

Dr.-Ing. W. Freude
Institut für Hochfrequenztechnik
und Quantenelektronik der
Universität, Kaiserstr. 12
7500 Karlsruhe

Optoelektronik

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	<u>Seite</u>
1. Elektronen in Festkörpern und elektromagnetische Wellen	1
2. Festkörperphysikalische Grundlagen	2
2.1. Elektronenbandstruktur	2
2.2. Phononenbandstruktur	14
2.3. Streuprozesse	17
2.3.1. Streuung an akustischen Phononen	17
2.3.2. Streuung an optischen Phononen	18
2.3.3. Metall- und Zwitterstreuung	18
2.3.4. Störstellenstreuung	18
2.3.5. Beweglichkeit und Sättigungsdriftgeschwindigkeit	19
3. Optische Grundlagen	21
3.1. Atomistische Deutung der Dispersion	25
3.2. Reflexion und Brechung an ebenen Grenzflächen	33
3.3. Dielektrischer Resonator	42
3.3.1. Symmetrischer Schichtwellenleiter	42
3.3.2. Schichtwellenleiter - Resonator	47
3.3.3. Streifenwellenleiter	51
3.3.4. Streifenwellenleiter mit lateralem Indexprofil	54
3.3.5. Streifenwellenleiter - Resonator	60
4. Wechselwirkung von Strahlung mit Materie	62
4.1. Boltzmann - Verteilung	65
4.2. Emission	66
4.3. Stimulierte Prozesse	68
4.3.1. Stimulierte Verstärkung	71

Dr.-Ing. W. Freude
Institut für Hochfrequenztechnik
und Quantenelektronik der
Universität, Kaiserstr. 12
7800 Karlsruhe

Optoelektronik

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
1. Elektronen in Festkörpern und elektromagnetische Wellen	1
2. Festkörperphysikalische Grundlagen	2
2.1. Elektronenbandstruktur	2
2.2. Phononenbandstruktur	14
2.3. Streuprozesse	17
2.3.1. Streuung an akustischen Phononen	17
2.3.2. Streuung an optischen Phononen	18
2.3.3. Unstetigkeits- und Zwischenfallstreuung	18
2.3.4. Störstellenstreuung	18
2.3.5. Beweglichkeit und Sättigungsdriftgeschwindigkeit	19
3. Optische Grundlagen	24
3.1. Atomistische Deutung der Dispersion	25
3.2. Reflexion und Brechung an ebenen Grenzflächen	33
3.3. Dielektrischer Resonator	42
3.3.1. Symmetrischer Schichtwellenleiter	42
3.3.2. Schichtwellenleiter - Resonator	47
3.3.3. Streifenwellenleiter	51
3.3.4. Streifenwellenleiter mit lateralem Indexprofil	54
3.3.5. Streifenwellenleiter - Resonator	60
4. Wechselwirkung von Strahlung mit Materie	62
4.1. Boltzmann - Verteilung	65
4.2. Emission	66
4.3. Stimulierte Prozesse	68
4.3.1. Stimulierte Verstärkung	71

Inhaltsverzeichnis (Fortsetzung)

Seite

4.2.2. Laser-Oszillator	73
4.3.3. Bildentstehungen des Laser-Oszillators	77
5. Optoelektronische Sender	91
5.1. Bauformen von Injektionslasern	119
5.1.1. Doppel-Hetero-Laser (DH)	120
5.1.2. Sperrschicht-DH-Laser (DCC, DS)	125
5.1.3. Buried-Hetero-Laser (BH)	126
5.1.4. Channelled-Substrate-Planar-Laser (CSP)	128
5.1.5. Transverse-Junction-Stripe-Laser (TJS)	129
5.1.6. Einfluss der axiellen Trägerdiffusion	131
5.2. Superlumineszenz-Diode	131
5.3. Lumineszenz-Diode	132
5.4. Ausblick	133
6. Optoelektronische Empfänger	135
6.1. Photodiode	138
6.2. pin-Photodiode	146
6.3. Lawinen-Photodiode	150
6.4. Phototransistor	166
6.5. Photoeffekttransistor	167
6.6. Optokoppler	167
6.7. Photo Widerstand	168
6.8. Ausblick	171
7. Literaturhinweise	172
7.1. Bücher	172
7.2. Einzelartikel - Optoelektronische Sender	173
7.3. Einzelartikel - Optoelektronische Empfänger	176

Korrekturen zur Vorlesung "Optoelektronik"

- S.3 S.Z.v.M. Energieumrichtbarkeit \rightarrow Impulsrichtbarkeit
- S.10 Bl. (2-22) $\sin \alpha k_0 \rightarrow \sin \alpha_{no} k_0$
 Bl. (2-23) $\cos \alpha k_0 \rightarrow \cos \alpha_{no} k_0$
 Bl. (2-24) $\frac{\partial^2 E(k_0)}{\partial k_x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 E(k_0)}{\partial k_y^2}$
- S.12 Bl. (2-28, 29, 30) Auf der rechten Seite dieser Gleichung fehlt der Faktor 2.
- S.13 S.Z.v.M. überschläpfig \rightarrow überschlämfig
- S.17 S.Z.v.O. kleiner \rightarrow größer
- S.19 10.Z.v.U. umgepöhr bei 500K \rightarrow bei höheren Temperaturen
- S.23 Bl. (3-16) $-j\alpha \rightarrow -j\alpha/2$
 13.Z.v.O. $\alpha = \gamma/k_0 \rightarrow \alpha = 2k_0\gamma$
- S.24 Tabelle 3-2 $\lim_{\omega \rightarrow 0} n \rightarrow n$
- S.25 11.Z.v.O. 1980 \rightarrow 1880
- S.28 11.Z.v.O. $\epsilon > 0$ für $\omega > 0 \rightarrow \epsilon' > 0$ für $\omega > 0$,
- S.29 14.Z.v.M. $\alpha = \gamma k_0 > 0 \rightarrow \alpha = 2\gamma k_0 > 0$
- S.39 Bl. (3-71) $j\sqrt{\dots} \rightarrow \pm j\sqrt{\dots}$
- S.40 Bl. (3-75) $\delta = \frac{1}{k_{zx}} \rightarrow \delta = \frac{1}{|k_{zx}|}$
- S.42 3.Z.v.M. deshalb Leckwellen \rightarrow gebrochene Moden
- S.43 3.Z.v.O. Leckwellen \rightarrow gebrochene Moden
- S.44 Bl. (3-84, 88), 2. u. 13. Z.v.U. $V \rightarrow V_D$
- S.47 14. u. 15. Z.v.U. $R_e \rightarrow R_{es}, R_m \rightarrow R_{ms}, R \rightarrow R_f$
- S.48 9.Z.v.M. $m_D = 2, m_L = N_2, m_D = 0, m_L = N_0 \rightarrow m_D = 0, m_L = N_0, m_D = 2, m_L = N_2$
- S.51 13.Z.v.O. u. Bl. (3-111) $k \rightarrow k_0$
- S.52 Bl. (3-113) $k \rightarrow k_0$
- S.55 S.Z.v.O. $\gamma(y) = \alpha(y)/k_0 \rightarrow \gamma(y) = \frac{1}{2} \alpha(y)/k_0$
- S.56 Bl. (3-127) $-\Delta \epsilon_{r10}'' (\Omega + j) \rightarrow -k_0 \Delta \epsilon_{r10}'' (\Omega + j)$
 Bl. (3-128) $\Delta \epsilon'' \rightarrow \Delta \epsilon_{r10}''$
- S.57 Bl. (3-129) $\Delta \epsilon'' \rightarrow \Delta \epsilon_{r10}''$
 Bl. (3-136) $H_1(\eta) = \eta \rightarrow H_1(\eta) = 2\eta$
- S.61 Bl. (3-144) Faktor $\frac{b/B}{2/L}$ fehlt,
 Bl. (3-150) Faktor $\frac{d/D}{2/L}$ fehlt auf der rechten Seite der Gleichung
- S.68 Bl. (4-17) $M < Q > \rightarrow 2M < Q >$
- S.69 Bl. (4-19) $[A_{21} - D_{21} M(f_{11})] \rightarrow [A_{21} + D_{21} M(f_{11})]$
- S.70 Seitennummer -70- \rightarrow -70a-
 Bl. (4-25, 26) unter Bl. (4-25) zusammenfassen
 Nach -70a- Seite -70b- einfügen
- S.71 Bl. (4-28) $\ln(N_{21} - N_{12})$ ist zu streichen
- S.72 Die ältte S. 72 ist zu streichen
- S.73 Bl. (4-35) $v(\alpha + \alpha') = 1 \rightarrow v(\alpha + \alpha')^{-1} = 1$
- S.74 3.Z.v.O. Nino \rightarrow Pater
 4.Z.v.O., 2.Z.v.M. Resonatorvolumen \rightarrow Resonatormodus
 1.Z.v.U. Bl. (4-26, 27) \rightarrow Bl. (4-25, 27)

Korrektur zur Vorlesung "Optoelektronik" (Fortsetzung)

- S. 75 Bl. (4-40) $N_{M1} = \rightarrow N_{M1}' =$
- S. 76 6. z. v. u. Bl. (4-52, 53) \rightarrow Bl. (4-57, 59)
1. z. v. u. Der letzte Halbzitat zu streichen.
- S. 77 17. z. v. o. $S_{ph} \nu(f) \rightarrow$ die Photonen dichte S in einem Modus;
Bl. (4-43) $\frac{N_e A_{21}}{N_M} \rightarrow \frac{N_e A_{21}}{V N_{Mf}}$
- S. 78, 79, 80 Die älteren Seiten sind zu entfernen.
- S. 78 Bl. (4-44) $N_{M1}' \rightarrow N_{Mf}'$, $N_M \rightarrow N_{Mf}$
Bl. (4-46) $N_M \rightarrow N_{Mf}$
- S. 79 Bl. (4-47, 48, 50) $N_M \rightarrow N_{Mf}$
- S. 80 K. (4-52) $\frac{N_M}{\gamma_{int} \tau_p} = \frac{K}{V Q \gamma_{int} \tau_p} \rightarrow \frac{N_{Mf}}{\gamma_{int} \tau_p} = \frac{K}{V Q \tau_p}$
- S. 81 Bl. (4-57) $\tau_p (S_{ph} \nu V + 1) \rightarrow \tau_p (S V + 1)$
- S. 82 Bl. (4-59) $\frac{1}{S_{ph} \nu V + 1} \rightarrow \frac{1}{S V + 1}$
- S. 85 Bl. (4-67) $X_0 X_1 \rightarrow X_0 Y_1$
- S. 95 Bl. (5-9) $N_e N_v \rightarrow N_{0e} N_{0v}$
- S. 98 3. z. v. o. Absorptionsrate \rightarrow Emissionsrate
- S. 106 Bl. (4-41) \rightarrow Bl. (5-41)
Bl. (5-51) $= (V \tau_p)^{-1} \rightarrow \approx \{P_{KPP}\} \approx \frac{1}{V \tau_p} \cdot \eta$
18. z. v. u. $(V \tau_p)^{-1} \rightarrow \tau_p$
- S. 109 Alle Bl. (4-...) \rightarrow Bl. (5-...)
- S. 110 Die ältere Seite ist zu entfernen.
- S. 111 Bl. (5-49) $e \rightarrow e R_b$
- S. 128 1. z. v. o. Channelled \rightarrow Channelled
- S. 133 5.3. Ausblick \rightarrow 5.6. Ausblick
- S. 140 Bl. (6-5, 6) $f - g_{ph} \rightarrow g$
- S. 149 6./7. z. v. o. $i_{ph} \sim e^{-\delta t / \tau_d} \rightarrow i_{ph} \sim 2\delta \left(1 - \frac{\delta}{\tau_d}\right) \approx 2\delta e^{-t/\tau_d}$
- S. 163 3. z. v. o. beider \rightarrow beidem

1. Elektronen in Festkörpern und elektromagnetische Wellen

Der Begriff "Optoelektronik" umfasst die physikalischen Zusammenhänge der Wechselwirkung von elektromagnetischen Wellen und Elektronen in Festkörpern. Entweder handelt es sich dabei um die Absorption von Strahlung mit entsprechenden Auswirkungen im Elektronensystem, oder um die Emission von Strahlung, Lumineszenz genannt, verursacht durch den Elektronenfluss in Halbleitern.

Das Spektrum dieser elektromagnetischen Wellen liegt im Wellenlängenbereich $0,1 \mu\text{m}$ bis $5 \mu\text{m}$, vom fernen Ultraviolett (UV) bis ins mittlere Infrarot (IR), umfasst also insbesondere auch den nichtbaren Bereich des Strahlungsspektrums, Bild 1-1, genannt Licht.

Die farbschadenskritischen Bereiche $0,1 \mu\text{m}$ bis $1 \mu\text{m}$ sind in Tabelle 1-1 zusammengefasst.

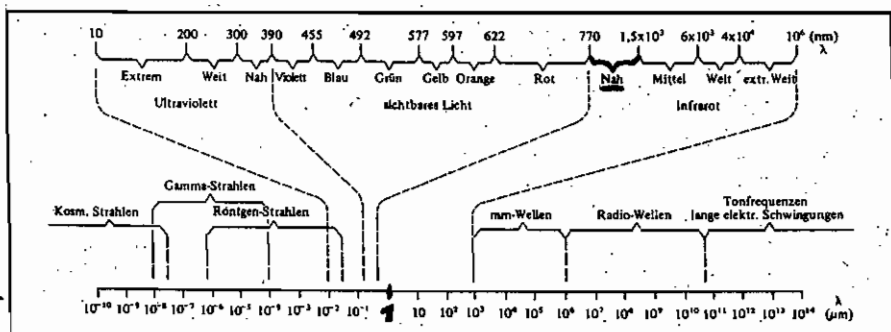


Bild 1-1

Der Schwerpunkt heutiger Forschung

liegt im IR-A-Bereich, also im nahen Infraroten von 800 nm bis $1,4 \mu\text{m}$, weil dort der Übertragungswert im optischen Nachrichtentechnik, die Laser, besonders günstige Eigenschaften aufweist. Die dem ver-

Wellenlängenbereich	Strahlungsbezeichnung
100 nm - 280 nm	UV - C
280 nm - 315 nm	UV - B
315 nm - 380 nm	UV - A
380 nm - 440 nm	Licht - violett
440 nm - 495 nm	Licht - blau
495 nm - 558 nm	Licht - grün
558 nm - 640 nm	Licht - gelb
640 nm - 750 nm	Licht - rot
750 nm - 1 400 nm	IR - A
1,4 μm - 3 μm	IR - B
3 μm - 1 000 μm	IR - C

wandelten optischen Sender und Empfänger haben im Wellenlängenbereich 850 nm bereits einreife erlangt. Die Erdbelegung des Bereichs $1,1 \mu\text{m}$ bis $1,3 \mu\text{m}$ ist abzu-

Tabelle 1-1

2. Festkörperphysikalische Grundlagen

2. 1. Elektronenbandstruktur

In einer Reihe von Experimenten zeigt das Elektron nicht Korpuskular-, sondern Wellencharakter, wie z.B. bei der Abbildung eines Objektes im Elektronenstrahlmikroskop. Die für gewöhnlich wellenförmig angenommene Ausbreitung elektromagnetischer Vorgänge dagegen kann in manchen Versuchsanordnungen besser durch ein Korpuskularbild, die Photonen, beschrieben werden. Ein Beispiel hierfür ist der Compton-Effekt, bei dem Licht an ein Elektron Impuls überträgt. Diese einander ausschließenden Beschreibungsformen derselben Phänomene werden in der Formulierung der Quantentheorie widerspruchsfrei vereinigt.

Kup in einem Experiment dem Elektron der Charakter einer ebenen Welle zugeordnet werden, so ist es nicht sinnvoll, von seinem Ort zu sprechen. Diese Aussage entspricht der Unschärferelation. Daher wird das Elektron quantenmechanisch-statistisch durch Angabe eines Wellenpakets für eine abstrakte, nicht observable (= nicht meßbare) komplexe Größe $\Phi(x,t)$, genannt Wahrscheinlichkeitsamplitude, beschrieben, deren Betragsquadrat

$$P(x \leq x < x+dx) = |\Phi(x,t)|^2 dx \quad (2-1)$$

der Wahrscheinlichkeit P proportional ist, das Teilchen im Intervall $x \dots x+dx$ zur Zeit t anzutreffen, was natürlich meßbar ist.

Quantentheoretische Überlegungen führen zur Schrödingergleichung für die Wahrscheinlichkeitsamplitude Φ ,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \Phi(x,t) = i \hbar \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t}, \quad (2-2)$$

welche die Form der Telegraphengleichung hat. $\hbar = h/2\pi$ ist das Plancksche Wirkungsquantum h bezogen auf 2π , m die (Ruh-)masse des Elektrons und $V(x)$ die potentielle Energie des Elektrons in Abhängigkeit von Ort x . Der Separationsansatz $\Phi(x,t) = u(x) \cdot v(t)$ führt nach Division durch Φ von Gl.(2-2) zur Beziehung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + V(x)u(x) \right] \frac{1}{u(x)} = j\hbar \frac{1}{v(t)} \frac{dv(t)}{dt} \quad (2-3)$$

Da die linke Seite von Gl. (2-3) eine reine Funktion von x , die rechte Seite dagegen eine reine Funktion von t ist, müssen beide Seiten gleich einer sogenannten Separationskonstanten sein, die hier $E = \text{const.}$ genannt wird und gleich der Gesamtenergie des Elektrons ist. Man erhält also die beiden DGLn

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - [E - V(x)]u(x) = 0, \quad (2-4)$$

$$j\hbar \frac{dv(t)}{dt} - Ev(t) = 0. \quad (2-5)$$

Daraus resultieren sofort die Lösungen für das freie Elektron $V(x) = V_0$

$$u(x) = Ae^{jkx} + Be^{-jkx}, \quad (2-6)$$

$$v(t) = e^{-j\frac{E}{\hbar}t} \quad (2-7)$$

$$\psi(x,t) = Ae^{j(kx - \omega t)} + Be^{-j(kx + \omega t)} \quad (2-8)$$

für eine rechts- und eine linkslaufende ψ -Welle des Elektrons. Die kinetische Energie

$$E - V_0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{und die Gesamtenergie } E = \hbar\omega \quad (2-9)$$

definieren die Fortpflanzungskonstante k und Kreisfrequenz ω des Vorgangs.

Es wurde die genaue Kenntnis der Integrationskonstanten E , der Gesamtenergie des Elektrons, vorausgesetzt. Dann ist offenbar über den Aufenthaltsort des Elektrons keine Aussage mehr möglich, da als Ergebnis für die Wahrscheinlichkeitsamplitude eine unendlich ausgedehnte ebene Welle herauskommt.

Ist aber E um ΔE un sicher, so erhält man als Lösung eine Superposition ebener Wellen verschiedener Konstanten E , die eine Wellengruppe bilden und entsprechend ein Maximum der Aufenthaltswahrscheinlichkeit $P \sim |\psi|^2$ liefern. Dann ist auch ein wahrscheinlichster Ort des Elektrons definiert entsprechend der Unschärferelation, wonach das Produkt von Orts- und Impulsunsicherheit eine sehr kleine Konstante in der Größenordnung \hbar ist.

Die Phasengeschwindigkeit

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\hbar} \frac{E}{k} = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V_0)}} \quad (2-10)$$

wird energie- und damit frequenzabhängig, d.h. dispersiv,

und die Gruppengeschwindigkeit

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} = \frac{p}{m} \quad (2-11)$$

entspricht der Information über die Geschwindigkeit des Elektronenkorpuskels. Sie ist daher mit dem mechanischen Impuls p verknüpft.

Folglich gilt die de-Broglie-Beziehung

$$p = mv_{gr} = \frac{m}{\hbar} \frac{dE}{dk} = \left\{ E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right\} = \hbar k = \frac{h}{\lambda} \quad (2-12)$$

die den mechanischen Impuls eines Teilchens mit der zugehörigen Wellenlänge λ verknüpft.

Den Ausdruck $E - V_0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ der Gl. (2-9) nennt man Dispersionsrelation. Er beschreibt (hier für ein freies Elektron), wie die Wellenlänge ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$) mit der Frequenz ($E = \hbar \omega$) zusammenhängt, Bild 2-1.

(Das $E-k$ -Diagramm des freien Photons ist linear!)

Das Verhältnis von E und k ist der Phasengeschwindigkeit proportional und die Steigung der Kurve der Gruppengeschwindigkeit. Der Ast

mit $k < 0$ bedeutet Ausbreitung in negative x -Richtung.

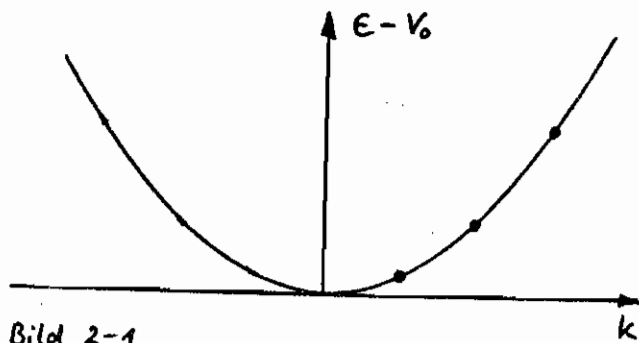


Bild 2-1

Würde man das Elektron in einem Potentialtopf derart einsperren, dass es unendlich hohe Energie braucht, um herauszukommen, so verhält sich die Größe $\psi(x)$ wie eine elektromagnetische Welle in einem Leitungsresonator, der an beiden Enden der Leitung einen Kurzschluss und damit die elektrische Feldstärke Null zur Bedingung hat:

Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron außerhalb des Potentialbarrieren anzutreffen, ist Null. Der mögliche Verlauf der Funktion $\psi(x)$ ist, da sie der Wellengleichung gehorcht, äquivalent dem möglichen Spannungsverlauf eines Leitungsresonators der Länge L . Die Wellenlänge kann nur ganzzahlige Bruchteile von L betragen, folglich wird

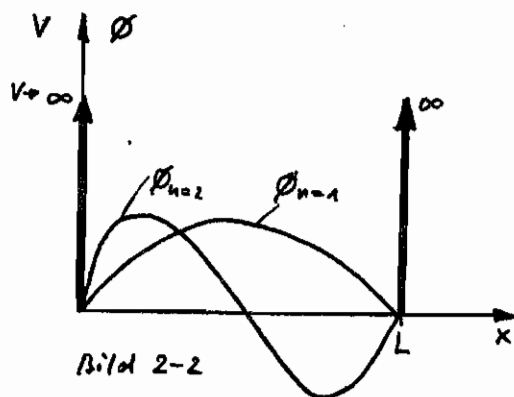


Bild 2-2

(k kann nur positive Werte annehmen, da negative k zum gleichen Schwingungsmodus führt: bei stehenden Wellen Überlagerung von ununterscheidbaren Vor- u. Rückwärtigen)

$$\frac{Lx}{2} = \frac{L}{n} \quad \text{und} \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (2-13)$$

und die Energie kann nur noch diskrete Werte $E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2$ annehmen, die als Punkte in Bild 2-1 eingekreist sind.

