pi j} \oint G_\lambda(x, x_0) d\lambda = - \sum u_k(x) v_k^*(x_0) = \int u(k, x) v^*(k, x_0) dk - \frac{\delta(x - x_0)}{\hbar(x)}$

DIE LETZTE BEZIEHUNG FOLGT AUS

$\int |u_k\rangle dk \langle v_k| = \sum |u_k\rangle \langle v_k| + \int |u_k\rangle dk \langle v_k| = I$

UND BILDEN DER MATRIXELEMENTE MIT  $\langle x, | x_0 \rangle$



# 1. ADJUNGIERTER OPERATOR + OPERATORBEREICH (VERALLGEMEINERT)

$\underline{L}$  ( $\mathcal{L}, \mathcal{L}$  HOMOGENE RB)  
 $\underline{L}^+$  ( $\mathcal{L}^+, \mathcal{L}^+$ ) FOLGT AUS:

ANNAHME:  $u(x) = 1$

$$\langle v | \underline{L} | u \rangle = \langle u | \underline{L}^+ | v \rangle^* + k(v^*, u) \Big|_0^1 \quad \text{MIT} \quad k(v^*, u) \Big|_0^1 = \int_0^1 \frac{dK(v^*, u)}{dx} dx = 0$$

$$\int v^*(x) L u(x) dx = \int u(x) [L^+ v(x)]^* dx + k(v^*, u) \Big|_0^1$$

IN  $n$  DIMENSIONEN:

$$\langle v | \underline{L} | u \rangle = \langle u | \underline{L}^+ | v \rangle^* + \oint e_i k_i(v^*, u) d\sigma \quad \text{MIT} \quad \oint e_i k_i(v^*, u) d\sigma = \int \partial_i k_i(v^*, u) d\tau = 0$$

$$\int v^*(x_i) L u(x_i) d\tau = \int u(x_i) [L^+ v(x_i)]^* d\tau + \oint e_i k_i(v^*, u) d\sigma$$

DADURCH SIND  $\mathcal{L}^+, \mathcal{L}^+$  DEFINIERT (WIEDER  $\mathcal{L}$  ZU HOMOGENEN RB)

## 2. INVERSER OPERATOR

$$\underline{L} | u \rangle = | g \rangle \quad \underline{L}^{-1} = \underline{G} \quad | u \rangle = \underline{L}^{-1} | g \rangle = \underline{G} | g \rangle$$

$$\text{AUS } \underline{L} \underline{G} = \underline{I} \rightarrow \langle x | \underline{L} \underline{G} | x_0 \rangle = \langle x | x_0 \rangle = L \langle x | \underline{G} | x_0 \rangle = LG(x, x_0) = \delta(x - x_0)$$

IN  $n$ -DIMENSIONEN:  $LG(x_i, x_{i0}) = \delta(x_i - x_{i0}) = \delta(x_1 - x_{10}) \delta(x_2 - x_{20}) \dots \delta(x_n - x_{n0})$   
 (MIT HOMOGENEN RB FÜR  $G$ )

## 3. LÖSUNG INHOMOGENER PROBLEME IN DEN RANDBEDINGUNGEN

ZUSÄTZLICH  $\underline{L}_I$  ( $\mathcal{L}, \mathcal{L}_I$  INHOMOG. RB)  $\underline{L}_I = \underline{L}_e + \underline{L}_1 \quad \underline{G} \underline{L}_I = \underline{G} \underline{L}_e = \underline{I}$

$$\underline{L}_I | w \rangle = | g \rangle \rightarrow \underline{L}_e | w \rangle = | g \rangle - \underline{L}_1 | w \rangle \rightarrow | w \rangle = \underline{G} | g \rangle - \underline{G} \underline{L}_1 | w \rangle$$