Macht man die Potentialwände nicht unendlich hoch, so besteht eine endliche Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Elektron in den Außenraum dringt, and wenn es im klassischen Sinne dann nicht in der Lage wäre, Bild 2-3.

Da das quantenmechanisch betrachtete Elektron in der Lage ist, mit einer Energie $E < V_0$ durch einen Potentialberg hindurch zu dringen, nennt man dieses Phänomen den Tunneleffekt, der bei der Tunnel- und Zenerdiode eine wesentliche Rolle spielt. Dann gibt es ein klassisches Analogon aus der Lichttheorie.

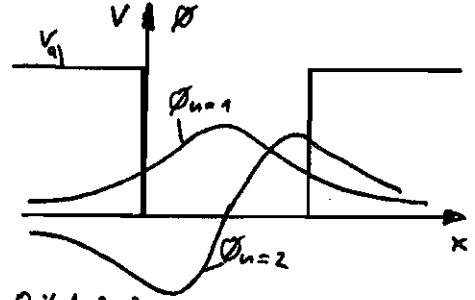


Bild 2-3

Das E-k-Diagramm einer idealen Leiterleitung zeigt dieselbe Abhängigkeit wie der freie Raum: Die Frequenz ist der Wellenlänge umgekehrt proportional. Die Leitung ist dispersionsfrei. Die Phasengeschwindigkeit ist gleich der Gruppengeschwindigkeit.

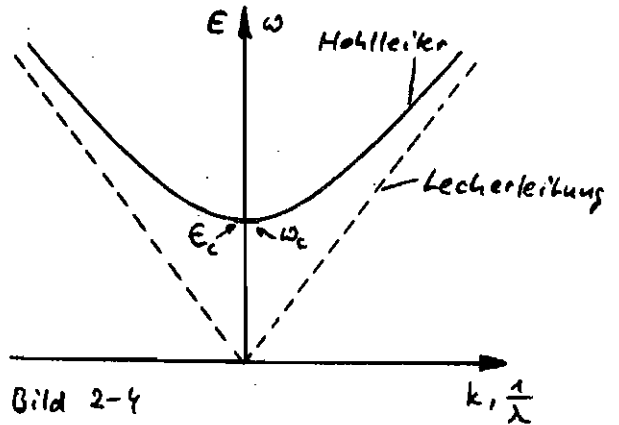


Bild 2-4

Beim Hohlleiter (Bild 2-4) tritt eine untere Grenzfrequenz ω_c auf, bei der die Wellenausbreitung nicht mehr möglich ist, sondern die Feldstärken exponentiell mit dem Ort abnehmen, da die Fortpflanzungskonstante imaginär wird. Werden bei hohen Frequenzen die Längsabmessungen des Hohl-

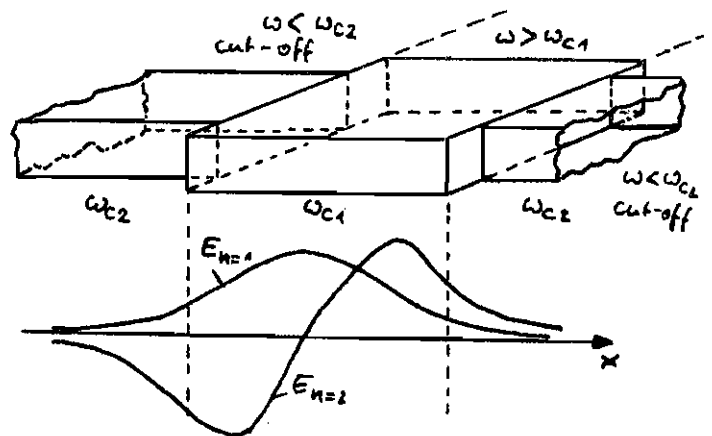


Bild 2-5

leiters groß gegen die Wellenlänge, so wird der Hohlleiter

dispersionsfrei (Taschenlampe!).

Um ein elektrisches Analogon zum Tunneleffekt zu konstruieren, wird bei einer gegebenen Anregungsfrequenz ω ein Hohlleiterstück im H₁₀-Modus beidseitig mit unendlich langen Hohlleitern im cut-off abgedehnt (Bild 2-5).

In den kleineren Hohlleitern ist keine Wellenausbreitung dieser Frequenz möglich, folglich wird die elektrische Feldstärke E exponentiell gedämpft: die "tunnelt" in diese Leiterstücke. Bei der "Total"-Reflexion an einer Glasplatte "tunnelt" die Welle exponentiell gedämpft auch in das Innere der Platte. Kann sie dünn genug gemacht werden, wird das Licht trotz Totalreflexions-Einfallswinkel wenig gedämpft durchgelassen.

Bewegt sich ein Elektron im Festkörper, so werden die Verhältnisse komplizierter. Die positiv geladenen Atomrümpfe ziehen Elektronen an, diese können in einem Atomrümpf "hineinfallen" und dabei potentielle Energie verlieren, Bild 2-6 oben.

Da der Kristall periodisch ist, sind auch die Felder und damit das Potential des Elektrons periodisch mit der Gitterkonstanten a . Als einfaches Beispiel wird ein linearer Kristall betrachtet und das periodische Potential V mit einem Rechteckpotential angenähert. Die

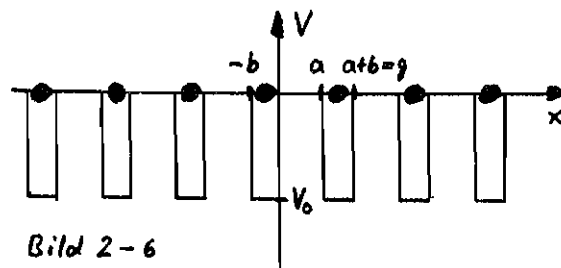
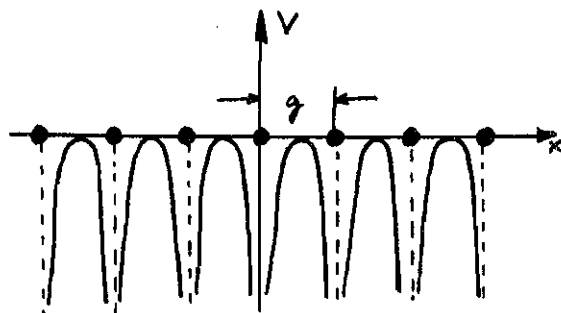


Bild 2-6

Lösung der Schrödinger-Gleichung (2-4) mit stückweise konstantem Potential kann sofort in den jeweiligen Intervallen aufgeschrieben werden mit den Fortpflanzkonstanten

$$k(0 < x \leq a) = \alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \text{und} \quad k(-b \leq x < 0) = \beta = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}},$$

(Rechnung nur Vereinfachung mit $V_0 > 0$!)

$$\begin{aligned}
 0 \leq x \leq a &: u_1(x) = A_1 e^{j\alpha x} + B_1 e^{-j\alpha x} \\
 -b \leq x \leq 0 &: u_2(x) = A_2 e^{j\beta x} + B_2 e^{-j\beta x} \\
 a \leq x \leq g &: u_3(x) = A_3 e^{j\beta(x-g)} + B_3 e^{-j\beta(x-g)} \\
 &= e^{j\beta g} (A_2 e^{j\beta(x-g)} + B_2 e^{-j\beta(x-g)})
 \end{aligned} \tag{2-13*}$$

Die Koeffizienten A_2 und A_3 bzw. B_2 und B_3 werden im allgemeinen verschieden sein. Wegen der Periodizität des Potentials $V(x) = V(x-g)$ bleibt aber die DGL Gl. (2-4) und damit die Lösung bei Translation unverständlich. Dann können sich aber $u_2(x)$ und $u_3(x)$ nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, $u(x+g) = c^n u(x)$, der, damit die Elektronenwelle voraussetzungsgemäß nicht ungedämpft und ohne auszuwachen ausbreitet, ein reiner Phasenfaktor $c^n = e^{jkn_g}$ im n -ten Intervall sein muß. Die Struktur der Lösung ist also die einer ebenen Welle, die sich über dem Ort ng mit der Ausbreitungskonstanten k fortplant und ähnlich mit dem Klammersymbolisch der Gl. (2-13*) modifiziert ist (Bloch-Funktion).

Zur Anpassung der Lösungsabschnitte müssen Funktionswert u und Ableitung u' stetig sein, d.h. $u_1(0) = u_2(0)$, $u_1(a) = u_3(a)$, $u_1'(0) = u_2'(0)$ und $u_1'(a) = u_3'(a)$. Das sind vier Bedingungengleichungen für die vier Koeffizienten A_1, B_1, A_2, B_2 . Sie bilden ein homogenes Gleichungssystem. Damit eine Lösung existiert, muß die Koeffizientendeterminante D

$$D \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \beta & -\beta & -\alpha & \alpha \\ -e^{j(kg-\beta b)} & -e^{j(kg+\beta b)} & e^{j\alpha a} & e^{-j\alpha a} \\ -\beta e^{j(kg-\beta b)} & \beta e^{j(kg+\beta b)} & \alpha e^{j\alpha a} & -\alpha e^{-j\alpha a} \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

gleich Null sein, was wegen $0 \leq E \leq V_0$, $V_0 > 0$ der Bedingung

$$-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} \sin \alpha a \sin \beta b + \cos \alpha a \cos \beta b = \cos kg \tag{2-14}$$

äquivalent ist. Gl. (2-14) ist die Dispersionsbeziehung des beschriebenen Modells. Sie gibt die Abhängigkeit der Gesamtenergie E , enthalten in $\alpha = \alpha(E)$ und $\beta = \beta(E)$ von der Ausbreitungskonstanten k an. Man sieht, daß nicht alle E -Werte zulässig sein können, da für jedes k , d.h. für

Anbreitung einer Elektronenwelle, der Wertebereich der rechten Seite von Gl. (2-14) auf das Intervall $-1 \dots +1$ beschränkt ist. Wird k imaginär, so ist die Welle evaneszent, d.h. sie klingt exponentiell wie beim Totalreflexion ab.

Zur Vereinfachung der Diskussion wird der Grenzübergang $V_0 \rightarrow \infty$, $b \rightarrow 0$, $\beta^2 \rightarrow \infty$ mit $\beta^2 b = \text{const.}$ durchgeführt, wobei $\beta b \rightarrow 0$ und $a \rightarrow g = a+b$ streben. Mit den Definitionen für P und μ

$$P = \frac{\beta^2 a b}{2} = \alpha g \tan \mu \quad (2-15)$$

stellt man als Dispersionsrelation aus Gl. (2-14)

$$P \frac{\sin \alpha g}{\alpha g} + \cos \alpha g = \cos k g$$

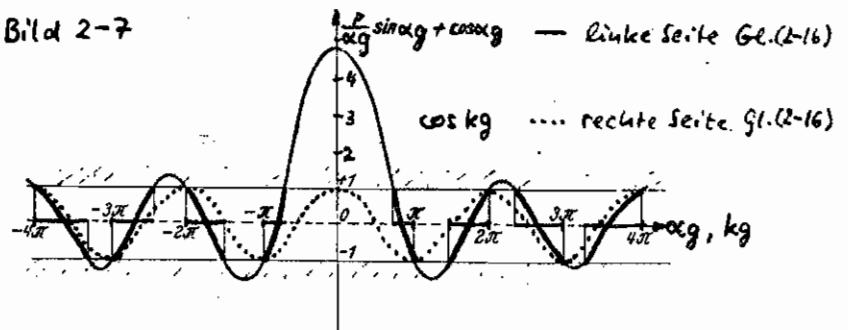
oder

$$\frac{\cos(\alpha g - \mu)}{\cos \mu} = \cos k g \quad (2-16)$$

P ist dabei ein Maß für die Höhe des unendlichen Potentialwände am Ort des Atomrümpfe. Für $P \rightarrow 0$ liegt der Fall der ungebundenen Elektronen vor mit $\alpha = k$ bzw.

$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Die Funktionswerte der rechten und der linken Seite von Gl. (2-16) in Bild 2-7 definieren mögliche Werte - Kombinationen von α und k , welche in Bild 2-8 vermehrt in Form sogenannter Energiebänder aufzeichnet sind.

Bild 2-7



$f(\alpha g) = P \frac{\sin \alpha g}{\alpha g} + \cos \alpha g$ als Funktion von αg für $P = \frac{3\pi}{2}$ nach Kronig. α ist gleich $\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, wo E die Energie ist. Die erlaubten Energiebänder ($|f(\alpha g)| < 1$) sind auf der αg -Achse durch Verstärkung hervorgehoben.

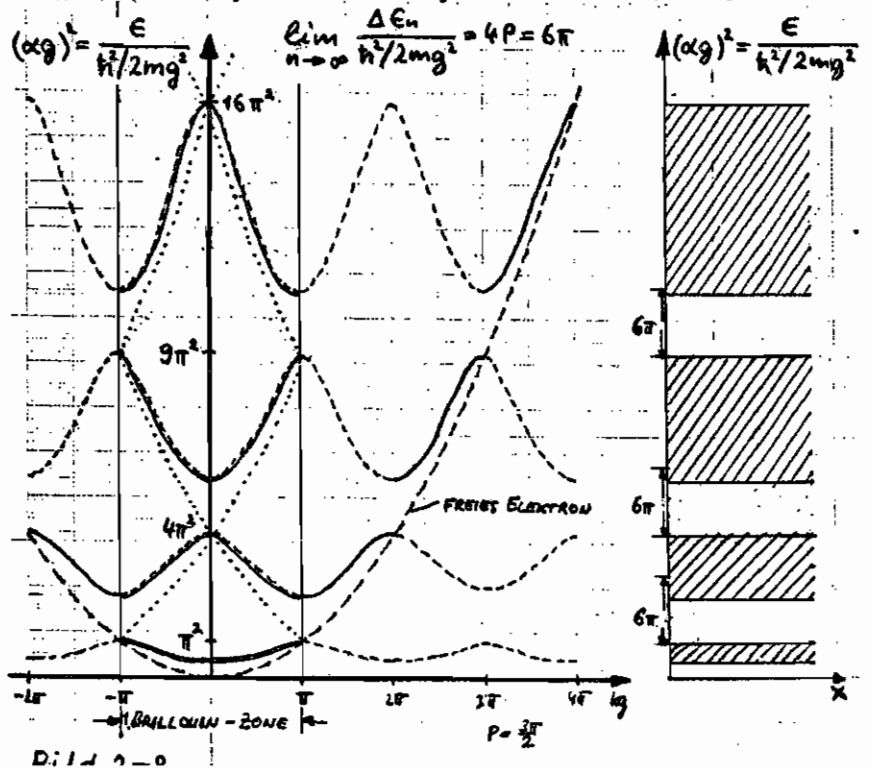


Bild 2-8

Das Diagramm ist periodisch mit der Gitterkonstanten, so daß die gesamte Information im Bereich $-\frac{\pi}{g} \leq k \leq \frac{\pi}{g}$ enthalten ist. Dieser Bereich wird erste Brillouin-Zone genannt. Die Funktion $u(x)$ lautet im Intervall $ng < x < (n+1)g$

$$\psi(x) \sim u(x) = e^{ikng} \cdot 2A_1 \left[e^{+i\alpha(x-ng)} + \frac{2P \sin \alpha(x-ng)}{\alpha g (1 - e^{i(k+\alpha)g})} \right] \quad (2-17)$$

Da kng als Exponentialfaktor vorkommt, ist es einleuchtend, daß der Exponentialfaktor kng dieselbe Beschreibung liefert wie die Konstante $kng + m \cdot 2\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, so daß trotz der Mehrdeutigkeit der mathematischen Formulierung eine eindeutige physikalische Tatsache beschrieben wird.

Wie nach Gl. (2-14) oder Gl. (2-16) zu erwarten, existieren in Bild 2-8 verbotene Energiebereiche oder Bandlücken (energy-gap), für die kein solches k definiert und folglich auch nur eine abhängende Elektronenwelle möglich ist. Dabei sind die Bandgrenzen für $0 < \mu < \infty$ durch die Bedingung

$$\cos(\alpha g - \mu) = (-1)^n \cos \mu \quad (2-18)$$

fixiert, was zu

$$(\alpha g)_0 = n\pi, \quad E_{n0} = (n\pi)^2 \frac{\hbar^2}{2mg^2} \quad (2-19)$$

für die obere Bandgrenze und zu

$$(\alpha g)_n = (n-1)\pi + 2\mu, \quad E_{nn} = [(n-1)\pi + 2\mu]^2 \frac{\hbar^2}{2mg^2} \quad (2-20)$$

für die untere Bandgrenze für $n = 1, 2, 3, \dots$ die Nummer des Bandes, geordnet nach wachsender Energie, ist. Die Breite des verbotenen Zone $\Delta E_n = E_{nn} - E_{n0}$ wächst also für große n mit $\alpha g \approx n\pi$ und $\mu \approx \frac{P}{n\pi}$ asymptotisch auf den Wert

$$\Delta E_n \rightarrow 2 \frac{\hbar^2}{mg^2} P \quad (2-21)$$

an, das unabhängig von der Energie wird.

Zunächst ist die Energie eines freien Elektrons einzusetzen, das sich im Potential $V_0 = 0$ bewegt. Nach Gl. (2-9) ist das eine Parabel. Sie schneidet die Energiebänder des Kristallelektrons an den oberen Bandgrenzen. Für hohe Energien verhält sich das Kristallelektron in reinem Verhalten dem freien Elektron.

An den Bandkanten wird die Gruppengeschwindigkeit der Elektronenwelle nach Gl. (2-11) Null. Das ist durch Bragg-Reflexion

erklärbar. Totalreflexion tritt nämlich bei Einfallen einer ebenen Welle auf einen Kristall gerade dann auf, wenn $n\lambda = 2g$ ist, also für $k = \frac{n\pi}{g}$.

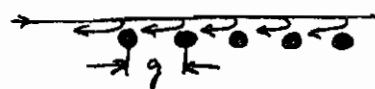


Bild 2-9

Setzt man in Gl. (2-17) die Energiewerte der Bandgrenzen ein, so erhält man an der oberen Bandgrenze des n -ten Bandes für die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Phi|^2$ mit dem Anfangswert $u(x=x_0)$

$$|\Phi|_{n_0}^2 \sim |u_{n_0}(x)|^2 = \left[\frac{u_{n_0}(x=x_0)}{\sin \alpha_{n_0} x} \sin \alpha_{n_0} x \right]^2 \sim 1 - \cos 2\alpha_{n_0} x \quad (2-22)$$

und an der unteren Bandgrenze des $(n+1)$ -ten Bandes

$$|\Phi|_{n+1}^2 \sim |u_{n+1}(x)|^2 = \left[\frac{u_{n+1}(x=x_0)}{\cos \alpha_{n+1} x} \cos \alpha_{n+1} x \right]^2 \sim 1 + \cos 2\alpha_{n+1} x \quad (2-23)$$

also stehende Wellen, die natürlich die Gruppenperiodizität, fast Null haben.

Die Existenz zweier Energiewerte an den Bandkanten wird durch den Unterschied der mittleren

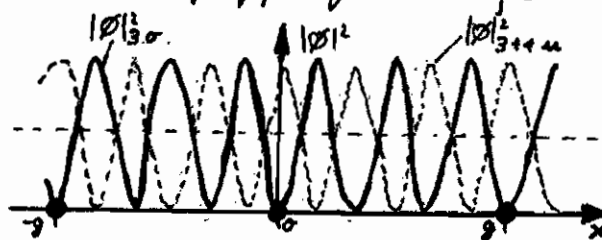


Bild 2-10 $V_0 > 0, n \gg 1$ Gl. (2-19, 20)

potenziellen Energien erklärt: An der oberen Bandkante des n -ten Bandes ist der wahrscheinlichste Aufenthaltsort des Elektrons nach Gl. (2-22) und Bild 2-10 zwischen den Atomen, wo im Mittel die potentielle Energie klein ist (für $V_0 > 0$!).

An der unteren Bandkante des $(n+1)$ -ten Bandes ist der wahrscheinlichste Aufenthaltsort des Elektrons nach Gl. (2-23) und Bild 2-10 bei den Atomen, wo die potentielle Energie positiver ist. Die Differenz beider potentiellen Energien (die kinetische Energie ist am Rande der Brillouin-Zone Null!) ergibt gerade die Breite der Energie lücke.

In der Nähe der Bandkanten können die Energiebänder durch Taylorentwicklung der in $k_0 = \frac{n\pi}{g}$ symmetrischen Funktionen mit einer Parabel approximiert werden,

$$E(k) = E(k_0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 E(k_0)}{\partial k^2} (k - k_0)^2 + \dots \quad (2-24)$$

$E(k_0)$ ist die minimale Teilchenenergie, wenn $k = k_0$ und somit die Teilchengeschwindigkeit Null ist, und stellt folglich die potentielle Energie dar. Der zweite Term ist dann notwendigerweise die kinetische Energie. Vergleicht man mit der kinetischen Energie eines

freien Elektrons, $E_{kin, frei} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, so hat die reziproke Bandkrümmung die Bedeutung einer effektiven Masse

$$m_{eff} = \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2 E(k)}{\partial k^2}, \quad (2-25)$$

die einem freien Elektron derselben kinetischen Energie und desselben Impulses $\hbar k_{frei} = \hbar(k - k_0)$ zuzuordnen wäre. Die effektive Masse kann je nach Energie E_0 Werte zwischen $m_{eff} > 0$ an der unteren Bandkante über $m_{eff} = \pm \infty$ am Wendepunkt bis $m_{eff} < 0$ an der oberen Bandkante annehmen. Da die Bandstruktur im allgemeinen in der kristallographischen Richtung abläuft, ist die effektive Masse bei realen Kristallen ein richtungsabhängiger Tensor.

Ein Band, bei dem alle erlaubten Werte besetzt sind, trägt zur Leitfähigkeit nicht bei, da die Elektronen keine zusätzliche Energie mehr tragen können. Ist daher ein Band unten vollständig besetzt, so fügt man in Gedanken so viele Elektronen mit negativer Ladung und negativer effektiver Masse $m_{eff} < 0$ hinzu, so daß alle Plätze besetzt sind. Dann müssen aber auch zusätzliche Teilchen, sogenannte Löcher, mit $m_{eff} = -m_{eff} > 0$ und gleich großer positiver Ladung, damit der Kristall unverändert bleibt. Zum Studium der Leitfähigkeit betrachtet man nicht mehr recht viele Elektronen durch unterschiedliches Masse, sondern nur wenige Löcher mit einheitlicher Masse an der oberen, sogenannten Valenzbandkante.

In Bild 2-8 wurde für die erlaubten Energiebereiche das verbotene Bänderchema als Kontinuum von E -Werten aufgedeutet. Wie nach Gl. (2-13) erwähnt, ist ein Kontinuum nur bei ∞ ausgedehnten Kristall möglich. Hat der Kristall die endliche Linearabmessung L , so sind auch nur endlich viele E - k -Werte möglich.

Mit $L = sg$ ($s \gg 1$) trägt unter Vorgabe jeder Randbedingung nach Gl. (2-13) jedes Atom der Kette im Intervall $0 \dots \frac{\pi}{g}$ gerade ($\frac{\pi}{g} / \frac{\pi}{g} = s$) einen k -Wert bei, die im Abstand $\Delta k_1 = \frac{\pi}{L}$ liegen. Zählt man dagegen bei Annahme periodischer Randbedingungen $\psi(x) = \psi(x+L) \Rightarrow A e^{i k x} + B e^{-i k x} = A e^{i k(x+L)} + B e^{-i k(x+L)} \Rightarrow \Delta k_2 = \frac{2\pi}{L}$ die möglichen k -Werte ab, so erhält man die gleiche Anzahl, aber im Intervall $-\frac{\pi}{g} < k \leq \frac{\pi}{g}$ verteilt, so daß $\Delta k_2 = 2\Delta k_1$ wird. In einem Intervall dk gibt es folglich $\frac{dk}{2\pi/L}$ erlaubte k -Werte. Bei Berücksichtigung der drei Kristalldimensionen ist die Gesamtzahl möglicher Werte gleich dem Produkt der möglichen k pro Dimension, also

$$N_c(k) d^3 k = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d^3 k \quad (2-26)$$

In der Nähe des Bandkanten gilt für die Energie im dreidimensionalen Falle,

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} \quad \text{mit } k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad (2-27)$$

daß ein sphärisches Band vorliegt, wobei einem Energieintervall $E \dots E + dE$ ein k -Volumen $\frac{4}{3}\pi [(k+dk)^3 - k^3] = 4\pi k^2 dk$ korrespondiert. Infolgedessen enthält ein Energieintervall $E \dots E + dE$ pro Volumeneinheit L^3 des Kristalls

$$N_E(E) dE = 2 \frac{1}{8\pi^3} \int_k^{k+dk} d^3k = 2 \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3} dk, \quad (2-28)$$

Plätze, was mit Hilfe der Gl. (2-27) als

$$N_E(E) dE = 2 \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \cdot \frac{2m_{\text{eff}} E}{\hbar^2} \cdot \frac{2m_{\text{eff}} dE}{\hbar^2} \cdot \frac{\hbar}{(2m_{\text{eff}} E)^{1/2}}, \quad (2-29)$$

$$N_E(E) dE = 2 \cdot 2\pi \left(\frac{2m_{\text{eff}}}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} dE$$

angedrückt werden kann. Integriert man von $E=0$ bis $E = kT$, so erhält man die Anzahl der erlaubten Plätze pro Energieintervall kT ,

$$N_{kT} = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{2m_{\text{eff}} kT}{\hbar^2} \right)^{3/2}, \quad (2-30)$$

was mit dem häufig ebenfalls verwendeten Bandvolumen N_0 über

$$N_0 = 2 \cdot N_{kT} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = 2 \left(\frac{2\pi m_{\text{eff}} kT}{\hbar^2} \right)^{3/2}$$

verknüpft ist. Der Faktor 2 röhrt von der bisher nicht berücksichtigten Spin entartung des Elektrons: Im selben Energieniveau bei jedem k -Wert haben in Übereinstimmung mit dem Pauli-Verbot zwei Elektronen mit unterschiedlichem Spin Platz.

Reale Kristalle zeigen eine wesentlich komplexere Bandstruktur als die des besprochenen Modells.

Dann unterscheidet zwischen indirekten und direkten Halbleitern, Bild 2-11. Beim indirekten Halbleiter (Si, Ge) liegen die minimale Energie des Leitungsbandes (L) und die maximale Energie des Valenzbandes (V) bei verschiedenen Fortpflanzungskonstanten. Beim direkten Halbleiter (GaAs, InP) ist der prinzipielle Bandabstand beim selben k -Wert zu beobachten.

Da nach Gl. (2-9) bzw. Gl. (2-12) Energie und Wellenlänge eines Elektrons verknüpft sind, lassen sich die Bandabstände verschiedener Materialien auch als Wellenlänge angeben, Tabelle 2-1.

Beim Übergang eines Elektrons vom Leitungs- ins Valenzband oder umgekehrt müssen die Erhaltungsgrößen für Impuls und Energie gelten. Der Kristallimpuls eines Elektrons in der Nähe der Bandkanten ist nach Gl. (2-12) mit Gl. (2-24) gerade

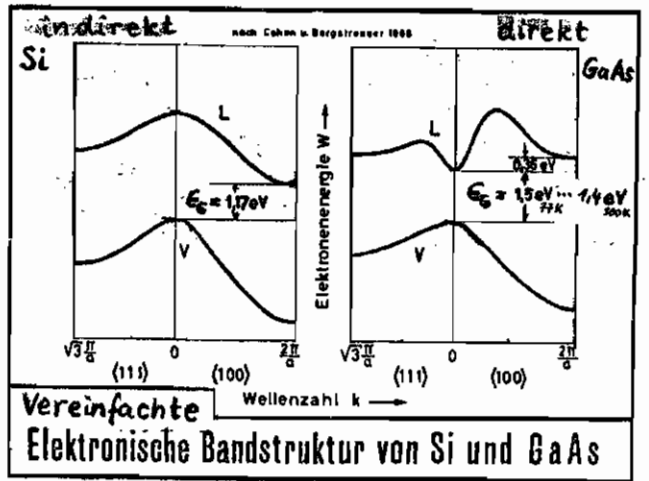


Bild 2-11

Material	Bandenergieabstand [eV]	Wellenlänge bei 300 K [μm]	Strahlungsbereich	Übergangstyp
Ge	0,66			indirekt
Si	1,09			indirekt
SiC	2,5	0,496	blau	indirekt
InSb	0,18	6,9	JR - C	indirekt
InAs	0,36	3,45	JR - C	direkt
GaSb	0,7	1,77	JR - B	direkt
InP	1,26	0,985	JR - A	direkt
GaAs	1,38	0,898	JR - A	direkt
GaAsP	1,90	0,65	rot	direkt
GaP	2,19	0,565	grün	indirekt
GaP	1,8	0,69	rot	indirekt
GaN	3,1	0,4	violett	indirekt

Tabelle 2-1

$$p_{\text{Kristall}} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} \approx \hbar(k - k_0), \quad (2-31)$$

wobei k_0 die Fortpflanzungskonstante am Extremwert der Bandkante ist. Wie man sofort an Bild 2-11 sieht, kann ein Elektronenübergang beim direkten Halbleiter für den Impuls $p_{\text{Kristall}} \approx 0$ erfolgen; zur Impulserhaltung ist kein Stoßpartner notwendig. Die Energiedifferenz wird in Form eines Lichtquants der Frequenz $\omega \approx E_g$ emittiert bzw. absorbiert. Der indirekte Halbleiter dagegen benötigt für den Übergang eines Elektrons zwischen Leitungs- und Valenzband einen Stoßpartner, welcher den überschüssigen Impuls aufnimmt bzw. absorbiert, aber den Übergang unwahrscheinlicher macht, Tabelle 2-2.

Material	n/cm^{-3}	τ_i/s	τ_{max}/s
Si	$1,5 \cdot 10^{10}$	$1,7 \cdot 10^4$	$2,5 \cdot 10^{-8}$
Ge	$2,4 \cdot 10^{13}$	0,61	$1,5 \cdot 10^{-4}$
PbS	$3,0 \cdot 10^{15}$	10^{-6}	$9,0 \cdot 10^{-6}$
PbSe	$6,2 \cdot 10^{15}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$2,5 \cdot 10^{-7}$
PbTe	$4,0 \cdot 10^{16}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$	$1,9 \cdot 10^{-7}$
InSb	$2,0 \cdot 10^{16}$	$6,2 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$
GaSb	$4,3 \cdot 10^{12}$	$9,0 \cdot 10^{-9}$	$3,7 \cdot 10^{-7}$
InAs	$1,8 \cdot 10^{15}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$2,4 \cdot 10^{-7}$
GaAs	$9,5 \cdot 10^5$	$2,0 \cdot 10^3$	—

Tabelle 2-2

τ_i : errechnete Zeitkonstante der Rekombination für Intrinsic-Material
 τ_{max} gemessene Höchstwerte (Verunreinigungen!)

2.2. Phononenbandstruktur

Die Energie der Gitterschwingungen eines Kristalls ist in Quantenportionen. Ein solches Energiequant nennt man, da es sich um eine Schwingung handelt, Phonon. Es wird durch seine Energie $E = \hbar \omega$, bzw. Frequenz ω , und seine Fortpflanzungskonstante k definiert. Regt ein Elektron bei Wechselwirkung mit dem Gitter eine bestimmte Gitterschwingungsform an, so regt man, es habe ein Phonon emittiert. Hat das Gitter Energie an das Elektron abgegeben, so hat das Elektron ein Phonon absorbiert. Bewegt sich ein Phonon durch den Kristall, so bedeutet das, daß sich eine Schwingung fortplant mit der Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{d\omega}{dk}$, was einem Impuls $p = \hbar k$ entspricht.

Bei den Schallwellen einer Atomkette un-
scheidet man zwischen longitudinalen (Atomauslenkung parallel zur Ausbreitungsrichtung) und transversalen (Atomauslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung) Phononen, wobei jeder transversale Schwingungsmodus in zwei voneinander unabhängige, senkrecht aufeinander stehende Moden zerlegt werden kann.

Schwingen ^{die Moleküle} der Nachbaratome in Phase, so spricht man von akustischen Phononen, schwingen benachbarte Atome in Gegenphase, so spricht man von optischen Phononen. Bild 2-12 illustriert den Sachverhalt. Bei den Darstellungen ist zu beachten, daß longitudinalen oder transversalen Auslenkungen auf der Ordinate aufgetragen sind, es sind also um Atomverschiebungen bzw. -verschiebungen sowohl als auch um eine Normalkan-

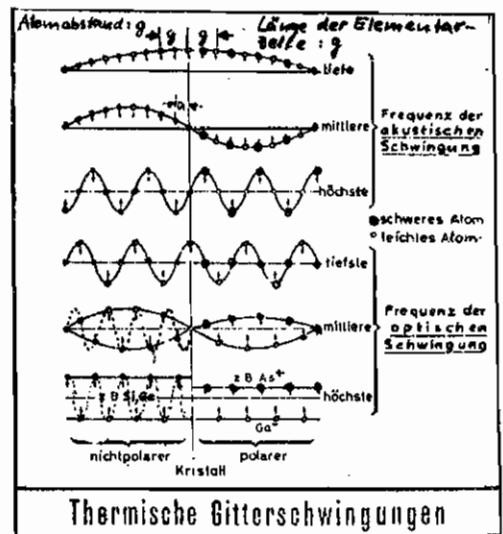
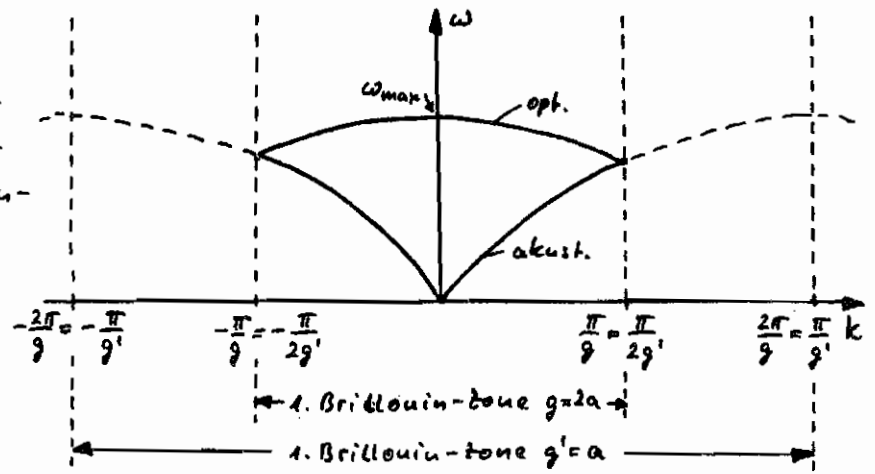


Bild 2-12 Longitudinale Moden

an nicht der schwingenden Atomkette handeln kann. Einige Informationen über das Dispersionsverhalten von Phononen sind unmittelbar Bild 2-12 zu entnehmen. Die Eigenkreisfrequenz eines schwingenden Atoms ist $\omega = \sqrt{D/m}$, vgl. Gl. (3-22) bis (3-24).

legt man willkürlich fest, daß die Periodizität der monoatomaren Gitter $g = 2a$ sei, also gleich dem doppelten Atomabstand, so befinden sich in einer Elementarzelle des Gitters zwei gleiche Atome, die sich in ihrer relativen Lage (eines "rechts", eines "links") unterscheiden. Da die Rechnung, welche man Dispersionsdiagrammen führt, aber jeweils an gleichen Plätzen der einzelnen Elementarzellen zu einem Schwingungsmodus zusammenfaßt, sind entsprechend des Anzahl der Plätze pro Elementarzelle zwei Äste im periodischen Dispersionsdiagramm zu erwarten. Nach

den Betrachtungen über die Elektronbewegung im periodischen Potential versteht es sich nicht, wenn die periodische Atomkette für die Schallausbreitung eine obere Frequenzgrenze hat, Bild 2-13



bei der die Gruppengeschwindigkeit Null wird. Hätte man als Periodizität $g' = a$ gewählt, so wäre nur ein Modus aufgetreten, nämlich der getrickelt fortgesetzte akustische Zweig.

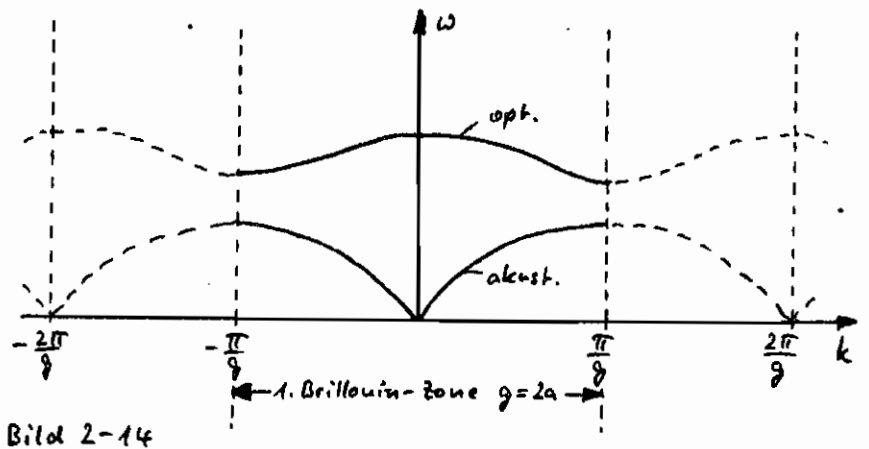
Mit der Physik hat die willkürliche Wahl der Elementarzelle nichts zu tun. Die Gitterschallwellen sind ja nur an diskreten Punkten, nämlich am Ort der Atome, definiert. Demzufolge beschreibt in Bild 2-12 sowohl die durchgezogene Linie für den Fall $g = 2a$, als auch die gestrichelte Linie für den Fall $g' = a$ die Auslenkungen der Atome aus der Ruhelage in gleicher Weise. Bei der Wahl $g = 2a$ klappt die Hälfte des akustischen Zweiges um und wird zum optischen Zweig.

Die Bezeichnung "akustischer Zweig" erklärt sich daraus, daß für kleine Frequenzen bzw. Fortpflanzungswerten das Dispersionsdiagramm nahezu linear ist, also keine Dispersion vorliegt, und $v_{\text{Phase}} = v_{\text{Gruppe}} = c_{\text{Schall}}$, die Gruppengeschwindigkeit gleich der konstanten Schallgeschwindigkeit ist.

Die Bezeichnung "optischer Zweig" rührt daher, daß bei biatomaren polaren Kristallen verschiedene geladene Partikel gegeneinander schwingen können und dabei starke elektrische Felder auftreten. Die Maximalfrequenzen für Phononenanregung liegen bei 10^{13} Hz, also bei Frequenzen wellenlängen einer elektromagnetischen Schwingung von 30 μ m, so daß in diesem infraroten optischen Bereich eine starke Kopplung zwischen Phononen einer äußeren Felder und Phononen des optischen Zweigs auftreten kann.

Für das biatomare gilt es in Bild 2-12 zu sehen, daß der höchsten Frequenz des akustischen Phononen und der tiefsten Frequenz des optischen Phononen nicht identische Schwingungsbilder wie beim monoatomaren Kristall inprunde liegen, daß in Folge dessen bei gleicher Wellenlänge die Frequenz der optischen Phononen einen anderen, höheren Wert annehmen muß als die der akustischen Phononen. Für $k = \pi/g$ (akustische Phononen) schwingen die schweren Atome mit niedrigerer Frequenz, bei optischen Phononen schwingen die leichten Atome mit höherer Frequenz. Dazwischen ist kein Frequenzwert möglich. Es liegen ähnliche Verhältnisse wie bei einer elektronischen Bandlücke vor, bei der potentielle Energie in die Elektronenwelle schlecht werden muß, um von einer Bandoberschale auf die nächstgelegene Bandunterseite zu springen, Bild 2-14.

Es ist einrichtig, daß die Dispersionskurven für longitudinale und für die beiden transversalen Moden, die aus Symmetriegründen meist entartet (identisch) sind,



im allgemeinen verschieden werden. Gemessene Werte für einen nichtpolaren Si-Kristall und einen polaren GaAs-Kristall zeigen die Aufspaltung in einen longitudinalen (L) und einen entartet transversalen Teil (T) des Dispersionsdiagramms im Bereich der

ersten Brillouin-Zone in $\langle 100 \rangle$ -Richtung. In andere kristallographische Richtungen nehmen die Kurven anders aus, da die Kristalle richtungsanisotrop sind. Die Energie der longitudinalen akustischen Moden ^{ist größer}, da die Atome im Mittel dichter zusammenrücken bzw. auseinanderstreben als bei transversal akustischen Moden. Die Energie der longitudinalen optischen Phononen ist kleiner, wenn die transversal optisch schwingenden Atome im Mittel entfernt sind.

freies Elektron bei $T=300\text{K}$, $kT=0,025\text{eV}$

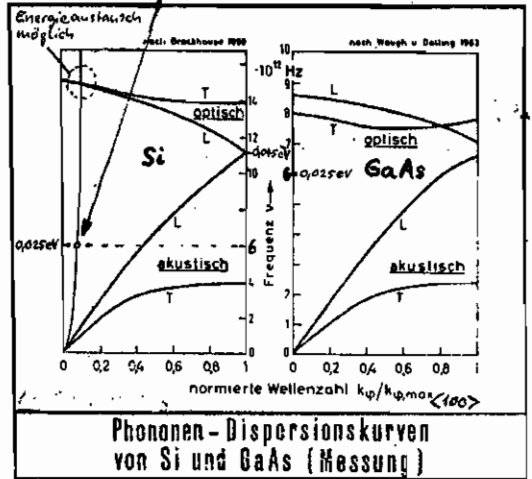


Bild 2-15

2.3. Streuprozesse

Ein Elektron kann sich durch einen streng periodischen Kristall ungestört mit energieabhängiger effektiver Masse bewegen. Wird jedoch die Kristallperiodizität durch statische thermische Bewegungen der Gitteratome oder durch Störstellen gestört, so kann sich das Elektron auf seinem Weg durch das Gitter Energie und Impuls mit dem Kristall aus. Da sich dabei keine Fortpflanzungsrichtung ändert (es wird im Raum "verstreut"), spricht man von Streuprozessen. Die Leitfähigkeit des Mediums ist nicht mehr ∞ .

2.3.1. Streuung an akustischen Phononen

Zur thermisch schwingenden Gitter sind entsprechend den Dispersionskurven Phononen präsent. Ein thermisch angeregtes Elektron auf Zimmertemperatur $T=300\text{K}$ hat eine Wellenlänge $\lambda = h / (m_{\text{eff}} \cdot v_{\text{therm}})$, die mindestens um eine Größenordnung größer ist als übliche Gitterkonstanten ($\sim 2 \cdot 10^{-8}\text{cm}$) sind. Da beim Stoß mit Gitteratomen der Energie- und Impulserhaltungssatz gelten muß, kann ein Elektron mit $E = k \cdot 300\text{K}$ bei Verbleib im selben k -Raum niemals seine gesamte Energie ans Gitter abgeben, da es nicht über den dann benötigten Impuls verfügt, sondern nur einen Bruchteil so, daß $E_{\text{el}} + E_{\text{akust}} = E_{\text{el}}$, $p_{\text{el}} + p_{\text{akust}} = p_{\text{el}}$ gilt. Die Streuung durch Emission akustischer Pho-

nonen ist daher weitgehend elastisch.

2.3.2. Streuung an optischen Phononen

Elektronen genügend hoher Energie können beim Stoß mit dem Gitter optische Phononen emittieren und dabei unter Umständen ihre gesamte Energie verlieren, da im Schnittpunkt beider Dispersionskurven (Bild 2-15 links) bei $E \neq 0$ existiert. Diese Streuung ist also weitgehend inelastisch. Sie ist besonders bei polaren Kristallen effektiv, da das starke elektrische Dipolmoment optischer Phononen in intensive Wechselwirkung mit dem geladenen Elektron treten kann.

2.3.3. Zustand- und Zwickelbandstreuung

Imzustandstreuung nennt man den Mechanismus, bei dem Elektronen gestreut werden, aber im selben Bandminimum verbleiben. Die Änderung der Fortpflanzungskomponenten ist klein, folglich können nur Phononen großer Wellenlänge beteiligt sein. Sind diese akustisch, ist der Stoß elastisch. Sind sie optisch, ist der Stoß unelastisch.

Zwickelbandstreuung nennt man einen Stoß, bei dem ein Elektron von einem Zustand des Zwickelbands in einen Zustand eines Satellitenbands, oder umgekehrt, gestreut wird. In diesem Falle ist die Änderung der Fortpflanzungskomponenten k groß. Folglich sind Phononen an der Obergrenze der akustischen oder an der Untergrenze des optischen Zweiges beteiligt. Diese Streuung ist stark inelastisch, da die Energie der emittierten Phononen in der Größenordnung der Elektronenenergie liegt.

2.3.4. Störstellenstreuung

Ionisierte Störstellen im Kristall streuen Elektronen durch Coulomb-Wechselwirkung, die am wirkungsvollsten bei niedrigen Elektronenenergien ist. Auch Streuungen an neutralen Störstellen und Gitterbaupfehlern sind möglich.

2.3.5. Beweglichkeit und Sättigungsdriftgeschwindigkeit

Die Beweglichkeit μ ist bei Verschiebung von Diffusions-effekten Proportionalitätsfaktor zwischen Beschleunigung der elektrischer Feldstärke E und der Driftgeschwindigkeit

$$\vec{v} = \mu \vec{E} \quad (2-32)$$

der Ladungsträger. Dabei ist die Beweglichkeit proportional der (positiven oder negativen) Teilchenladung q und der Kollisionszeit τ_k , welche angibt, welche Zeit zwischen zwei Stößen des beschleunigten Teilchens mit anderen Partikeln vergeht; weiter ist die Beweglichkeit umgekehrt proportional zur effektiven Masse des Teilchens, also

$$\mu = \frac{q \cdot \tau_k}{m_{eff}} \quad (2-33)$$

Die Größe μ ist ein Maß dafür, wie frei sich ein Elektron im Kristall bewegen kann. Bei niedrigen Temperaturen kann das Elektron keine wesentliche Energie mit akustischen Phononen, sondern nur mit Störatomen austauschen. Bei zunehmender Temperatur hat das Elektron höhere thermische Energien und die Störstellenstreuung wird schwächer. Dafür nimmt die Wechselwirkung mit optischen Phononen zu, die sehr viel Energie aufnehmen können. Mit wachsender Temperatur ist also zunächst ein Anstieg der Beweglichkeit zu erwarten und nach Erreichen eines Maximumwertes ein Abnehmen. Für GAs liegt dieses Beweglichkeitsmaximum bereits bei 100 K, für Si bei höheren Temperaturen wegen der höheren Anregungsenergie optischer Phononen im Vergleich zu GAs, Bild 2-15.