VON FRÜHER:  $\underline{L}_1$  DEFINIERT AUS:  $\langle v | \underline{L}_1 | w \rangle = k(v^*, w) \Big|_0^1 = k(\langle v | x \rangle, \langle x | w \rangle) \Big|_0^1$

$$\text{LÖSUNG: } w(x) = \langle x | w \rangle = \langle x | \underline{G} | g \rangle - \langle x | \underline{G} \underline{L}_1 | w \rangle = \int \langle x | \underline{G} | x_0 \rangle dx_0 \langle x_0 | g \rangle - \langle x | \underline{G} \underline{L}_1 | w \rangle$$

$$= \int G(x, x_0) g(x_0) dx_0 - k[\langle x | \underline{G} | x_0 \rangle, \langle x_0 | w \rangle]_{x_0=0}^{x_0=1}$$

$$= \int G(x, x_0) g(x_0) dx_0 - k[G(x, x_0), w(x_0)]_{x_0=0}^{x_0=1}$$

VERALLGEMEINERT:  $\langle v | \underline{L}_I | w \rangle = \oint e_i k_i(v^*, w) d\sigma = \int \partial_i k_i(v^*, w) d\tau$

### LÖSUNG DES INHOMOGENEN PROBLEMS IN ANALOGIE

$$w(x_i) = \int G(x_i, x_{i0}) g(x_{i0}) d\tau_0 - \oint e_{i0} k_i[G(x_i, x_{i0}), w(x_{i0})] d\sigma_0$$

$$= \int G(x_i, x_{i0}) g(x_{i0}) d\tau_0 - \int \partial_{i0} k_i[G(x_i, x_{i0}), w(x_{i0})] d\tau_0$$

ZU BEANTWORTEN SIND 2 FRAGEN:

1. WIE LÖST MAN DIE PARTIELLE DGL  $LG(x_i, x_{i0}) = \delta(x_i - x_{i0})$  ?
2. WIE BERECHNET MAN DEN KONJUNKTVEKTOR  $k_i(v^*(x_i), u(x_i))$  ?  
 (BEACHT: EINDEUTIG BIS AUF BEITRÄGE FÜR DIE  $\partial_i k_i = 0$  IST, ALSO DIE  $n$ -DIMENSIONALE DIVERGENZ VERSCHWINDET.)

# WIEDERHOLUNG EINIGER FORMELN

## 1. BASISSYSTEM

L DEFINIERT DURCH  $L, \rho$

$$L = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{dx} \left( \rho \frac{d}{dx} \right) + q$$

$$\underline{I} = \int \langle x | \rho(x) dx \langle x | \quad \langle x | x_0 \rangle = \frac{\delta(x-x_0)}{\rho(x)}$$

$$\langle x | \underline{L} | u \rangle \doteq L \langle x | u \rangle = L u(x)$$

## 2. EIGENFUNKTIONEN

$$\underline{L} | u_k \rangle = \lambda_k | u_k \rangle$$

$$\underline{L}^+ | v_k \rangle = \mu_k | v_k \rangle$$

$$\mu_k = \lambda_k^*$$

$$\langle u_k | v_l \rangle = \delta(k, l)$$

$$\int u_k^*(k, x) v(l, x) \rho(x) dx = \delta(k, l)$$

$$\underline{I} = \int_k | u_k \rangle dk \langle v_k |$$

$$\frac{\delta(x-x_0)}{\rho(x)} = \int_k u(k, x) v^*(k, x_0) dk$$

$$f(\underline{L}) = \int_k | u_k \rangle f(\lambda_k) dk \langle v_k |$$

$$f(\underline{L}) \frac{\delta(x-x_0)}{\rho(x)} = \int_k f(\lambda_k) u(k, x) v^*(k, x_0) dk$$

### SPEZIELL FÜR DISKRETE EIGENFUNKTIONEN

$$\langle u_k | v_l \rangle = \delta_{kl}$$

$$\int u_k^*(x) v_l(x) \rho(x) dx = \delta_{kl}$$

$$\underline{I} = \sum_k | u_k \rangle \langle v_k |$$

$$\frac{\delta(x-x_0)}{\rho(x)} = \sum_k u_k(x) v_k^*(x_0)$$

$$f(\underline{L}) = \sum_k f(\lambda_k) | u_k \rangle \langle v_k |$$

$$f(\underline{L}) \frac{\delta(x-x_0)}{\rho(x)} = \sum_k f(\lambda_k) u_k(x) v_k^*(x_0)$$