Die Zunahme der Driftgeschwindigkeit mit wachsender elektrischer Feldstärke ist nicht unbegrenzt möglich, da nun nicht nur wegen der thermischen Energie des Elektrons, sondern wegen der Energieaufnahme durch das beschleunigende Feld immer häufiger Stöße mit optischen Phononen stattfinden. Dadurch begrenzt sich die Driftgeschwindigkeit auf einen feldstärkeunabhängigen Sättigungswert, der bei $10^7 \frac{cm}{s}$ liegt und für Feldstärken von $10^4 \dots 10^5 \frac{V}{cm}$ erreicht wird.

In Tabelle 2-3 sind wichtige Daten der Halbleiter Germanium, Silicium und Gallium-Arsenid zusammengestellt. Silicium hat den höchsten Schmelzpunkt und die höchste Wärmeleitfähigkeit, so daß Einkristalhalbleiter trotz der vergleichsweise geringen Elektronenbeweglichkeit aus Si hergestellt werden. Die bei weitem höchste Elektronenbeweglichkeit weist GaAs auf (prinzipielle effektive Masse für Elektronen, $m_{ep} \approx m^*$) zusammen mit der geringsten Löcherbeweglichkeit.

	Ge	Si	GaAs	Einheit
Kernladungszahl	32	14	Ga: 31; As: 33	
Atomgewicht	72,6	28,06	—	
Dichte	$5,33 \cdot 10^3$	$2,3 \cdot 10^3$	$5,35 \cdot 10^3$	kg m^{-3}
Atome pro Kubikzentimeter	$4,4 \cdot 10^{23}$	$5,0 \cdot 10^{22}$	$4,4 \cdot 10^{22}$	cm^{-3}
Schmelzpunkt	947	1420	1238	$^{\circ}\text{C}$
Wärmeleitfähigkeit	63	84	40	$\text{W m}^{-1} \text{grd}^{-1}$
Spezifische Wärme	310	760	318	$\text{Ws kg}^{-1} \text{grd}^{-1}$
Relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r	16	12	11	
Bandabstand	0,675	1,12	1,43	eV
Eigenleitungsträgerdichte n_i	$2,5 \cdot 10^{13}$	$1,5 \cdot 10^{10}$	$9,2 \cdot 10^6$	cm^{-3}
Eigenleitungsbeweglichkeit der Elektronen μ_n	3900	1350	8500	$\text{cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$
Eigenleitungsbeweglichkeit der Löcher μ_p	1900	480	450	$\text{cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$
Eigenleitungsdiffusionskonstante für Elektronen D_n	101	35	221	$\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$
Eigenleitungsdiffusionskonstante für Löcher D_p	49	12,5	12	$\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$
bezogene effektive Masse für Elektronen m_n^*/m_0	0,55	1,1	0,06	
bezogene effektive Masse für Löcher m_p^*/m_0	0,37	0,59	$0,087 = m_{p4}^*$ $0,5 = m_{p2}^*$ $0,475 = m_{p4}^*$	$m_p^* = m_{p4}^* + m_{p2}^*$

Tabelle 2-3 . Daten für Ge, Si und GaAs bei Raumtemperatur (300K)

3. Optische Grundlagen

Grundlage der Beschreibung elektromagnetischer Vorgänge sind die phänomenologischen Gleichungen von Maxwell

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{j} & \operatorname{div} \vec{D} &= \rho = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (3-1)$$

für die magnetische Feldstärke \vec{H} , die elektrische Feldstärke \vec{E} , die Verschiebungsdichte \vec{D} (auch elektrische Induktion genannt), die Raumladungsdichte ρ , die Konvektionsstromdichte \vec{j} und die magnetische Induktion \vec{B} . Diese Beziehungen gelten unabhängig vom Medium, dessen Eigenschaften in den Stoffgleichungen

$$\vec{D} = \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}(\vec{E}) \cdot \vec{E} \quad \vec{j} = \overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\vec{E}) \cdot \vec{E} \quad \vec{B} = \overset{\leftrightarrow}{\mu}(\vec{H}) \cdot \vec{H} \quad (3-2)$$

erfaßt werden. Die Doppelpfeile deuten Tensoren zweiter Stufe an. Im folgenden seien lineare und isotrope Medien vorausgesetzt, so daß sich Gl. (3-2) zu

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (3-3)$$

vereinfacht. Die Raumladungsdichte ρ wird zu Null angenommen, was eine sehr gute Näherung für metallische Leiter und eine gewöhnlich noch ausreichende Näherung für Halbleiter ist, Gl. (3-1). Weiter soll die elektrische Polarisation \vec{P} nach der Definitionsgleichung

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{oder} \quad \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} \quad (3-4)$$

eingeführt werden, wie gibt an, um welchen Betrag die Verschiebungsdichte im Medium über die Vakuumdichte hinaus erhöht wird. Für die magnetische Induktion läßt sich eine magnetische Polarisation einführen. Da jedoch im optischen Spektralbereich $\mu = \mu_0$ in sehr guter Näherung gilt, ist dies für die folgenden Ausführungen entbehrlich. Macht man einen harmonischen Ansatz für die Feldgrößen, so erhält man aus Gl. (3-1) und Gl. (3-3) für die komplexen Amplituden

$$\text{rot } \hat{H} - j\omega \tilde{\epsilon} \hat{E} = 0 \quad (3-5)$$

$$\text{rot } \hat{E} + j\omega \mu \hat{H} = 0 \quad (3-6)$$

mit der komplexen Dielektrizitätskonstanten (Permittivity)

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon - j\sigma/\omega \quad (3-7)$$

Die Randbedingungen an Unstetigkeitsflächen lauten mit der Flächennormalen \vec{n} , Bild 3-1, folgendermaßen:

Die Normalkomponenten der Induktion sind an der Grenzfläche stetig,

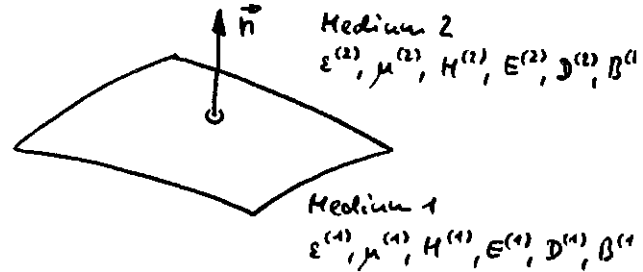


Bild 3-1

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}^{(2)} - \vec{B}^{(1)}) = 0 \quad (3-8)$$

Die Normalkomponenten der Verschiebungsdichte ändern sich an der Grenzfläche um den Betrag der Flächenladung $\rho_0 (= 0, \text{gl. (3-1)})$,

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}^{(2)} - \vec{D}^{(1)}) = \rho_0 \quad (3-9)$$

Die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke sind an der Grenzfläche stetig,

$$\vec{n} \times (\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}) = 0 \quad (3-10)$$

Die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke ändern sich an der Grenzfläche um den Betrag der Flächenstromdichte \vec{j}_0 ,

$$\vec{n} \times (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}) = \vec{j}_0 \quad (3-11)$$

Die Lösung der Maxwell-Gleichungen (3-5,6) für eine der Feldgrößen $\vec{F} = \vec{H}$ oder $\vec{F} = \vec{E}$, mit $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = B(AC) - (AB)C$, $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F}$, $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ (gl. 3-1),

$$\Delta \hat{\vec{F}} + \omega^2 \tilde{\epsilon} \mu \hat{\vec{F}} = 0, \quad \vec{F} = \hat{\vec{F}} e^{j\omega t} + cc \quad (3-12)$$

ist eine ebene Welle

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \hat{\vec{F}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (3-13)$$

mit dem Fortpflanzungsvektor

$$\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z \quad (3-14)$$

und den Ortsvektor

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \quad (3-15)$$

Damit ist Gl. (3-13) Lösung von Gl. (3-12) ist, muß gelten

$$\vec{k}^2 = \omega^2 \vec{\epsilon} \mu = k^2, \quad k = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\frac{\vec{\epsilon}}{\epsilon_0}} = k_0 \tilde{n} = k_0 (n - j\gamma) \quad (3-16)$$

$= k_0 n - j\alpha/2.$

Die Fortpflanzungskonstante wird also im allgemeinen komplex sein,

$$\vec{k} = \vec{k}_r - j\vec{k}_i \quad (3-17)$$

c_0 ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit, $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ die Fortpflanzungskonstante im Vakuum, \tilde{n} ein komplexer Brechungsindex und $n = \frac{v_{ph}}{c_0}$ das Verhältnis von Phasengeschwindigkeit im Medium zur Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. $\alpha = 2\gamma \cdot k_0$ stellt demnach eine Absorptionskonstante dar für Leitungen.

Aus

$$k^2 = k_r^2 - k_i^2 - 2krki = \omega^2 \mu \vec{\epsilon} = \omega^2 \mu (\epsilon - j\sigma/\omega) \quad (3-18)$$

folgt, daß für reelles ϵ

\vec{k} reell ist für ebene Wellen in homogen verlustfreien Medien,

daß in verlustbehafteten Medien $\sigma \neq 0$ wegen $\vec{k}_r \vec{k}_i \neq 0$ die Flächen konstanter Phase $\vec{k}_r \cdot \vec{r}$ und die Flächen konstanter Amplitude $\vec{k}_i \cdot \vec{r}$ nicht mehr senkrecht aufeinander stehen (gedämpfte Wellen in homogenen Medien),

und daß in verlustfreien inhomogenen Medien mit komplexem $\vec{\epsilon}$ die Amplituden- und Phasenflächen senkrecht aufeinander stehen wegen $\vec{k}_r \vec{k}_i = 0$ (evaneszente Oberflächenwellen oder Lechwellen).

Die Maxwell-Gleichungen zusammen mit den Stoffgleichungen sind eine Kontinuums-Theorie und berücksichtigen nicht die atomistische Struktur der Materie. Die implizite Voraussetzung, daß ϵ und σ (μ hier nicht betrachtet!) konstante, frequenzunabhängige Größen sind, ist unzutreffend.

Für den ionisierten destillierten Wasser mit $\sigma = 0$, für den Brechungsindex sollte gelten $n = \sqrt{\epsilon_r}$, Gl. (3-16), man misst jedoch bei gelbem Licht $n = 1,33$ und in einer statischen Messung $\sqrt{\epsilon_r} = 9,0$, ein offenkundiger Widerspruch.

Für Glas sind einige Zahlen zur Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex in Tabelle 3-1 zusammengefasst, für einige III-V-Halbleiter in Tabelle 3-2.

Vakuum-Wellenlänge	Frequenz/THz	n
361 nm (UV-A)	831	1,539
434 nm (L-violett)	692	1,528
486 nm (L-blau)	618	1,523
589 nm (L-gelb)	510	1,517
656 nm (L-rot)	457	1,514
768 nm (IR-A)	391	1,511
1,2 μm (IR-A)	250	1,505
2 μm (IR-D)	150	1,497
3 m (UKW)	0,0001	3

Diese Frequenzabhängigkeit ist, postum Tabelle 3-1 Dispersion von Glas liest man weiterhin

die Fälligkeit von Gl. (3-1), darauf zurückzuführen, daß \vec{D} und \vec{B} von \vec{E} und \vec{H} im betrachteten Zeitpunkt nicht mehr eindeutig abhängen, sondern im allgemeinen auch noch von den Funktionswerten $\vec{E}(t)$ und $\vec{H}(t)$ zu jedem vorausgehenden Zeitpunkt: Die elektrische bzw. magnetische Polarisierung läßt nicht mehr Schritt, das Medium hat ein "Gedächtnis". Statt Gl. (3-1) n zu schreiben

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \int_{\tau=0}^{\infty} f(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t-\tau) d\tau, \quad (3-19)$$

was formal mit Gl. (3-4) übereinstimmt. Mit einem Laplace- und der Ansatz erhält man für die komplexe Funktion $\tilde{E}(\omega)$

$$\tilde{E}(\omega) = \epsilon_0 + \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (3-20)$$

Diese Beziehung wird Dispersionsgesetz genannt und stellt eine Verallgemeinerung von Gl. (3-7) dar, welche Dispersion im Medium endliches Lichtfähigkeit zuläßt.

REFRACTIVE INDEX AND LOW-FREQUENCY DIELECTRIC CONSTANT

Compound	n	n ²	ϵ
InSb	3.96	15.7	17.9
InAs	3.44	11.8	14.5
InP	3.09	9.57	12.4
GaSb	3.81	14.5	15.7
GaAs	3.32	11.0	13.1
GaP	3.01	9.03	11.0

Tabelle 3-2

Die Funktion $f(\tau)$ ist für alle Werte von τ endlich, auch für $\tau=0$, und strebt bei Dielektrika für $\tau \rightarrow \infty$ gegen Null; bei elektrischen Leitern strebt $f(\tau) \rightarrow 0$ gegen Null. Das ist Ausdruck der Tatsache, daß zum Zeitpunkt t die Werte von $\vec{E}(t)$ im läßt verpaßten Zeitpunkten keinen Einfluß mehr auf $\vec{D}(t)$ haben können. Das relevante τ -Intervall ist von der Größenordnung der Relaxationszeit, welche die Geschwindigkeit des betrachteten Prozesses charakterisiert. Es liegt also ein kausales Zusammenhang vor, vgl. Gl. (3-31). Gl. (3-20) wird im nächsten Kapitel durch die elementare kinematische Theorie der Dispersion von H.A. Lorentz (1880) und L. Lorent (1881) berechnet.

3.1. Atomistische Deutung der Dispersion

Die Veränderung des Brechungsindex n mit der Frequenz wird Dispersion genannt.

Ein Molekül besteht aus einer Anzahl schwerer Partikel, den Atomkernen mit positiver Ladung, um welche sich leichte Partikel, Elektronen mit negativer Ladung, bewegen. Im neutralen Molekül kompensieren sich die Ladungen zur Gesamt Ladung Null. Die Schwerpunkte der positiven und der negativen Ladungen brauchen jedoch nicht zusammenzufallen; das System hat dann ein elektrisches Dipolmoment und wird polar genannt. Trotz der Bedeutung polarer Moleküle, vgl. z.B. Bild 2-12, sollen in der folgenden Darstellung der Einfallzeit halber nur nicht-polare Systeme berücksichtigt werden.

Um die Polarisierung und damit über die Gl. (3-4, 16) den Brechungsindex berechnen zu können, muß die Verschiebung eines Elektrons durch ein elektromagnetisches Feld formuliert werden. Auf das Elektron wirkt die Lorentz-Kraft

$$\vec{K} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3-21)$$

mit der Elektronenladung e und den makroskopischen Feldern \vec{E} . Wegen der kovalenten Bindung des (hier bevorzugt betrachteten)

keten) Halbleiter und die Valenzelektronen nicht lokalisiert. Dabei kann man annehmen, daß es keinen Unterschied zwischen lokalen mikroskopischen Feld und makroskopischen Feld gibt; folglich ist keine Lorentz-Korrektur notwendig wie bei Festkörpern mit ionischer Bindung. Die Geschwindigkeit des Elektrons ist nicht-relativistisch, also klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, so daß das Kreuzprodukt in Gl. (3-19) vernachlässigt werden darf; denn in einer laufenden Welle gilt $E = \sqrt{\mu/\epsilon} H = \frac{1}{\epsilon \mu} B = c \cdot B$, also $\vec{K} = -e(1 + \frac{v}{c} \times) \vec{E} \approx -e\vec{E}$. Das Elektron ist an seine Ruhelage über eine elastische (auslenkungsproportionale) Rückstellkraft $D\vec{r}$ gebunden und werde über eine Reibungsterm $m\gamma d\vec{r}/dt$ gedämpft. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} + D\vec{r} = -e\vec{E}. \quad (3-22)$$

Für eine Feldstärke $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{j\omega t} + cc$ erhält man die Lösung $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{j\omega t}$ mit der stationären Amplitude

$$\vec{r}_0 = \frac{-e\vec{E}_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\gamma} \quad (3-23)$$

und der Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (3-24)$$

Jedes Elektron trägt zur Polarisation ein Moment $-e\vec{r}_0$ bei, so daß man für die gesamte komplexe Amplitude der Polarisation bei einer Konzentration von N Elektronen pro Raumeinheit

$$\vec{P}_0 = \frac{Ne^2}{m} \cdot \frac{\vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\gamma} \quad (3-25)$$

erhält. Mit Gl. (3-4) ergibt sich daraus

$$\vec{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\gamma} = \vec{\epsilon}_r \epsilon_0, \quad (3-26)$$

oder mit Gl. (3-16), $\vec{\epsilon}_r = (n - j\gamma)^2 = n^2 - \gamma^2 - 2j\gamma = \epsilon_r'(\omega) - j\epsilon_r''(\omega)$,

$$\epsilon_r' - 1 = n^2 - \gamma^2 - 1 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \quad (3-27)$$

$$\epsilon_r'' = 2\gamma = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (3-28)$$

Reale Naturie wird mehrere Resonanzfrequenzen (optische Übergänge) aufweisen, so daß die Gl. (3-25, 26) als Summen an

$$\epsilon_r' - 1 = n^2 - y^2 - 1 = \sum_i \frac{N f_i e^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{\omega_i^2 - \omega^2}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 g_i^2} \quad (3-29)$$

$$\epsilon_r'' = 2ny = \sum_i \frac{N f_i e^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{\omega g_i}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 g_i^2} \quad (3-30)$$

zu schreiben sind. Sind Partikel anderer Masse und anderer Dämpfung bzw. Ladung beteiligt, so sind die Summen entsprechend zu modifizieren. $N f_i$ ist die Anzahl der Elektronen mit der Resonanzfrequenz ω_i und der Dämpfungskonstanten g_i . f_i wird auch Oszillatorstärke genannt.

Aus den Gl. (3-27, 28) ist folgendes zu sehen:

1. Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten bzw. Brechungsindex n und Absorptionskonstante $\alpha = y k_0$ sind voneinander abhängig. Diese Abhängigkeit gilt allgemein für komplexe Zahlen, welche als analytisches Signal in der komplexen Frequenzebene interpretiert werden können, und lautet mit $V(\omega) = V_r(\omega) + j V_i(\omega)$, $\omega = \omega_r + j \omega_i$,

$$V_i(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V_r(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (3-31)$$

$$V_r(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V_i(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'.$$

Die Gl. (3-31) definieren die Hilbert-Transformation. Das Integralzeichen \int bedeutet den Cauchy'schen Hauptwert, d.h. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega' - \omega} d\omega' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\omega - \epsilon} \frac{1}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{\omega + \epsilon}^{+\infty} \frac{1}{\omega' - \omega} d\omega' \right\}$. Der Name "analytisch" kennzeichnet, daß die Funktion $V(\omega)$ analytisch in der oberen Hälfte der ω -Ebene ist.

$\tilde{\epsilon}(\omega = \omega_r + j \omega_i)$ von Gl. (3-26) ist in Folge der Kausalität von $f(t)$ in Gl. (3-20) regulär in der unteren ϵ -Ebene. (Ableitung z.B. in Landau-Lifschitz). Infolgedessen gelten die von H.A. Krauss und R.L. de Kronig 1927 abgeleiteten Beziehungen

$$\epsilon_r'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon_r''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (3-32)$$

$$\epsilon_r''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon_r'(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (3-33)$$

Da nach Gl. (3-20) $\tilde{\epsilon}(-\omega^*) = \tilde{\epsilon}^*(\omega)$ gilt, ist auch $\epsilon_r''(-\omega^*) = -\epsilon_r''(\omega)$, und für reelle Frequenzen $\epsilon_r''(-\omega) = -\epsilon_r''(\omega)$, so daß ϵ_r'' eine zum Nullpunkt schiefsymmetrische Funktion ist. Gl. (3-32) läßt sich dann auch

$$\epsilon_r'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon_r''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon_r''(\omega')}{\omega' + \omega} d\omega' = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \epsilon_r''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (3-34)$$

schreiben.

Es folglich die Absorptionskonstante α eines Stoffes für "alle" Frequenzen bekannt, z.B. durch Messung, so kann daraus der Brechungsindex n für "alle" Frequenzen nach Gl. (3-34) mit Gl. (3-27, 28) berechnet werden. Die notwendige Forderung für $\alpha > 0$, nämlich $\epsilon' > 0$ für $\omega > 0$, wird dabei automatisch erfüllt. Ist $\epsilon'(0 \leq \omega < \infty)$ bekannt, so wird ebenfalls Gl. (3-34) zur Bestimmung von ϵ'' verwendet, da sich automatisch eine Funktion ergibt, die außer bei $\omega = 0$ immer positiv ist (keine Dispersion ohne Absorption!).

Typische Funktionsverläufe sind in Bild 3-2 zu sehen. Zusätzlich ist der Reflexionskoeffizient $R = \frac{(n-1)^2 + \gamma^2}{(n+1)^2 + \gamma^2}$ beim Übergang von Vakuum mit $n=1$ auf das Medium aufgetragen. Die Reflexion zeigt also ebenfalls ein Maximum, vgl. Abschnitt 3.2.

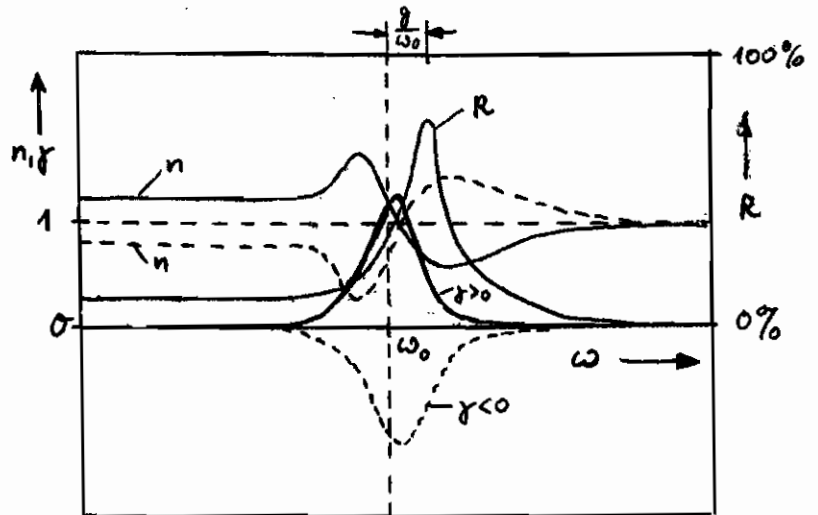


Bild 3-2 — n, R für $\gamma > 0$
 --- n für $\gamma < 0$

- Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten bzw. Brechungsindex n und Absorptionskonstante $\alpha = \gamma \omega_0$ sind frequenzabhängig, Bild 3-2, also dispersionsbehaftet. $n \neq 1$ ist ohne Resonanz bei $\omega = \omega_0$ nicht möglich. Der Fall $\omega_0 = 0$ (freies Elektron ohne Rückstellkraft) wird unter Punkt 4. dieses Abschnitts vertieft. Wächst n mit

der Frequenz, spricht man von normaler Dispersion. Im Bereich der Absorptionslinie nimmt n mit der Frequenz ab, man spricht dann von anomaler Dispersion.

Bild 3-3 zeigt den Verlauf einer hyperbolischen Absorptionskurve von bequemer analytischer Form. Daraus wurde $\epsilon_r'(\omega)$ berechnet. Mit wachsender Wellenlänge wächst ϵ_r' an, erreicht ein Maximum und fällt wieder einem Wert, der höher ist als im Bereich der Absorptionskurve. Die Größe

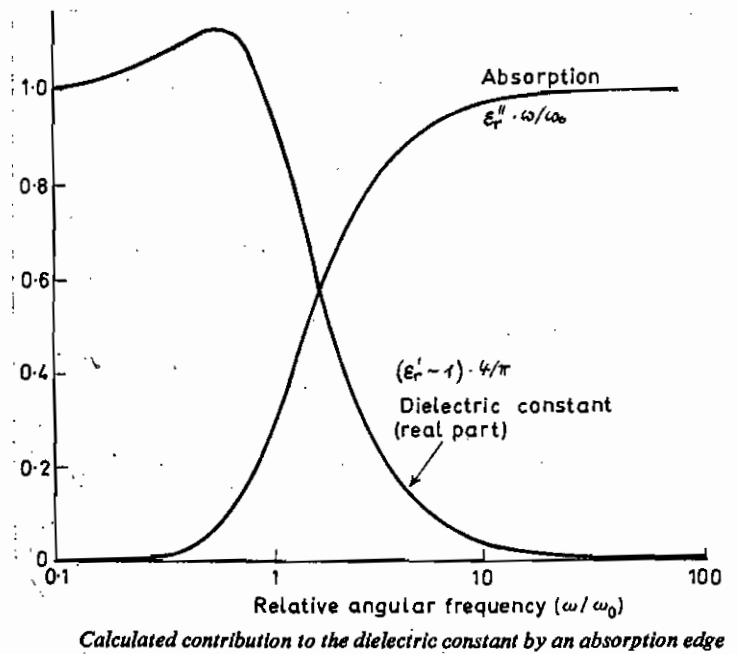


Bild 3-3

der Dielektrizitätskonstanten bzw. des Brechungsindex hängen also von der Lage der Absorptionskurve ab. Ferner ist ϵ_r' der Konzentration N der gebundenen Elektronen proportional, Gl. (3-27).

- Ein positiver Imaginärteil von $\tilde{\epsilon}_r$, $\epsilon_r'' > 0$, charakterisiert ein absorbierendes Medium, Gl. (3-18, 20), bei welchem $k_i > 0$ bzw. $\alpha = \gamma k_i > 0$ ist.

Für ein verstärkendes Medium gilt $\epsilon_r'' < 0$, $k_i < 0$, $\alpha < 0$. Aus Gl. (3-34) folgt dann, daß sich Bereiche normaler Dispersion im absorbierenden Medium in Bereiche anomaler Dispersion im verstärkenden Medium verkehren, und Bereiche anomaler Dispersion innerhalb der Absorptionslinie in Bereiche normaler Dispersion innerhalb der Verstärkungslinie, Bild 3-2.

- Die Gl. (3-27, 28) gelten auch für den Fall ungebundener Elektronen, wenn also die Rückstellkraft $D \neq 0$ ist und folglich $\omega_0 = 0$ wird, die Ruhenergie ϵ_0 des gebundenen Elektrons ist unendlich durch die effektive Masse m^* des quantisierten Elektrons zu ersetzen. Der Dämpfungsparameter γ kann für ein Kristallelektron im

statistisches Feld \vec{E} leicht interpretiert werden. Nach Abschnitt 2.3. tauscht das Elektron bei Streuprozessen Energie und Impuls mit Photonen aus. Integriert man Gl. (3-22) über viele Stöße innerhalb der Zeit T , so erhält man im eindimensionalen Fall

$$\mu_{\text{eff}} \frac{dx}{dt} \Big|_0^T + g \mu_{\text{eff}} x \Big|_0^T = -eET. \quad (3-35)$$

Es folgen die Stöße unelastisch, so ist $v = \frac{dx}{dt}$ nach jedem Stoß Null, und $x|_0^T$ ist die innerhalb der Zeit T zurückgelegte Strecke, also $x|_0^T / T = v = -\mu E$, Gl. (2-32), so daß man erhält

$$-g \mu_{\text{eff}} \mu ET = -eET, \quad (3-36)$$

oder nach g aufgelöst

$$g = \frac{e}{\mu_{\text{eff}}} = \frac{1}{\tau_k}, \quad (3-37)$$

so daß mit Gl. (2-33) g gleich der reziproken Kollisionszeit τ_k ist. Infolgedessen wird Gl. (3-27, 28)

$$\epsilon_r' - 1 = n^2 - \gamma^2 - 1 = -\frac{Ne^2}{\epsilon_0 \mu_{\text{eff}}} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2}, \quad (3-38)$$

$$\epsilon_r'' \omega = 2n\gamma\omega = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 \mu_{\text{eff}}} \cdot \frac{g}{\omega^2 + \gamma^2} = \frac{\sigma_0 / \epsilon_0}{1 + \left(\frac{\omega}{\frac{e}{\mu_{\text{eff}}}}\right)^2}, \quad (3-39)$$

$$\sigma_0 = \frac{Ne^2}{g \mu_{\text{eff}}} = eN\mu. \quad (3-40)$$

Mit der üblichen Definition der spezifischen (Strom-)leitfähigkeit, Gl. (3-40), liefert Gl. (3-39) offenbar nicht die Leitfähigkeit bei hohen Frequenzen,

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + \left(\frac{\omega}{\frac{e}{\mu_{\text{eff}}}}\right)^2}. \quad (3-41)$$

Der Ausdruck $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 \mu_{\text{eff}}} = \frac{1}{\tau_p^2}$ wird auch "Plasma-Frequenz" genannt. ω_p ist die niedrigste Eigenfrequenz eines neutralen Plasmas. Die zugehörige Wellenlänge ist unendlich. τ_p ist eine Relaxationszeit. Sie charakterisiert, mit welcher Geschwindigkeit sich Elektronen verlagern können, um eine

vorhandene Feldstärke zu kompensieren. Ändert sich die Feldstärke rascher als diese Relaxationszeit ergibt, so "kann die Elektronen nicht mehr mit", das Feld wird nicht ausreichend kompensiert und breitet sich aus. Ändert sich die Feldstärke langsamer, so bewirken die Elektronenverschiebungen eine um so bessere Kompensation, je weiter sie von Erregungszentrum entfernt sind, so daß in einiger Entfernung das Feld immer schwächer wird und exponentiell abklingt.

In einem Stoff, der sowohl multiple Leitfähigkeit, als auch Absorption durch Resonanz aufweist, überlagern sich die Dispersionserscheinungen. Man erhält

$$\epsilon_r' - 1 = n^2 - \gamma^2 - 1 = -\frac{N_1 e^2}{\epsilon_0 m_{eff}} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \gamma_1^2} + \frac{N_2 e^2}{\epsilon_0 m_2} \cdot \frac{\omega_2^2 - \omega^2}{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma_2^2}, \quad (3-42)$$

$$\epsilon_r'' = 2n\gamma = \frac{N_1 e^2}{\epsilon_0 m_{eff}} \cdot \frac{\gamma_1 / \omega}{\omega^2 + \gamma_1^2} + \frac{N_2 e^2}{\epsilon_0 m_2} \cdot \frac{\omega \gamma_2}{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma_2^2}. \quad (3-43)$$

Für Bereiche schwacher Absorption, $\gamma \rightarrow 0$, wird Gl. (3-42) auch manchmal in Gestalt einer Sellmeier-Reihe

$$\epsilon_r' - 1 \approx n^2 - 1 \approx \sum_n \frac{A_n}{B_n^2 - \omega^2} = \sum_n \frac{C_n}{D_n^2 - \lambda^2} \quad (3-44)$$

beschrieben. Auf diese Weise können beliebig viele Resonanzen eingebracht werden.

Die Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = c/n$ kann im Medium kleiner oder größer als die Lichtgeschwindigkeit sein, Bild 3-2. Bild 3-4 zeigt Netzebenen eines Kristalls. Die Kristallelementen führen erzwungene Schwingungen aus, besonders an die durch die Netzebenen definierten Gitterpunkte. Die auf AB liegenden Resonanzsysteme werden durch eine senkrecht auftreffende, von links nach rechts fortbreitende Ebene

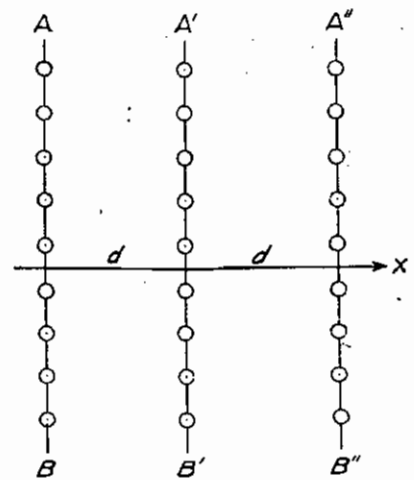
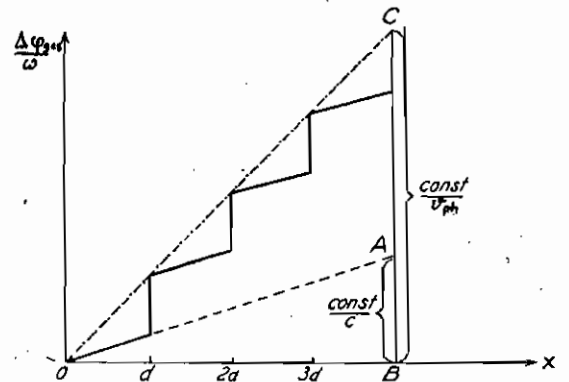


Bild 3-4

Welle zu Schwingungen in gleicher Phase ansetzt. Sie senden dann Kugelwellen aus, die sich nach dem Huyghens'schen Prinzip zu einer ebenen Welle zusammensetzen. Ihre Phase in AD ist durch $\varphi = \omega t$ gegeben. Diese Welle breitet sich mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 aus. Ihre Phase in $A'D'$ ist dann $\varphi' = \omega(t - d/c_0)$. Die gedämpften Resonanzsysteme in $A'B'$ werden also in der Phase um $\Delta\varphi = \omega d/c_0$ verzögert angesetzt und emittieren Kugelwellen mit einer Phase $\varphi' = \omega(t - d/c_0 - \varphi)$, wobei $\varphi = \arctan(-\omega g / (\omega_0^2 - \omega^2))$ die Phasenverschiebung zwischen ansetzender Feldstärke und emittierter Feldstärke ist, (S. 3-23). φ kann positiv oder negativ sein. Die einfallende und die reflektierte Schwingung überlagern sich in der Netzebene $A'B'$ mit einer anderen Phase als $\varphi' = \omega(t - d/c_0)$, als ob die Welle nicht die Strecke d , sondern die Strecke $d(1+h)$ mit $h \leq 0$ (keine Absorption, sonst h komplex!) durchlaufen hätte, Bild 3-5.

Das gleiche geschieht in allen Netzebenen. Die gestrichelte Gerade gibt den Verlauf der Phase im Vakuum an, die strichpunktierte Gerade den mittleren Verlauf im Medium. Brechungsindex und Dielektrizitätskonstante sind offensichtlich mittlere Eigenschaften ("Erwartungswerte") des Mediums. Bild 3-5



Da hier einperiodische Zustände

betrachtet wurden, ist noch keine Aussage über die Signal- bzw. Gruppen Geschwindigkeit getroffen, die natürlich immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c_0 ist. Durchläuft eine Wellenfront den Kristall, so müssen die Resonatoren der Netzebenen erst anzuwinken, überlagern also die emittierten Felder immer mit einer retardierenden Phase, welche das Signal verzögert und folglich $v_g < c_0$ erzwingt.

3.2. Reflexion und Brechung an ebenen Grenzflächen

Zwei Medien mit verschiedenen (komplexen) Brechungsindizes n liegen an der Grenzfläche $x=0$ zusammen, Bild 3-6. Trifft eine ebene Welle, aus dem Medium mit Index 1 kommend, auf die ebene Grenzfläche zum Medium 2, so sind ein

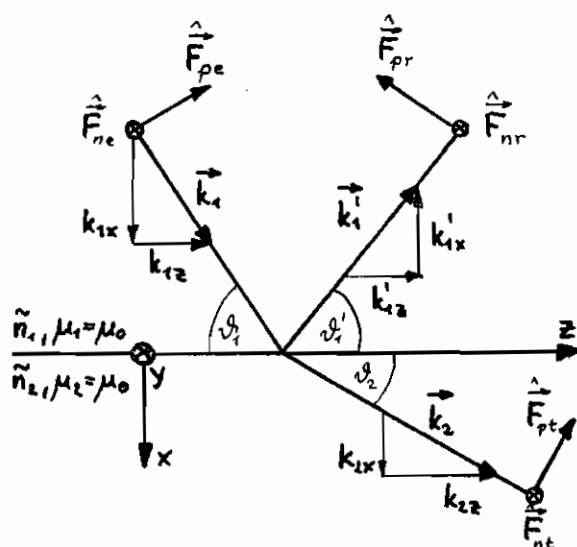


Bild 3-6

allgemein drei Wellen notwendig, um die Randbedingungen der Gl. (3-8, 9, 10, 11) mit $\vec{J}_0 = 0$, $\vec{J}_0 = 0$ zu erfüllen, nämlich die einfallende Welle (Index e), die reflektierte (Index r) und die transmittierte gebrochene Welle (Index t). Die Einfallsebene wird vom Fortpflanzungsvektor \vec{k}_1 der einfallenden Welle und dem Normalenvektor \vec{n} auf der Grenzfläche aufgespannt. In Bild 3-6 ist $y=0$ die Gleichung der Einfallsebene und $\vec{n} = \vec{e}_x$. Alle Feldkomponenten $\vec{F} = (\vec{E} \text{ oder } \vec{H})$ werden nach Anteilen parallel (\vec{F}_p) und nach Anteilen normal (\vec{F}_n) zur Einfallsebene zerlegt. Die Vorkonventionen wurden so gewählt, daß \vec{F}_n , \vec{F}_p und \vec{k} in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden.

Die drei beteiligten ebenen Wellen werden nach Gl. (3-13) angesetzt als

$$\vec{F}_e(\vec{r}, t) = \vec{F}_e e^{j(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r})} \quad (3-45)$$

für die einfallende,

$$\vec{F}_r(\vec{r}, t) = \vec{F}_r e^{j(\omega t - \vec{k}_1' \vec{r})} \quad (3-46)$$

für die reflektierte und

$$\vec{F}_t(\vec{r}, t) = \vec{F}_t e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r})} \quad (3-47)$$

für die transmittierte Welle. In der Grenzfläche $\vec{r} = (0, y, z)$

und die Stetigkeitsbedingung (3-47) mit $\vec{j}_a = 0$

$$\vec{F}_e e^{j(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r}_2)} + \vec{F}_r e^{j(\omega t - \vec{k}'_1 \vec{r}_2)} = \vec{F}_t e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r}_2)} \quad (3-48)$$

erfüllt sein. Das ist nur möglich, wenn für die Ortsphasenfaktoren in der Grenzfläche

$$\vec{k}_1 \vec{r}_2 = \vec{k}'_1 \vec{r}_2 = \vec{k}_2 \vec{r}_2 \quad (3-49)$$

gilt. Mit $k_{1z} = k_1 \cos \vartheta_1$, $k'_{1z} = k'_1 \cos \vartheta'_1$, $k_{2z} = k_2 \cos \vartheta_2$ sowie $k_1 = k_0 \tilde{n}_1$, $k'_1 = k_0 \tilde{n}'_1 = k_1$, $k_2 = k_0 \tilde{n}_2$, (3-15), folgt das verallgemeinerte Snell'sche Brechungsgesetz

$$\vartheta_1 = \vartheta'_1, \quad (3-50)$$

Einfallswinkel und Ausfallswinkel sind gleich, und

$$\tilde{n}_1 \cos \vartheta_1 = \tilde{n}_2 \cos \vartheta_2 \quad (3-51)$$

als Bestimmungsgleichung für ϑ_2 . Aus einer analogen Überlegung für $\vec{r} = (x, 0, 0)$ folgt, daß \vec{k}_1 , \vec{k}'_1 und \vec{k}_2 in einer Ebene, eben der Einfallsebene, liegen. Nach Erfüllung von (3-49) können nun die Amplituden der reflektierten und transmittierten Felder durch Anpassen der Tangentialkomponenten, (3-48), gewonnen werden. Man erhält für Polarisation senkrecht zur Einfallsebene bzw. parallel zur Grenzfläche (E-Polarisation, H-Welle wegen H_z -Komponente, $\vec{F}_{ne} = \vec{E}_e$, $\vec{F}_{pe} = \vec{H}_e$)

$$E_{ye} + E_{yr} = E_{yt}, \quad (3-52)$$

$$H_{ze} + H_{zr} = H_{zt}$$

mit $H_{ze} = H_e \sin \vartheta_1$, $H_{zr} = -H_e \sin \vartheta_1$, $H_{zt} = H_t \sin \vartheta_2$, und für Polarisation parallel zur Einfallsebene bzw. senkrecht zur Grenzfläche (H-Polarisation, E-Welle wegen E_x -Komponente, $\vec{F}_{ne} = \vec{H}_e$, $\vec{F}_{pe} = -\vec{E}_e$)

$$H_{ye} + H_{yr} = H_{yt}$$

$$E_{ze} + E_{zr} = E_{zt} \quad (3-53)$$

mit $E_{ze} = -E_e \sin \vartheta_1$, $E_{zr} = E_e \sin \vartheta_1$, $E_{zt} = -E_t \sin \vartheta_2$.

Zweckmäßig ist die Definition der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die Feldamplituden. Für E-Polarisation gilt

$$r_e = \frac{E_{yr}}{E_{ye}} = |r_e| e^{j\theta_e},$$

$$t_e = \frac{E_{yt}}{E_{ye}} \quad (3-54)$$

Für H-Polarisation gilt

$$r_m = \frac{H_{yr}}{H_{ye}} = |r_m| e^{j\theta_m},$$

$$t_m = \frac{H_{yt}}{H_{ye}} \quad (3-55)$$

Ferner werden mit Hilfe von Gl. (3-5) für die Feldkomponenten parallel zur Grenzfläche einer E-polarisierten Welle die Wellenwiderstände

$$Z_1 = \frac{E_{ye}}{H_{ze}} = \frac{\omega \mu_0}{k_{1x}} = \frac{\omega \mu_0}{k_1 \sin \theta_1} \quad (3-56)$$

in Medium 1 und

$$Z_2 = \frac{E_{yt}}{H_{zt}} = \frac{\omega \mu_0}{k_{2x}} = \frac{\omega \mu_0}{k_2 \sin \theta_2} \quad (3-57)$$

in Medium 2 definiert. Mit Gl. (3-6, 16) folgen für die grenzflächenparallelen Feldkomponenten einer H-polarisierten Welle die Wellenleitwerte

$$Y_1 = -\frac{H_{ye}}{E_{ze}} = \frac{\omega \tilde{\epsilon}_1}{k_{1x}} = \frac{\omega \epsilon_0 \tilde{n}_1^2}{k_1 \sin \theta_1} \quad (3-58)$$

in Medium 1 und

$$Y_2 = -\frac{H_{yt}}{E_{zt}} = \frac{\omega \tilde{\epsilon}_2}{k_{2x}} = \frac{\omega \epsilon_0 \tilde{n}_2^2}{k_2 \sin \theta_2} \quad (3-59)$$

in Medium 2.

Wenden die Gl. (3-54, 56, 57) in Gl. (3-52) ein, so erhält man (wegen $k_{1x}' = -k_{1x}$) mit $H_{ze} = +\frac{k_{1x}}{\omega \mu_0} E_{ye}$, $H_{zt} = -\frac{k_{2x}}{\omega \mu_0} E_{yt}$ aus Gl. (3-6)

$$r_e = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{k_{1x} - k_{2x}}{k_{1x} + k_{2x}},$$

$$t_e = 1 + r_e = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{2k_{1x}}{k_{1x} + k_{2x}} \quad (3-60)$$

also Beziehungen, die nur von den Komponenten des Fortpflanzungsvektors normal zur Grenzfläche abhängen.

Setzt man die Gl. (3-55, 58, 59) in Gl. (3-53) ein, so erhält man mit $E_{ze} = -\frac{k_{zx}}{\omega \tilde{\epsilon}_1} H_{ye}$, $E_{zr} = +\frac{k_{zx}}{\omega \tilde{\epsilon}_1} H_{yr}$ aus Gl. (3-5)

$$r_m = \frac{Y_2 - Y_1}{Y_2 + Y_1} = \frac{\tilde{n}_2^2 k_{1x} - \tilde{n}_1^2 k_{2x}}{\tilde{n}_2^2 k_{1x} + \tilde{n}_1^2 k_{2x}}, \quad (3-61)$$

$$t_m = 1 + r_m = \frac{2Y_2}{Y_2 + Y_1} = \frac{2\tilde{n}_2^2 k_{1x}}{\tilde{n}_2^2 k_{1x} + \tilde{n}_1^2 k_{2x}}$$

also Beziehungen, die von den Komponenten des Fortpflanzungsvektors normal zur Grenzfläche und von den komplexen Brechungsindizes \tilde{n}_1 und \tilde{n}_2 beider Medien abhängen. Die Gl. (3-60, 61) sind die Fresnel-Formeln für Reflexion und Transmission an einer ebenen Grenzfläche. Mit Hilfe des Snell'schen Brechungsgesetzes Gl. (3-51) kann der in Gl. (3-60, 61) vorkommende Winkel ϑ_2 eliminiert werden, so daß die Beziehungen nur noch vom Winkel ϑ_1 der einfallenden ebenen Welle gegen die Grenzfläche abhängen.