### SPEZIELL FÜR KONTINUIERLICHES SPEKTRUM UND $\rho(x)=1$

$$\langle u_k | v_l \rangle = \delta(k-l)$$

$$\int u_k^*(k, x) v(l, x) dx = \delta(k-l)$$

$$\underline{I} = \int | u_k \rangle dk \langle v_k |$$

$$\delta(x-x_0) = \int u(k, x) v^*(k, x_0) dk$$

$$f(\underline{L}) = \int f(\lambda_k) | u_k \rangle dk \langle v_k |$$

$$f(\underline{L}) \delta(x-x_0) = \int f(\lambda_k) u(k, x) v^*(k, x_0) dk$$

### OPERATORINVERSION

$\underline{P}_i$  AUS  $U_1$ ,  $\underline{Q}_i$  AUS  $U_2$  MIT  $[\underline{P}_i, \underline{Q}_j] = 0$ ,  $[\underline{Q}_i, \underline{Q}_j] = 0$

$\underline{L} = \sum_i \underline{P}_i \underline{Q}_i$  : ALLE  $\underline{Q}_i$  KÖNNEN BEI INVERSION VON  $\underline{L}$  ALS KONSTANTE BETRACHTET WERDEN

## ADJUNGIERTER OPERATOR ZU $L = p \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$

$$\langle v | L | u \rangle = \int v^* p \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} d\tau =$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial u}{\partial x_1} v^* p \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} dx_2 dx_3 \dots dx_n - \int \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} (v^* p) d\tau = \\ & = \int \frac{\partial}{\partial x_1} \left( p v^* \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) d\tau - \int u \frac{\partial}{\partial x_1} (p v^*) \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} dx_2 dx_3 \dots dx_n + \\ & \quad + \int u \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (p v^*) d\tau = \\ & = \int \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ p v^* \frac{\partial u}{\partial x_1} - u \frac{\partial}{\partial x_1} (p v^*) \right] d\tau + \int u \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (p v^*) \right]^* d\tau = \\ & = \int \frac{\partial}{\partial x_1} K_1(v^*, u) d\tau + \int u (L^+ v)^* d\tau \end{aligned}$$

DURCH VERGLEICH:

$$K_1(v^*, u) = p v^* \frac{\partial u}{\partial x_1} - u \frac{\partial}{\partial x_1} (p v^*)$$

$$L^+ = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (p \dots)$$

BEACHTEN:

$$\int v du = v u \Big|_1^2 - \int u dv$$

## ADJUNGIERTER OPERATOR ZU $L = p \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$

$$\begin{aligned}
 \langle v | L | u \rangle &= \int v^* p \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} d\tau = \\
 &= \int v^* p \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_1=0}^{x_1=1} dx_2 dx_3 \dots dx_n - \int \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (v^* p) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\
 &= \int \frac{\partial}{\partial x_1} (v^* p \frac{\partial u}{\partial x_2}) dx_1 dx_2 \dots dx_n - \int u \frac{\partial}{\partial x_1} (v^* p) \Big|_{x_2=0}^{x_2=1} dx_1 \dots dx_3 \dots dx_n + \\
 &\quad + \int u \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (v^* p) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\
 &= \int \frac{\partial}{\partial x_1} (p v^* \frac{\partial u}{\partial x_2}) d\tau + \int u \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (p^* v) \right]^* d\tau - \\
 &\quad - \int \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ u \frac{\partial}{\partial x_1} (p v^*) \right] d\tau = \\
 &= \int \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} K_1(v^*, u) + \frac{\partial}{\partial x_2} K_2(v^*, u) \right] d\tau + \int u (L^+ v)^* d\tau
 \end{aligned}$$

DURCH VERGLEICH:

$$K_1(v^*, u) = p v^* \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

$$K_2(v^*, u) = -u \frac{\partial}{\partial x_1} (p v^*)$$

$$L^+ = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (p^* \dots)$$

BEACHTEN:

$$\int v du = v u \Big|_1^2 - \int u dv$$