Steht \vec{k}_1 normal zur Grenzfläche (senkrechte Einfallslinie), so vereinfachen sich die Gl. (3-60, 61) (beachte: $k'_{1x} = -k_{1x}$!) zu

$$r_{ms} = -r_{es} = \frac{\tilde{n}_2 - \tilde{n}_1}{\tilde{n}_2 + \tilde{n}_1}, \quad (3-62)$$

$$t_{ms} = \frac{2\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2}, \quad t_{es} = \frac{2\tilde{n}_1}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2}$$

Die einfallende Leistung pro Flächenelement dF in der Grenzfläche wird von der reflektierten und der transmittierten Welle übernommen, folglich gilt

$$\frac{|E_{ye}|^2}{|Z_1|} = \frac{|E_{yr}|^2}{|Z_1|} + \frac{|E_{yt}|^2}{|Z_2|}, \quad (3-63)$$

$$\frac{|H_{ye}|^2}{|Y_1|} = \frac{|H_{yr}|^2}{|Y_1|} + \frac{|H_{yt}|^2}{|Y_2|}.$$

Mit den Gl. (3-56, 57, 58, 59) erhält man

$$1 = |r_e|^2 + |t_e|^2 \frac{k_{2x}}{k_{1x}},$$

$$1 = |r_m|^2 + |t_m|^2 \left| \frac{\tilde{n}_1^2 k_{2x}}{\tilde{n}_2^2 k_{1x}} \right|,$$

so daß die Beziehungen

$$R_e + T_e = 1$$

$$R_m + T_m = 1$$

(3-64)

als Zusammenhang der Leistungsreflexions- und-transmissionskoeffizienten für E-polarisierte Wellen,

$$R_e = |r_e|^2 = \left| \frac{k_{1x} - k_{2x}}{k_{1x} + k_{2x}} \right|^2, \quad T_e = \left| \frac{k_{2x}}{k_{1x}} \right| \cdot |t_e|^2 = \left| \frac{4 k_{1x} k_{2x}}{(k_{1x} + k_{2x})^2} \right|, \quad (3-65)$$

und für H-polarisierte Wellen,

$$R_m = |r_m|^2 = \left| \frac{\tilde{n}_2^2 k_{1x} - \tilde{n}_1^2 k_{2x}}{\tilde{n}_2^2 k_{1x} + \tilde{n}_1^2 k_{2x}} \right|^2, \quad T_m = \left| \frac{\tilde{n}_1^2 k_{2x}}{\tilde{n}_2^2 k_{1x}} \right| \cdot |t_m|^2 = \left| \frac{4 \tilde{n}_1^2 \tilde{n}_2^2 k_{1x} k_{2x}}{(\tilde{n}_2^2 k_{1x} + \tilde{n}_1^2 k_{2x})^2} \right|, \quad (3-66)$$

gelten. Bei senkrechtem Einfall erhält man für E-polarisierte Wellen

$$R_{es} = \left| \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \right|^2, \quad T_{es} = \left| \frac{4 \tilde{n}_1 \tilde{n}_2}{(\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2)^2} \right| \quad (3-67)$$

und für H-polarisierte Wellen

$$R_{ms} = \left| -\frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \right|^2 = R_{es}, \quad T_{ms} = \left| \frac{4 \tilde{n}_1 \tilde{n}_2}{(\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2)^2} \right| = T_{es}. \quad (3-68)$$

Insbesondere ist bei senkrechtem Einfall für den Übergang Vakuum - Glas mit $\tilde{n} \approx n = 1,5$ der Leistungsreflexionsfaktor $R_e = R_m = 4\%$.

Für die folgenden Betrachtungen werden kleine (positive oder negative) Dämpfungen vorausgesetzt, also $|x| \ll n$, so daß die Näherung $\tilde{n} \approx n$ gilt. Eine immer vorhandene Dispersion des Brechungsindex werde dabei noch als $n = n(\omega)$ berücksichtigt.

Unter dieser Voraussetzung zeigt Bild 3-7 die Ortskurven der Feldamplituden - Reflexionsfaktoren r_e und r_m mit dem Einfallswinkel ϑ_1 als Parameter, wobei $n_1 > n_2$ wie in Bild 3-6 gewählt wurde.

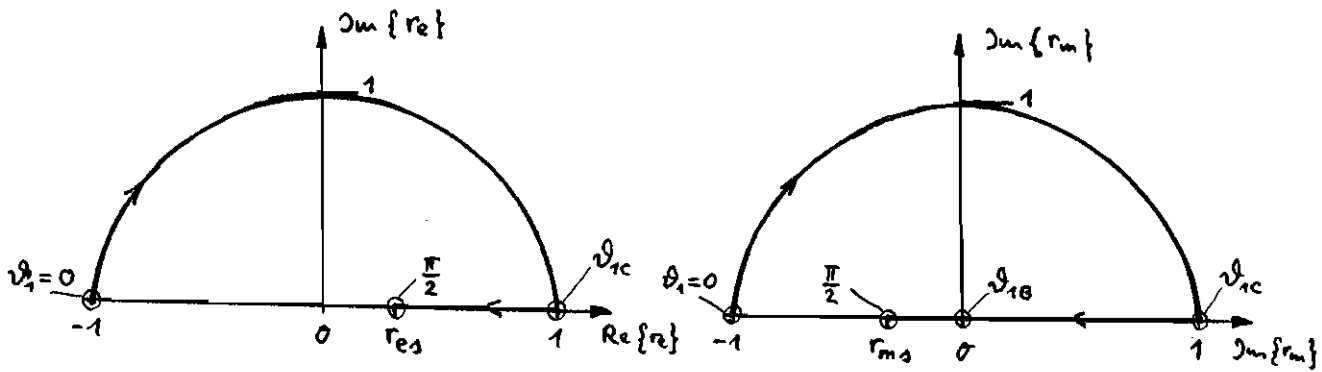


Bild 3-7 $n_1 > n_2$

In Bild 3-7 sind vier ausgezeichnete Winkel eingetragen, $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_1 = \vartheta_{1c}$, $\vartheta_1 = \vartheta_{10}$ und $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$ für senkrechten Lichteinfall.

$\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$: Bei senkrechtem Einfall unterscheiden sich die Reflexionskoeffizienten nur im Vorzeichen als Folge der in Bild 3-6 getroffenen Vorzeichenkonvention.

$\vartheta_1 = \vartheta_{10}$: Für den sogenannten Brewster-Winkel ϑ_{10}

$$\vartheta_1 = \vartheta_{10} = \arctan \frac{n_1}{n_2}, \quad \vartheta_2 = \vartheta_{20} = \arctan \frac{n_2}{n_1}, \quad \vartheta_{10} + \vartheta_{20} = \frac{\pi}{2} \quad (3-69)$$

verschwindet der Amplituden- und Leistungsreflexionskoeffizient für H-polarisierte Wellen. Reflektiertes und transmittiertes Lichtstrahl würden einen Winkel von 90° einschließen. Da man das reflektierte Licht als von angeregten Dipolen im Medium 2 abgestrahlte elektromagnetische Energie auffassen kann, ein Dipol in seiner Längsachse aber keine Energie abstrahlt, so ist gerade im Winkel von 90° zur Schwingungsrichtung der angeregten Elektronen die Leistung Null zu erwarten.

Fällt also unpolarisiertes Licht unter dem Brewster-Winkel auf eine Glasplatte oder ein anderes optisch dichteres Medium, z. B. Wasser, so wird das reflektierte und das transmittierte Licht teilweise polarisiert sein, denn der H-polarisierte Anteil fehlt in der Reflexion, während er im transmittierten Licht ohne Reflexionsdämpfung (wie bei anderen Komponenten) vorhanden ist.

$\vartheta_1 = 0$: Für streifende Incidenz ist $r_e = r_m = -1$.

$\vartheta_1 = \vartheta_{1c}$: Wird der Einfallswinkel gleich dem Grenzwinkel ϑ_{1c} , so spricht man von Totalreflexion, vgl. Abschnitt 2.1 Seite 6 und Gl. (3-51),

$$\vartheta_1 = \vartheta_{1c} = \arccos \frac{n_2}{n_1}, \quad \vartheta_2 = \vartheta_{2c} = 0. \quad (3-70)$$

Folglich wird auch $k_{2x} = k_2 \sin \vartheta_{2c} = 0$ und $k_{2z} = k_2 \cos \vartheta_{2c} = k_2$. Die Welle im Medium 2 breitet sich mit der maximal möglichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit in z -Richtung aus. Aber nur Grenzfläche liegt wegen $k_{2x} = 0$ keine x -Abhängigkeit nach Gl. (3-13, 47) vor. Wird $0 \leq \vartheta_1 < \vartheta_{1c}$, so gilt nach Gl. (3-51) mit komplexem Winkel $\tilde{\vartheta}_2 = j\vartheta_2''$

$$\cos \tilde{\vartheta}_2 = \cos j\vartheta_2'' = \cosh \vartheta_2'' = \frac{n_1}{n_2} \cos \vartheta_1, \quad (3-71)$$

$$\sin \tilde{\vartheta}_2 = \sin j\vartheta_2'' = j \sinh \vartheta_2'' = \pm j \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \cos^2 \vartheta_1 - 1}$$

und folglich

$$k_{2z} = k_2 \cos \tilde{\vartheta}_2 = k_2 \frac{n_1}{n_2} \cos \vartheta_1 = k_1 \cos \vartheta_1 = k_{1z}, \quad (3-72)$$

$$k_{2x} = k_2 \sin \tilde{\vartheta}_2 = \begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix} j k_2 \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\cos^2 \vartheta_1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = -j \sqrt{k_{1z}^2 - k_2^2},$$

so daß aus Gl. (3-47) mit Gl. (3-16), $k_1 = k_2 \frac{n_1}{n_2}$,

$$\hat{\vec{F}}_2(\vec{r}, t) = \hat{\vec{F}}_1 e^{j(\omega t - k_{1z} z)} \cdot e^{-k_1 \sqrt{\cos^2 \vartheta_1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} x} \quad (3-73)$$

im Medium 2 wird. Nur das negative Vorzeichen des Exponenten in Gl. (3-72) ist physikalisch relevant wenn man fordert, daß die evaneszenten Felder im Unendlichen verschwinden. Man erhält also eine quer gedämpfte Welle im inhomogenen Medium 2, die sich in z -Richtung mit dem komplexen Fortpflanzungsvektor

$$\vec{k}_2 = \left(-j k_1 \sqrt{\cos^2 \vartheta_1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}, 0, k_1 \cos \vartheta_1 \right) \quad (3-74)$$

ausbreitet. Sein Realteil steht, wie nach Gl. (3-18) beschrieben, senkrecht auf dem Imaginärteil. Folglich sind auch Amplituden- und Phasenflächen senkrecht aufeinander. Es handelt sich um evaneszente Oberflächenwellen.

Nach der Strecke

$$\delta = \frac{1}{|k_{zx}|} = \frac{\lambda_1}{2\pi \sqrt{\cos^2 \vartheta_1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}, \quad (3-75)$$

and Eindringtiefe genannt, ist das Feld in x -Richtung auf dem ersten Teil des Wellen an der Grenzfläche abgesunken. Die Eindringtiefe für den Grenzwinkel der Totalreflexion ist unendlich. Für $\omega \rightarrow \infty$, $\lambda_1 \rightarrow 0$ wird die Eindringtiefe Null. Für fast streifenfall, $\vartheta_1 \ll \vartheta_{1c}$, wird die Abhängigkeit der Eindringtiefe vom Unterschied der Brechungsindizes deutlich,

$$\delta(\vartheta_1 \ll \vartheta_{1c}) \approx \frac{n_1 \lambda_1}{2\pi \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}. \quad (3-76)$$

Je größer diese Differenz ist, desto geringer wird die Eindringtiefe.

Für die Amplitudenreflexionskoeffizienten erhält man mit den Gl. (3-54, 60, 61, 72)

$$r_e = \frac{k_{1x} + j\sqrt{k_{1z}^2 - k_2^2}}{k_{1x} - j\sqrt{k_{1z}^2 - k_2^2}} = |r_e| e^{j\vartheta_e}, \quad (3-77)$$

$$|r_e| = 1, \quad \vartheta_e = 2 \arctan \frac{j k_{zx}}{k_{1x}},$$

$$r_m = \frac{n_2^2 k_{1x} + j n_1^2 \sqrt{k_{1z}^2 - k_2^2}}{n_2^2 k_{1x} - j n_1^2 \sqrt{k_{1z}^2 - k_2^2}} = |r_m| e^{j\vartheta_m}, \quad (3-78)$$

$$|r_m| = 1, \quad \vartheta_m = 2 \arctan \frac{j n_1^2 k_{zx}}{n_2^2 k_{1x}}.$$

Die reflektierten Wellen haben dieselben Amplituden wie die einfallenden Wellen, sind aber je nach Polarisation in der Phase verschoben, sie überlagern sich im Medium 1 zu einer stehenden Welle in x -Richtung mit der Wellenzahl k_{1x} . Im Medium 2 hat \vec{k}_2 nur eine reelle z -Komponente k_{2z} , aber eine imaginäre x -Komponente k_{2x} , Gl. (3-74). Deswegen hat der Poynting-Vektor im Medium 2 nur eine Kompo-

nenke in z -Richtung, so daß in x -Richtung keine Leistung mehr transportiert wird (gilt in stationärem Fall!).

Qualitäts sind die Verhältnisse in Bild 3-8 dargestellt. Die Stetigkeitsbedingung

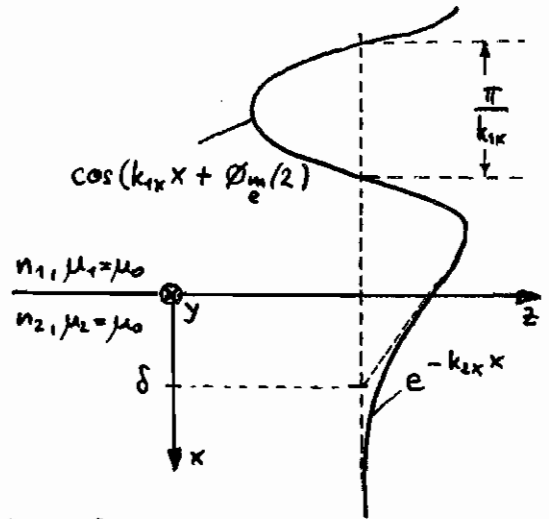


Bild 3-8

an der Grenzfläche, Gl. (3-48), ist der Forderung äquivalent, daß die \cos -Funktion in Medium 1 und die Exponentialfunktion in Medium 2 (bzw. eine weitere trigonometrische Funktion, wenn keine Totalreflexion vorliegt) an der Grenzfläche stetig sein müssen mit stetigen Tangenten, vgl. die Lösung des Bsp. (2-13*) und Bild 2-5.

Wegen der endlichen Eindringtiefe des Lichts in das Medium 2 scheint die Reflexion nicht an der Grenzfläche $x=0$, sondern in einer dahinter liegenden Ebene $x=\delta_e$ bzw. $x=\delta_m$ mit

$$\delta_e = \frac{n_2^2}{n_1^2 \cos^2 \theta_1 - n_2^2 \sin^2 \theta_1}, \quad \delta_m = \delta \quad (3-79)$$

statt zu finden. Diese Verschiebung der Reflexionsebene und die dadurch bedingte größere Laufzeit der Welle schlägt sich in den Phasenverschiebungen δ_e bzw. δ_m von Gl. (3-77, 78) nieder. In der Grenzfläche ist der reflektierte Strahl in $+z$ -Richtung um Δz gegenüber dem einfallenden Strahl verschoben. Man nennt dieses Phänomen den Goos-Hänchen-Effekt.

3.3. Dielektrischer Resonator

Für Halbleitersysteme verwendete Resonatoren bestehen aus einem Quader der Länge L , der Dicke D und der Breite B mit höherem Brechungsindex n_1 , der in ein Medium mit niedrigerem Brechungsindex n_2 eingebettet ist. Für die Abmessungen gilt meist $D \ll B$, so daß wesentliche Aussagen bereits an dem Modell des dielektrischen Schichtwellenleiters mit $D \rightarrow \infty$ gemacht werden können. Die dielektrischen Schichten werden zunächst als verlustfrei angenommen. Abschnitt 3.3.4. wird auf den Fall lateraler komplexer Indexprofile behandeln.

3.3.1. Symmetrischer Schichtwellenleiter

Der symmetrische Schichtwellenleiter (slab waveguide) besteht aus drei in z - und y -Richtung unendlich ausgedehnten Schichten, dem wellenleitenden Bereich mit dem größeren Brechungsindex n_1 und den bei $|x| = D/2$ angrenzenden Bereichen mit dem niedrigeren Brechungsindex n_2 , Bild 3-9.

Strahlt eine in y -Richtung unendlich ausgedehnte Linienquelle (mit ebener Welle beleuchteter Schlitz) in den Halbraum $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ des Bereichs 1, so werden zwei Typen von Wellen angeregt:

Solange $\vartheta_1 > \vartheta_{ic} = \arccos \frac{n_2}{n_1}$ bleibt, werden diese Strahlen nur teilweise beim Auftreffen auf die Grenzfläche reflektiert, teilweise gelangen sie gebrochen ins Medium 2. Folglich nimmt die reflektierte Leistung in z -Richtung exponentiell ab. Man nennt diese Wellen gebrochene Moden. Ist jedoch $\vartheta_1 < \vartheta_{ic}$, dann bleibt die in diesem Bereich des Raumwinkels eingestrahelte Leistung in der Schicht 1; die im Bereich

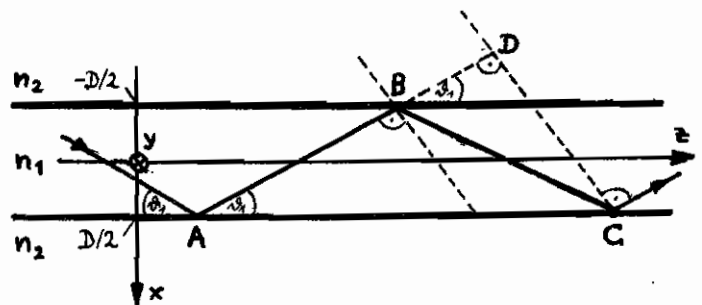


Bild 3-9

2 mitgeschleppte Leistung kehrt in x -Richtung exponentiell ab. Solche Wellen nennt man geführte Wellen oder Filmwellen. Sowohl die geführten als auch die gebrochenen Moden sind Lösungen der Maxwellgleichungen vom Typ einer ebenen Welle, (S. 13-13). Strahlt die Linienquelle von Vakuum $n_0=1$ aus in den Bereich 1, so werden nur Strahlen mit dem Vakuum-Einfallswinkel ϑ gegen die z -Achse mit $\vartheta < \vartheta_c$ geführte Moden.

$$\sin \vartheta_c = n_1 \sin \vartheta_{1c} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = N.A., \quad (3-80)$$

wobei der Sinus dieses kritischen Winkels numerische Apertur (N.A.) genannt wird. Wird am Austrittsspalt eines (endlich langen) Schichtwellenleiters die Leistungverteilung über dem Winkel gemessen, so stellt man in geometrisch-optischer Näherung fest, daß dieselbe Apertur wie in Gl. (3-80) anspeichert wird.

Bei Filmwellen sind nur solche Schwingungsformen, Moden genannt, zulässig, die selbstkonsistent sind, d.h. die den Filmmodus kontinuierliche ebene Welle unpaar mal zwei aufeinanderfolgenden Reflexionen in der Phase bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π reproduzieren, damit die resultierende Interferenz von direkter Welle und zweimal reflektierter Welle konstruktiv ist. Wäre die Interferenz destruktiv, so wäre die Welle nicht ausbreitungsfähig. Die Phasenverschiebungen $\varnothing = \varnothing_e$ bzw. $\varnothing = \varnothing_m$ von Gl. (3-77, 78) müssen natürlich berücksichtigt werden. Mit Bild 3-9 und Gl. (3-13) erhält man also die Eigenwertgleichung

$$-k_1 \overline{AD} + 2m_D \pi = -k_1 (\overline{AB} + \overline{BC}) + 2\varnothing \quad (3-81)$$

unter der Voraussetzung, daß sich Reflexionen an gegenüberliegenden Flächen nicht beeinflussen, also für nicht zu kleine Dicken im Vergleich zur Wellenlänge. Die Strecken, im D und D_1 ausgedrückt, sind $\overline{AB} = D/\sin \vartheta_1$, $\overline{BC} = \overline{AB}$, $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$, $\overline{DD} = \overline{AB} \sin(\frac{\pi}{2} - 2\vartheta_1)$, also

$$\overline{AD} + \overline{BC} - \overline{AD} = \overline{AB} - \overline{BD} = \frac{D}{\sin \vartheta_1} (1 - \cos 2\vartheta_1) = \frac{D}{\sin \vartheta_1} (1 - \cos^2 \vartheta_1 + \sin^2 \vartheta_1) = 2D \sin \vartheta_1.$$

Folglich erhält man

$$m_D \pi = \varnothing - k_1 D \sin \vartheta_1 \quad (3-82)$$

als Bedingungsbedingung für Filmwellen der Ordnung m_D .

Setzt man E-polarisierte Wellen voraus, so wird $\varnothing = \varnothing_e$, also mit Gl. (3-77)

$$m_D \pi = 2 \arctan \frac{j k_{2x}}{k_{1x}} - k_1 D \sin \vartheta_1 \quad (3-83)$$

Mit den Abkürzungen, vgl. Gl. (3-76, 80),

$$\begin{aligned} u &= k_{1x} D = k_1 D \sin \vartheta_1 = D \sqrt{k_1^2 - \beta^2} \\ w &= j k_{2x} D = D \sqrt{\beta^2 - k_2^2} \\ \beta &= k_{1z} = k_{2z}, \quad B = \frac{w^2}{V_D^2} = \frac{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}{(n_1^2 - n_2^2) k_0^2} \\ V_D &= \frac{D}{\delta(\vartheta_1, \alpha, \vartheta_{1c})} = k_0 D \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \end{aligned} \quad (3-84)$$

für die normierte x -Komponente u des Fortpflanzungsvektors in Medium 1, die normierte (bei Totalreflexion reelle) x -Komponente w in Medium 2, die z -Komponente β und den normierten Frequenzparameter V_D (so ist Vakuumwellenlänge) wird aus Gl. (3-83)

$$w = u \tan \left(\frac{\mu}{2} + m_D \frac{\pi}{2} \right) \quad (3-85)$$

Für gerade m_D erhält man in $x=0$ symmetrische TE-Moden (E-Feld rein transversal, E-polarisiert), auch H-Moden (nur H-Feld hat z -Komponente) genannt,

$$w_H = u_H \tan \frac{\mu_H}{2} \quad m_D = 0, 2, 4, \dots \quad (3-86)$$

und für ungerade m_D in $x=0$ antisymmetrische H-Moden

$$w_H = -u_H \cot \frac{\mu_H}{2} \quad m_D = 1, 3, 5, \dots \quad (3-87)$$

mit der Zusatzbedingung aus Gl. (3-84)

$$u^2 + w^2 = V_D^2 \quad (3-88)$$

Die Schnittpunkte des Kreises Gl. (3-88) mit dem Radius V_D in der w - u -Ebene mit den Kurven der Gl. (3-86, 87) sind Lö-

gruppen der Eigenwertgleichung Gl. (3-81). Je nach Größe des V-Parameters ergeben sich endlich viele diskrete geführte Moden. Andere Wellentypen sind nicht ausbreitungsfähig.

Setzt man H-polarisierte Wellen voraus, so wird $\Phi = \Phi_m$, also mit Gl. (3-78)

$$m_D \pi = 2 \arctan \frac{j n_1^2 k_2 x}{n_2^2 k_1 x} - k_1 D \sin \vartheta_1 \quad (3-89)$$

beziehungsweise

$$W_E = \frac{n_2^2}{n_1^2} \mu_E \tan \left(\frac{\mu_E}{2} + m_D \frac{\pi}{2} \right). \quad (3-90)$$

Für symmetrische E-Moden erhält man

$$W_E = \frac{n_2^2}{n_1^2} \mu_E \tan \frac{\mu_E}{2} \quad m_D = 0, 2, 4, \dots \quad (3-91)$$

und für antisymmetrische E-Moden

$$W_E = - \frac{n_2^2}{n_1^2} \mu_E \cot \frac{\mu_E}{2} \quad m_D = 1, 3, 5, \dots \quad (3-92)$$

mit der Zusatzbedingung Gl. (3-88).

Wie im Text zu Bild 3-8 beschrieben, existiert für geführte Moden im Bereich 1 in z-Richtung eine laufende und in x-Richtung eine stehende Welle. Im Bereich 2 klingt das Feld in x-Richtung exponentiell ab. Folglich gilt mit den Ergebnissen der Gl. (3-86, 87, 88, 91, 92) für schwach geführte Filme $n_1^2 \approx n_2^2$ und der Abkürzung Δ für die relativen quadratischen Indexunterschiede

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \left\{ \begin{array}{l} n_1^2 \approx n_2^2 \\ \Delta \ll 1 \end{array} \right\} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad (3-93)$$

für die Amplituden des elektrischen bzw. magnetischen Feldes, die Beziehung

$$\vec{F}_{m_D}(\vec{r}, t) = \vec{F} \cdot \Psi_{m_D}(x) e^{-j\beta m_D z} \quad (3-94)$$

$\Psi_{m_D}(x)$ wird Strukturfunktion des Modus m_D genannt und lautet für symmetrische E- und H-Moden mit $\Delta \ll 1$

$$\Psi_{m_D}(x < -D/2) = N \cos \frac{\mu_{m_D}}{2} e^{\frac{W_{m_D}}{D} (x + \frac{D}{2})}$$

$$\Psi_{m_D}(|x| < D/2) = N \cos \mu_{m_D} \frac{x}{D} \quad m_D = 0, 2, 4, \dots \quad (3-95)$$

$$\Psi_{m_D}(x > D/2) = N \cos \frac{\mu_{m_D}}{2} e^{-\frac{W_{m_D}}{D} (x - \frac{D}{2})}$$

und für antingensymmetrische E- und H-Moden mit $\Delta \ll 1$

$$\Psi_{m_D}(x < -D/2) = -N \sin \frac{\mu_{m_D}}{2} e^{\frac{W_{m_D}}{D} (x + \frac{D}{2})}$$

$$\Psi_{m_D}(|x| < D/2) = N \sin \mu_{m_D} \frac{x}{D} \quad m_D = 1, 3, 5, \dots \quad (3-96)$$

$$\Psi_{m_D}(x > D/2) = N \sin \frac{\mu_{m_D}}{2} e^{-\frac{W_{m_D}}{D} (x - \frac{D}{2})}$$

Der Normierungsfaktor N wird aus der Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{m_D}^*(x) \Psi_{m'_D}(x) dx = \delta_{m_D, m'_D} \quad (3-97)$$

bestimmt. Typische Feldverteilungen sind in Bild 3-10 dargestellt. Der Index m_D gibt offensichtlich die Anzahl der Feldhäufungen pro Dicke D des Wellenleiters an.

Um die Qualität der Führung zu beurteilen, wird ein ^{vertikaler} Konzentrationseffizienzfaktor für den m_D -ten Modus definiert,

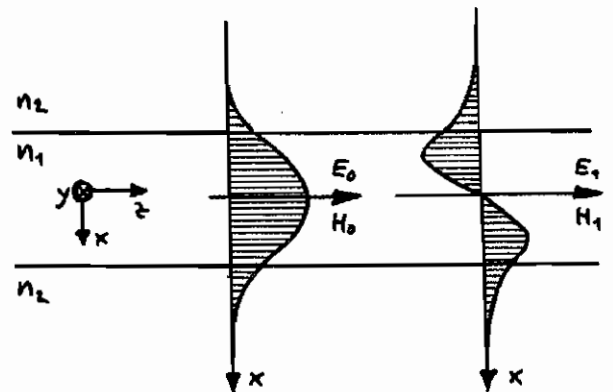


Bild 3-10

$$\Gamma_{m_D} = \int_{-D/2}^{+D/2} \Psi_{m_D}^2(x) dx \quad (3-98)$$

Wegen der Normierungsbedingung (l. (3-97)) gilt $0 \leq \Gamma_{m_D} \leq 1$. Je größer der Konzentrationseffizienzfaktor wird, desto besser ist der Modus geführt. Grundsätzlich ist der Konzentrationseffizienzfaktor des H_0 -Modus, Γ_{H_0} , maximal, da für ihn W_{H_0} am größten wird.

Im Bereich $0 \leq V_D < \pi$ ist allein dieser niedrige symmetrische H_0 -Modus (und der korrespondierende E_0 -Modus) ausstrahlungsfähig. Die unendlich vielen Lösungen für reelles k_{zx} (imaginäres w) sind Lechwellen, die Energie in den Bereich 2 abstrahlen und eine exponentielle Lechwellenabschwächung der Welle in z -Richtung des Bereichs 2 verursachen.

3.3.2. Schichtwellenleiter - Resonator

Wird der Schichtwellenleiter von Bild 3-9 bei $|z| = L/2$ durch ein Dielektrikum mit $n_0=1$ bespannt, Bild 3-11, so muß für konstruktive Interferenz der vor- und rücklaufenden Welle eine Phasenbeziehung analog zu Gl. (3-82) gelten, nämlich

$$m_L \pi = \varnothing - k_1 L \cos \alpha_1, \quad (3-99)$$

wobei hier natürlich die z -Komponente des Fortpflanzungsvektors maßgebend wird. m_L ist sehr groß gegen 1, z.B. gilt für GaAs-Laser mit $n_{1x} = 3,6$, $\lambda_0 = 820 \text{ nm}$, $L = 400 \mu\text{m}$ $m_L \approx 3300$.

Der Reflexionsfaktor $R_{\pm} = R_{m\pm}$
 $R_{\pm} = \left(\frac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0} \right)^2 = 32\%$ ist ungleich 1; folglich ist bei $|z| = L/2$ kein Knoten der Feldstärke feststellbar, sondern es liegen Verhältnisse ähnlich wie in Bild 3-12 vor. Der Resonator ergibt eine gewisse "kapazitive Verlängerung" der optischen Resonatorlänge $n_1 L$, die jedoch nicht weiter berücksichtigt werden soll, so daß mit Gl. (3-77)

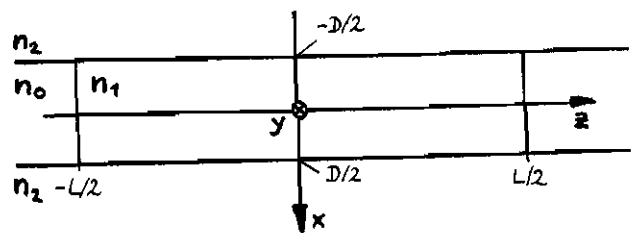


Bild 3-11

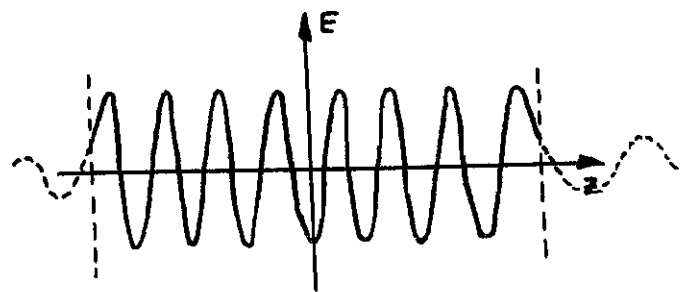


Bild 3-12

und Gl. (3-78) $\varphi = \varphi_m = \varphi_e = -\pi$ wird (entspricht der Annahme $n_1 \gg n_0$).

Für die axiale (longitudinale) Modenzahl $l = m_L + 1$ gilt also näherungsweise

$$L\pi = -\beta L. \quad (3-100)$$

Setzt man Gl. (3-100) und Gl. (3-86, 87) bzw. Gl. (3-91, 92) mit Gl. (88) in die erste Beziehung von Gl. (3-84) ein, so erhält man die Eigenwertgleichung (Resonanzbedingung) für E- bzw. H-Moden

$$k_1^2 \approx \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 + k_{xx}^2. \quad (3-101)$$

k_{xx} gibt sich als Lösung transzendenten Gleichungen, wobei die Näherung $\Delta \ll 1$ realistisch ist. Um einen Überblick zu erhalten, soll hier jedoch (unrealistischweise) $n_1 \gg n_2$ vorausgesetzt werden; der Grenzwinkel der Totalreflexion strebt damit gegen $\pi/2$, während die Eindringtiefe nach Gl. (3-75) gegen Null geht. Die stehenden Wellen in transversaler Richtung haben folglich Knoten bei $kx = D/2$. Also erhält man aus Gl. (3-82) für die (vertikal) transversale Modenzahl $d = m_D + 1$

$$d\pi = -k_{xx}D, \quad (3-102)$$

so daß die Resonanzbedingung

$$k_1^2 \approx \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{d\pi}{D}\right)^2 \quad (3-103)$$

lautet. Bild 3-13 zeigt drei solche Moden, $E_{m_D m_L}$ - bzw. $H_{m_D m_L}$ - Moden mit, von oben nach unten, $m_D = 1$ $m_L = N_1$, $m_D = 0$ $m_L = N_0$, $m_D = 1$ $m_L = N_1$. Der Abstrahlwinkel ϑ_0 (bei Abstrahlung sind natürlich die Voraussetzungen der Gl. (3-100) verletzt!) eines Modens kann näherungsweise folgendermaßen berechnet werden: Das Verhältnis der Anzahl von Maxima der transversalen und der longitudinalen Moden,

$$N' = \frac{d}{l}, \quad (3-104)$$

bestimmt zusammen mit der Wellenkegengeometrie den Winkel ϑ_1 ,

$$\tan \vartheta_1 = \frac{k_{xz}}{\beta} \approx \frac{N'L}{D} \quad (3-105)$$

das über das Snell'sche Brechungsgesetz (l. (3-51) mit ϑ_0 im Medium $n_0=1$ verknüpft ist. Folglich gilt

$$\sin \vartheta_0 = n_1 \sin \vartheta_1 = n_1 \sin \arctan \frac{N'L}{D} = \frac{n_1 \frac{N'L}{D}}{\sqrt{1 + \left(\frac{N'L}{D}\right)^2}} \quad (3-106)$$

Die vertikale Strahldivergenz wächst also mit dem Brechungsindex n_1 , der Resonatorlänge L und der vertikalen Modenzahl d , sie nimmt ab mit wachsender Wellenlängendicke D und wachsender axialer Modenzahl l .

Aus l. (3-103) [bzw. in besserer Näherung aus l. (3-101)] läßt sich die Vakuum-Resonanzwellenlänge λ_{de} angeben,

$$\lambda_{de} = \frac{2n_1(\lambda_{de})}{\frac{l}{L} \sqrt{1 + \left(\frac{d/D}{l/L}\right)^2}} \quad (3-107)$$

Da für Halbleitersonden mit Streifenproblemetrie der Quotient $\frac{L}{D} \approx 800$, der Quotient $\frac{d}{l}$ aber Werte von 0 bis $\frac{2}{3300}$

annimmt, kann geteilt werden $\lambda_{de} \approx \frac{2n_1(\lambda_{de})}{l/L}$.

Differenziert man l. (3-107) nach der longitudinalen Modenzahl l , die näherungsweise als kontinuierliche Variable aufgefaßt werden kann, so erhält man mit $\frac{\partial \lambda_{de}}{\partial l} \approx \frac{\Delta \lambda_{de}}{\Delta l} = \Delta \lambda_{de} / \text{sign} \Delta l$ den axialen Modenabstand

$$\Delta \lambda_l = - \frac{\lambda_{de}^2}{2Ln_1} \cdot \frac{\lambda_{de}}{2n_1} \cdot \frac{l}{L} \text{sign} \Delta l$$

(3-108)

$$\Delta \lambda_l \approx - \frac{\lambda_{de}^2}{2Ln_1} \cdot \text{sign} \Delta l,$$

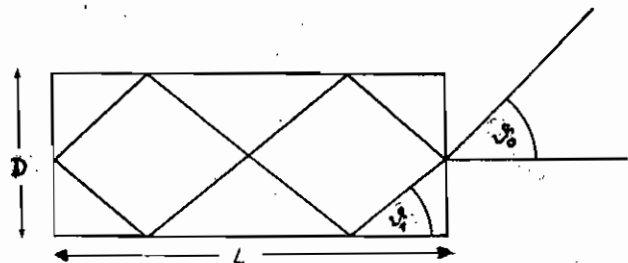
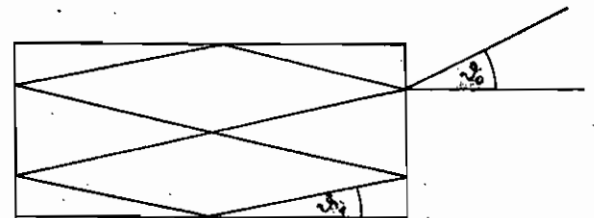
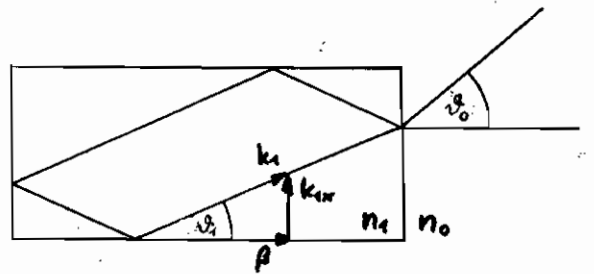


Bild 3-13

Wobei der effektive Brechungsindex (Gruppenbrechungsindex)

$$n_{\text{eff}} = n_1(\lambda_{de}) \left[1 - \frac{\lambda_{de}}{n_1(\lambda_{de})} \cdot \frac{\partial n_1(\lambda_{de})}{\partial \lambda} \right] \quad (3-109)$$

die Materialdispersion im Resonator berücksichtigt. Höhere transversale Moden haben von der Näherungsformel (3-108) abweichende axiale Abstände, verursacht durch unterschiedliche z-Komponenten des Fortpflanzungsvektors, vgl. Bild 3-13 (geometrische Dispersion). Wesentlich stärker jedoch wirkt sich die Dispersion des Brechungsindex aus.

Für den transversalen Modenabstand erhält man nach dem gleichen Verfahren mit $\frac{\partial \lambda_{de}}{\partial d} \approx \frac{\Delta \lambda_{de}}{\Delta d} = \Delta \lambda_{de} / \text{ign} \Delta d$

$$\Delta \lambda_d = - \frac{\lambda_{de}^2}{2L n_{\text{eff}}} \cdot \frac{\lambda_{de}}{2n_1} \cdot \frac{d}{D} \text{ign} \Delta d \quad (3-110)$$

$$\Delta \lambda_d \approx - \frac{\lambda_{de}^2}{2L n_{\text{eff}}} \cdot \frac{d/D}{l/L} \cdot \text{ign} \Delta d$$

Klar sichtbar ist die Abhängigkeit des transversalen Modenabstandes von der axialen Modenzahl; stärker als die geometrische Dispersion wirkt sich jedoch auch hier die Materialdispersion aus. Typische Modenabstände für $\lambda_{de} = 820 \text{ nm}$, $n_{\text{eff}} = 3,6$, $L = 400 \mu\text{m}$, $D = 0,5 \mu\text{m}$, also $l(d=1) = 3300$, sind $\Delta \lambda_d \approx 1,9 \text{ \AA}$ und $\Delta \lambda_d(d=1) \approx 0,4 \text{ \AA}$.

Die numerische Anwendung der Resonanzbedingung (3-101) zeigt für den axialen Modenabstand gute Übereinstimmung mit (3-108), der transversale Modenabstand wird jedoch mit (3-110) überschätzt, da für $D = 0,5 \mu\text{m}$ und $m_3 = 0$ der Konzentrationsfaktor $\Gamma = 0,8$ ist, so dass die effektive Dicke, die in (3-101) noch berücksichtigt ist, größer wird.

3.3.3. Streifenwellenleiter

Neben den in y -Richtung (lateral) sehr breiten Schichtwellenleiterstrukturen haben lateral begrenzte Streifenwellenleiter große Bedeutung. Bild 3-14 zeigt das Modell eines "vergrabenen" (buried), d.h. gänzlich von Medium 2 umgebenen, Streifens mit dem Brechungsindex n_1 . Auch an den Seitenflächen $|y| = B/2$ wird eine Filmwelle der Ausbreitungskonstanten β , Gl. (3-84), total reflektiert. Aus Gl. (3-84, 86) ist ferner ersichtlich, daß wegen $B = \frac{\omega^2}{V_D^2} = \frac{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}{(n_1^2 - n_2^2) k_0^2} \approx \{\Delta \ll 1\} \approx \frac{\beta - n_2 k_0}{(n_1 - n_2) k_0}$ für einen bestimmten Modus die normierte Phasenkonstante B und damit β mit V_D und also mit D wächst. Der effektive Brechungsindex

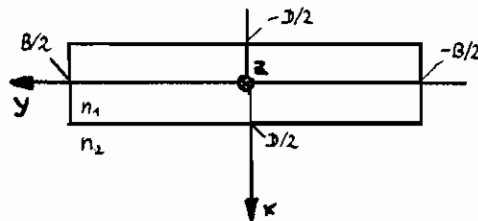


Bild 3-14

$$n_{1D} = \frac{\beta}{k_0} < n_1 \quad (3-111)$$

(die Phasengeschwindigkeit im Wellenleiter n_1 ist größer als im unendlich ausgedehnten Material n_1) wächst also ebenfalls mit der Schichtdicke D (geometrische Dispersion).

In Bild 3-15 ist ähnlich dem Bild 3-9 der Streifen dargestellt, aber hier in der y - z -Ebene. Eine Filmwelle mit der Phasenkonstanten $\beta = n_{1D} k_0$ ist auf ihrem Zick-zack-Weg

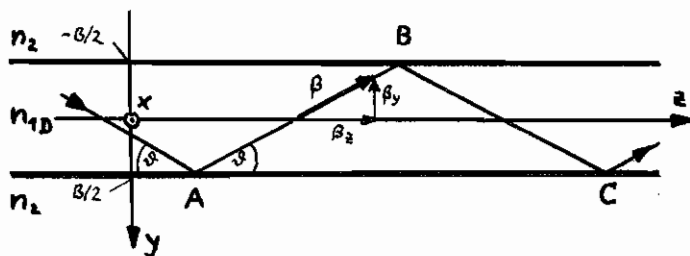


Bild 3-15

zeigt. Die Propagation unter einem Winkel ϑ zur z -Achse. Der effektive Brechungsindex charakterisiert das Medium, welches durch die Berücksichtigung der vertikal transversalen Begrenzung bei $|x| = D/2$ verändert erscheint. Die Filmwelle wird an der lateral transversalen Begrenzungsfläche $|y| = B/2$ dann total reflektiert, wenn

$$\beta_z = \beta \cos \vartheta > n_2 k \quad (3-112)$$

wird, Gl. (3-72), wenn also durch die Forderung der Stetigkeit an der Grenzfläche, Gl. (3-49), ersungen wird, daß die Wellenlänge in z-Richtung im Medium 2 kürzer ist als die Wellenlänge λ_0/n_2 .

Stehende Wellen müssen sich nach zwei Reflexionen in der Phase reproduzieren. Für sie gilt also eine Eigenwertgleichung ähnlich Gl. (3-82), allerdings ist k_{zx} zu ersetzen durch $\beta_y = \beta \sin \vartheta$ und k_{zy} von Gl. (3-72) durch $-j\sqrt{\beta_z^2 + k_{zx}^2 - k_2^2}$, da die Ausbreitungsebene in der x-z-Ebene (wegen der primären Filmwelle) auch eine x-Komponente hat.

Entsprechend der Gl. (3-84) werden folgende Abkürzungen eingeführt (der Index s steht für Streifenwelle)

$$u_s = \beta_y B = B \sqrt{k_1^2 - \beta_z^2 - \left(\frac{u}{D}\right)^2}$$

$$w_s = j k_{zy} B = B \sqrt{\beta_z^2 + \left(\frac{u}{D}\right)^2 - k_2^2}$$

$$\beta_z = \sqrt{k_1^2 - \left(\frac{u}{D}\right)^2 - \left(\frac{u_s}{B}\right)^2} \quad (3-113)$$

$$B_z = \frac{\beta_z^2 - n_2^2 k_0^2}{(n_1^2 - n_2^2) k_0^2} \approx \left\{ \Delta \ll 1 \right\} \approx \frac{\beta_z - n_2 k_0}{(n_1 - n_2) k_0}$$

$$V_B = k_0 B \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Für die Reflexionsphasenwinkel gilt, wenn separate Beeinflussung vernachlässigt wird, mit Gl. (3-77, 78)

$$\vartheta_e = 2 \arctan \frac{j k_{zy}}{\beta_y} = 2 \arctan \frac{w_s}{u_s} \quad (3-114)$$

$$\vartheta_m = 2 \arctan \frac{j n_1^2 k_{zy}}{n_1^2 \beta_y} = 2 \arctan \frac{n_1^2 w_s}{n_1^2 u_s}$$

Die Streifenwelle, die aus einer Verrippung der E_{mp} -Filmwelle in der y-z-Ebene entsteht, nennt man $E_{Hmp,ms}$ -Welle, die aus einer Verrippung der H_{mp} -Filmwelle entstandene Streifen-

Welle nennt man HE_{m_0, m_1} -Welle. Es handelt sich bei den EH- und HE-Moden um hybride Formen, da sowohl E- als auch H-Feld Komponenten in z-Richtung haben, vgl. Bild 3-15. Ein EH-Modus ist für Reflexion bei $|p| = 0/2$ näherungsweise H-polarisiert, ein HE-Modus E-polarisiert.

Die Anwendung von Gl. (3-81) führt zu formal identischen Beziehungen, wie sie die Gl. (3-86, 87, 88, 91, 92) darstellen, nämlich für EH_{m_0, m_1} -Moden

$$\begin{aligned} w_s &= u_s \tan \frac{u_s}{2} & m_0 &= 0, 2, 4, \dots \\ w_s &= -u_s \cot \frac{u_s}{2} & m_0 &= 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (3-115)$$

und für HE_{m_0, m_1} -Moden

$$\begin{aligned} w_s &= \frac{n_2^2}{n_1^2} u_s \tan \frac{u_s}{2} & m_0 &= 0, 2, 4, \dots \\ w_s &= -\frac{n_2^2}{n_1^2} u_s \cot \frac{u_s}{2} & m_0 &= 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (3-116)$$

mit dem transversalen Phasenparameter u_s der Streifenwelle. Als Zusatzbedingung gilt

$$u_s^2 + w_s^2 = V_0^2 \quad (3-117)$$

Schnittpunkte dieses Kreises in der $w_s - u_s$ -Ebene mit den Kurven Gl. (3-115, 116) sind Lösungen der Eigenwertgleichung. Diese, zusammen mit den Lösungen für die Filnwelle, beschreiben die Streifenwelle.

Da nun die transversalen Phasenparameter u, u_s im Medium 1 und die transversalen Dämpfungsparameter w, w_s im Medium 2 bekannt sind, kann man die Feldverteilungen über den Querschnitt ansehen.

Innerhalb des Streifens bilden sich in transversaler Richtung stehende Wellen aus, außerhalb hingegen die

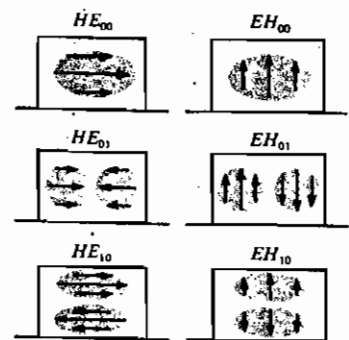


Bild 3-16

Felder exponentiell ab, vgl. Gl. (3-95,96). In Bild 3-16 sind typische Verteilungen angegeben. Die Schattierung markiert, wo im Querschnitt hohe Leistungsichten vorhanden sind, die sich als helle Flecken auf Endflächen des Streifens zeigen würden. Der Grundmodus des Streifenleiters ist der EH_{00} - bzw. HE_{00} -Modus. Wenn die Ungleichung $B \gg D$ gilt, wird auch der Konzentrationsfaktor in y -Richtung $\Gamma_{m0} > \Gamma_{mD}$ sein; der am besten geführte Grundmodus ist dann ein HE_{00} -Modus.

3.3.4. Streifenwellenleiter mit lateralem Indexprofil

Ein Streifenwellenleiter kann nicht nur durch abrupte laterale Sprünge des reellen Brechungsindex wie in Bild 3-14 definiert werden, sondern auch durch ein Profil des komplexen Brechungsindex $\tilde{n}_1(y)$. Um das eigentlich dreidimensionale Problem zweidimensional behandeln zu können, wird wiederum ein effektiver Brechungsindex für jeden einzelnen (vertikalen) Filmmodus nach Gl. (3-111) definiert; dieser ändert sich natürlich mit der Filmwellen-Fortpflanzungskonstanten. Deshalb wird hier ein fester Filmmodus betrachtet. Die entsprechende komplexe effektive relative Dielektrizitätskonstante des Mediums n_{1D} von Bild 3-15 ist definiert als

$$\tilde{\epsilon}_{r1D}(x,y) = \begin{cases} n_2^2 & \text{für } |x| > D/2 \\ \epsilon_{r1D} + \Delta \epsilon_{r1D} (\alpha + j) \left[1 - \left(\frac{|y|}{B/2} \right)^2 \right] & \text{für } |x| \leq D/2, \end{cases} \quad (3-118)$$

also mit $n_{1D}^2 = \epsilon_{r1D}$ eine parabolische Änderung in y -Richtung, dagegen eine abrupte Änderung in x -Richtung außerhalb des Streifens. In praktischen Strukturen gilt immer $(\Delta \epsilon_{r1D} / \epsilon_{r1D}) \ll 1$, so daß der Verlauf des komplexen Brechungsindex in der Näherung $\tilde{n}_{1D} = \sqrt{\tilde{\epsilon}_{r1D}(y)} = n_{1D} \sqrt{1 + \epsilon} \approx n_{1D} (1 + \frac{1}{2}\epsilon)$ zu

$$\tilde{n}_{10}(y) \approx n_{10} \left\{ 1 + \frac{\Delta \epsilon''_{10}}{2 \epsilon_{10}} (Q + j) \left[1 - \left(\frac{y}{B/2} \right)^2 \right] \right\} = n(y) - j\gamma(y) \quad (3-119)$$

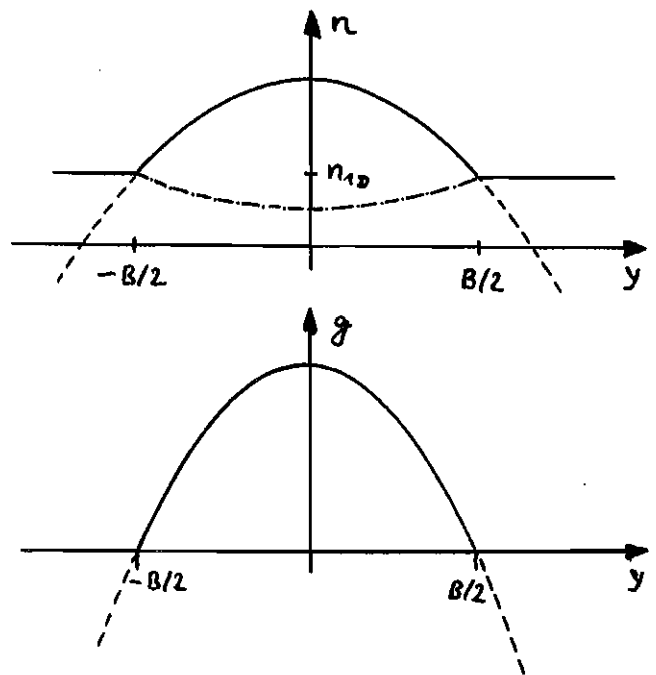
berechnet werden kann. Der Realteil $n(y) = \text{Re} \{ \tilde{n}_{10}(y) \}$ heißt dann

$$n(y) \approx n_{10} \left\{ 1 + \frac{\Delta \epsilon''_{10}}{2 \epsilon_{10}} Q \left[1 - \left(\frac{y}{B/2} \right)^2 \right] \right\} \quad (3-120)$$

und der Imaginärteil $\gamma(y) = \frac{1}{2} \alpha(y) / k_0 = -g(y) / k_0 = \text{Im} \{ \tilde{n}_{10}(y) \}$

$$g(y) \approx k_0 n_{10} \frac{\Delta \epsilon''_{10}}{2 \epsilon_{10}} \left[1 - \left(\frac{y}{B/2} \right)^2 \right]. \quad (3-121)$$

Bild 3-17 zeigt den Verlauf der Funktionen (3-120, 121) für den Fall einer axialen Brechungsindexerhöhung $Q > 0$ im verstärkenden Medium $\Delta \epsilon''_{10} > 0$. Wie mit Hilfe von (3-13) im Eindimensionalen leicht zu sehen ist, entspricht $\Delta \epsilon''_{10} > 0$ optische Verstärkung und $\Delta \epsilon''_{10} < 0$ dem Fall der Absorption.



Der Faktor Q gibt an, in welchem Verhältnis die (reelle) Brechungsindexänderung

Bild 3-17 — $Q > 0, \Delta \epsilon''_{10} > 0$
 --- $Q < 0, \Delta \epsilon''_{10} > 0$

und die Verstärkungsänderung in Abhängigkeit vom Ort auf die Wellencharakteristiken des Streifens wirken. Liegt optische Verstärkung vor, so entspricht $Q < 0$ einer axialen Einbuchtung des Brechungsindex.

Ausgehend von (3-12) erhält man mit dem Ansatz

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{F} \Psi_{m_x}(x) \Psi_{m_y}(y) e^{-j\beta z} \quad (3-122)$$

die Differentialgleichung

$$-\frac{1}{\Psi_{mD}(x)} \cdot \frac{d^2 \Psi_{mD}(x)}{dx^2} = \frac{1}{\Psi_{mB}(y)} \cdot \frac{d^2 \Psi_{mB}(y)}{dy^2} + (k_1^2 - \beta_z^2) \stackrel{!}{=} k_{1x}^2, \quad (3-123)$$

die wir mit der Separationskonstanten k_{1x}^2 in die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 \Psi_{mD}(x)}{dx^2} + k_{1x}^2 \Psi_{mD}(x) = 0 \quad (3-124)$$

und

$$\frac{d^2 \Psi_{mB}(y)}{dy^2} + (k_1^2 - k_{1x}^2 - \beta_z^2) \Psi_{mB}(y) = 0 \quad (3-125)$$

zerlegen läßt. Die Lösung von Gl. (3-124) wurde bereits im Abschnitt 3.3.1. als Ergebnis einer geometrisch-optischen Betrachtung des Filmwellenleiters angegeben, Gl. (3-95, 96), und sei weiterungsweise auch gültig für den Streifenwellenleiter Gl. (3-118). In Gl. (3-125) entspricht $k_1^2 - k_{1x}^2$ gerade dem in Gl. (3-84) definierten β , so daß man mit dem effektiven Brechungsindex $\tilde{n}_{10}^2 = \tilde{\epsilon}_{r10} = \beta^2/k_0^2$ des Gl. (3-111) schreiben kann

$$\frac{d^2 \Psi(y)}{dy^2} + [k_0^2 \tilde{\epsilon}_{r10}(y) - \beta_z^2] \Psi(y) = 0, \quad (3-126)$$

wobei nur Vereinfachung der Schreibweise des Index m_B weggelassen wurde. Setzt man für den Bereich $|x| \leq D/2$ die Gl. (3-118) in Gl. (3-126) ein, so wird daraus

$$\frac{d^2 \Psi(y)}{dy^2} + [k_0^2 \epsilon_{r10} + k_0^2 \Delta \epsilon_{r10}''(\Omega + j) - \beta_z^2 - k_0 \Delta \epsilon_{r10}''(\Omega + j) \left(\frac{y}{B/2}\right)^2] \Psi(y) = 0. \quad (3-11)$$

Zweckmäßig sind die Definitionen des normierten Frequenzparameters

$$V_B^2 = k_0^2 \left(\frac{B}{2}\right)^2 \cdot \Delta \epsilon_{r10}'' \cdot (\Omega + j) \quad (3-12P)$$

und der normierten komplexen Phasenkonstanten

$$\tilde{\beta}_2 = \beta_2 + jG_2 = \frac{(\beta_2/k_0)^2 - \epsilon_{r10}}{\Delta \epsilon_{r10}} \approx \left\{ \frac{|\Delta \epsilon''|}{\epsilon_{r10}} \ll 1 \right\} \approx \frac{\beta_2/k_0 - n_{10}}{\Delta \epsilon_{r10}} 2n_{10} \quad (3-129)$$

mit der normierten Fortpflanzungskonstanten β_2 und der normierten Verstärkung G_2 . Werden die Gl. (3-128, 129) in Gl. (3-127) eingesetzt, so ergibt sich

$$\left(\frac{\beta}{z}\right)^2 \frac{d^2 \Psi(y)}{dy^2} + \left[V_B - V_B \frac{\beta_2 + jG_2}{Q + j} - V_B \left(\frac{y}{B/2}\right)^2 \right] V_B \Psi(y) = 0. \quad (3-130)$$

Die ähnlich strukturierte Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \Phi_m(\eta)}{d\eta^2} + [2m + 1 - \eta^2] \Phi_m(\eta) = 0 \quad (3-131)$$

hat die Gauß-Hermite-Funktionen

$$\Phi_m(\eta) = H_m(\eta) e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \quad (3-132)$$

zur Lösung. $H_m(\eta)$ sind die Hermite'schen Polynome m -ter Ordnung, definiert durch

$$\frac{d^2 H_m(\eta)}{d\eta^2} - 2\eta \frac{dH_m(\eta)}{d\eta} + 2m H_m(\eta) = 0. \quad (3-133)$$

Es gilt die Rekursionsformel

$$\frac{dH_m(\eta)}{d\eta} = 2\eta H_{m-1}(\eta) \quad (3-134)$$

und die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(\eta) H_n(\eta) e^{-\eta^2} d\eta = 2^m m! \sqrt{\pi} \delta_{mn}. \quad (3-135)$$

Die Polynome sind symmetrisch ($m=0, 2, 4, \dots$) oder antisymmetrisch ($m=1, 3, 5, \dots$) zu $\eta=0$ und lauten bis zur dritten Ordnung

$$\begin{aligned} H_0(\eta) &= 1 & H_1(\eta) &= 2\eta \\ H_2(\eta) &= 4\eta^2 - 2 & H_3(\eta) &= 8\eta^3 - 12\eta. \end{aligned} \quad (3-136)$$

Die Funktionen $\Phi_m(\eta)$ hängen mit η^2 exponentiell ab, können also sehr wohl ein transversal beschränktes Feld beschreiben. Daher wird Gl. (3-130) mit den Transformationen

$$\begin{aligned} \Psi_{m_B}(y) &= \frac{1}{V_B} \Phi_m(\eta) \\ \eta &= \sqrt{V_B} \cdot \frac{y}{B/2} \end{aligned} \quad (3-137)$$

auf die Form

$$\frac{d^2 \Phi_m(\eta)}{d\eta^2} + \left[V_B \left(1 - \frac{B_z + jG_z}{Q + j} \right) - \eta^2 \right] \Phi_m(\eta) = 0 \quad (3-138)$$

gebracht. Gauß-Hermite-Funktionen lösen diese Differentialgleichung für die Eigenwerte

$$V_B \left(1 - \frac{B_z + jG_z}{Q + j} \right) = 2m_B + 1 \quad m_B = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3-139)$$

in der Gestalt

$$\Psi_{m_B}(y) = \frac{H_{m_B} \left(\sqrt{V_B} \frac{y}{B/2} \right)}{V_B} \cdot e^{-\frac{1}{2} V_B \left(\frac{y}{B/2} \right)^2} \quad (3-140)$$

Nur diskrete Moden B_{zm_B} liefern also für $|y| \rightarrow \infty$ verschwindende Felder. Die laterale Feldführung kann entweder nur durch den Realteil des Brechungsindex erfolgen, $|Q| \gg 1$ (index guiding), oder nur durch das Verstärkungsprofil, $|Q| \ll 1$ (gain guiding), oder in gemischter Form. Ist $Q < 0$, so wird der Strahl nicht im linearaktiven Medium des Bildes 3-17 geführt und fokussiert, sondern defokussiert, weil der Brechungsindex dann nur Rande hin nimmt (index anti-guiding). Solange jedoch $|Q|$ nicht zu groß wird, kann die Führung durch das Verstärkungsprofil überwiegen.

Im Falle überwiegender index Führung ($|Q| \gg 1$) wird aus der Eigenwertgleichung Gl. (3-139)

$$\begin{aligned} V_B &\approx k_0 \frac{B}{2} \sqrt{\Delta \epsilon_{r10}} \sqrt{Q} \\ B_{zm_B} &\approx \left(1 - \frac{2m_B + 1}{k_0 \frac{B}{2} \sqrt{\Delta \epsilon_{r10}} \sqrt{Q}} \right) \cdot Q \\ G_{zm_B} &\approx 0. \end{aligned} \quad (3-141)$$

Die Fortpflanzungskonstante in z -Richtung ist für $\Delta \epsilon''_{r10} Q > 0$ reell und größer als k_{0n10} .

Im Falle überwiegender Verstärkungsführung, $|Q| \ll 1$ erhält man

$$V_0 \approx k_0 \frac{B}{2} \sqrt{\Delta \epsilon''_{r10}} \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

$$B_{zm_B} \approx - \frac{2m_B + 1}{k_0 \frac{B}{2} \sqrt{\Delta \epsilon''_{r10}} \sqrt{2}} \quad (3-142)$$

$$G_{zm_B} \approx 1 - \frac{2m_B + 1}{k_0 \frac{B}{2} \sqrt{\Delta \epsilon''_{r10}} \sqrt{2}}$$

Die Fortpflanzungskonstante wird komplex. Das Vorkommen von V_0 ist so zu wählen, daß die lateralen Felder nicht divergieren.

Berücksichtigt man den Ansatz gl. (3-122), so kann man sehen, daß bei Verstärkungsführung mit $\Delta \epsilon''_{r10} > 0$ die Phasenflächen

$$-j \left[\frac{1}{2} k_0 \frac{B}{2} \sqrt{\Delta \epsilon''_{r10}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{y}{B/2} \right)^2 + \beta_2 z \right] = \text{const} \quad (3-143)$$

keine Ebenen mehr sind wie bei Indexführung, sondern Parabelflächen, die in Strahlrichtung betrachtet konkav sind (Energie strömt aus dem Volumen). Absorption mit $\Delta \epsilon''_{r10} < 0$ würde dagegen in Strahlrichtung konvexe Phasenflächen verursachen, $V_0 \approx \frac{[+]}{2} k_0 \frac{B}{2} \sqrt{-|\Delta \epsilon''_{r10}|} \frac{1+j}{\sqrt{2}}$,

$$-j \left[-\frac{1}{2} k_0 \frac{B}{2} \sqrt{|\Delta \epsilon''_{r10}|} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{y}{B/2} \right)^2 + \beta_2 z \right] = \text{const}, \quad (3-144)$$

da Energie in das Streifenleiter Volumen hineinströmt.

Die niedrigsten beiden lateral transversalen Moden $m_B = 0$, $m_B = 1$ haben Feldbilder ähnlich wie in Bild 3-10, wenn die x -Achse durch die y -Achse ersetzt wird. Die laterale Breite w_0 des Grundmodus $m_B = 0$ wird als Abstand der Punkte definiert, an denen die Feldstärke auf den e -ten Teil des Wertes bei $y = 0$ abgenommen ist,

$$w_0 = \frac{B/2}{\sqrt{\text{Re}\{V_0\}/2}} \quad (3-145)$$

Diese Strahlhalbwerte nimmt mit wachsender Schichthöhe der Parabeln $n(y)$ bzw. $g(y)$ ab. Für konstante Schichthöhen nimmt w_0 mit der äquivalenten Streifenbreite B zu.

Der laterale Konzentrationsfaktor des m_B -ten Modus wird analog zu Gl. (3-98) definiert als

$$\Gamma_{m_B} = \int_{-B/2}^{+B/2} \Psi_{m_B}^2(y) dy / \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{m_B}^2(y) dy \quad (3-146)$$

Der Wertebereich ist auch hier $0 \leq \Gamma_{m_B} \leq 1$. Wegen einer Normierung der Funktion $\Psi_{m_B}(y)$ entsprechend Gl. (3-135) ist der Nenner von Gl. (3-146) im Gegensatz zu Gl. (3-98) ungleich Eins.

3.3.5. Streifenwellenleiter - Resonator

Bild 3-18 zeigt das Resonatormodell, einen Vertikal und axial durch n_1 und n_2 beschränkte Wellenleiter auf n_0 (Vakuum) beschränkten Quader aus verlustfreiem Material. Der Bereich B be-

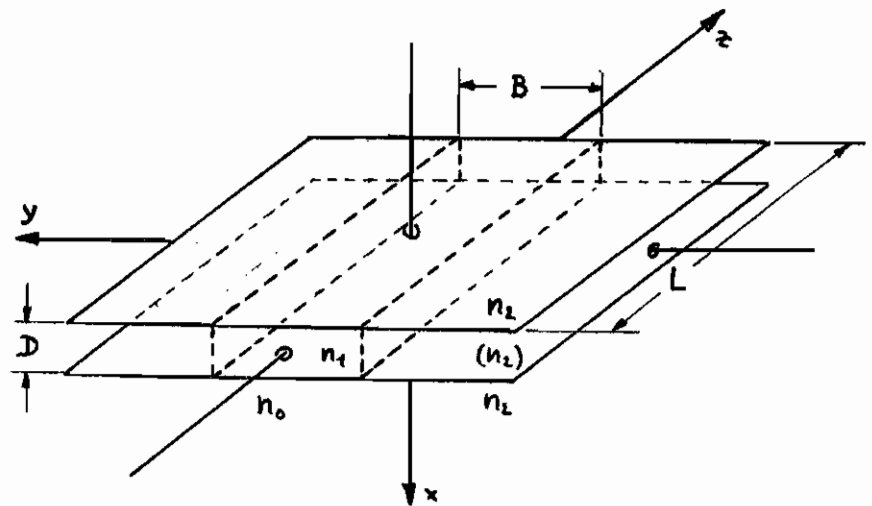


Bild 3-18

grenzt den Resonator mitbild, entweder durch ein Index/Verstärkungspol, das teilweise durch einen Indexsprung von n_1 auf n_2 beschrieben wird, oder durch einen physikalisch einsetzbaren Indexsprung wie in Abschnitt 3.3.3. In jedem Falle gilt $n_1 > n_2 > n_0$. Liest laterale Index/Verstärkungsführung von, so werden für die folgenden Betrachtungen die fünf-Hermiten-

durch trigonometrische Funktionen ersetzt. Die Konzentrationsfaktoren in axialer, vertikaler und lateraler Richtung sind so hoch, daß die Felder an den Begrenzungsflächen $|z| = L/2$, $|y| = B/2$, $|x| = D/2$ zu Null gesetzt werden können. Aus Gl. (3-125) und Gl. (3-140) in trigonometrischer Näherung folgt dann die Resonanzbedingung mit $b = m_0 + 1$

$$k_z^2 \approx \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{b\pi}{B}\right)^2 + \left(\frac{d\pi}{D}\right)^2. \quad (3-147)$$

Ähnlich den Gl. (3-108, 110) erhält man dann für den axialen Modenabstand

$$\Delta \lambda_l \approx - \frac{\lambda_{dbe}^2}{2L n_{1z}} \operatorname{sign} \Delta l \quad (3-148)$$

und für die transversalen Modenabstände

$$\Delta \lambda_b \approx - \frac{\lambda_{dbe}^2}{2L n_{1z}} \operatorname{sign} \Delta b \cdot \frac{b/B}{l/L} \quad (3-149)$$

sowie

$$\Delta \lambda_d \approx - \frac{\lambda_{dbe}^2}{2L n_{1z}} \operatorname{sign} \Delta d \cdot \frac{d/D}{l/L} \quad (3-150)$$

mit der Resonanzwellenlänge

$$\lambda_{dbe} = \frac{2 n_1(\lambda_{dbe})}{\frac{l}{L} \sqrt{1 + \left(\frac{b/B}{l/L}\right)^2 + \left(\frac{d/D}{l/L}\right)^2}} \quad (3-151)$$

und dem wellenlängen abhängigen Brechungsindex

$$n_{1z} \approx n_1(\lambda_{dbe}) \left[1 - \frac{\lambda_{dbe}}{n_1(\lambda_{dbe})} \cdot \frac{\partial n_1(\lambda_{dbe})}{\partial \lambda} \right]. \quad (3-152)$$

Für den lateralen Abstrahlwinkel gilt eine Beziehung ähnlich Gl. (3-106), wobei N' durch $N' = b/l$ zu ersetzen ist.

4. Wechselwirkung von Strahlung mit Materie

Als einfachstes und quantenmechanisch formuliertes Modell eines an ein Elektron gebundenen Atoms soll der unendlich hohe eindimensionale Potentialtopf des Abschnitts 2.1. Bild 2-2 dienen. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit und damit der Erwartungswert des Ortes des Elektrons bleibt zeitlich konstant, solange sich das Elektron in nur einem Zustand n befindet, beschrieben durch eine komplexe Wellenfunktionsamplitude $\Phi_n(x,t)$ als Lösung der Schrödinger-Gleichung Gl. (2-2) für das Potential $V(0 < x < L) = 0$. Eine Wechselwirkung mit einer elektromagnetischen Welle bewirkt aber definitionsgemäß Energieänderungen der wechselwirkenden Partner; folglich kann der Elektronen Zustand nicht rein sein, sondern muß sich aus der Überlagerung (dem Gemisch) mindestens zweier reiner Zustände zusammensetzen, die mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten vertreten sind, z. B. aus dem Grundzustand mit $n=1$ und dem ersten angeregten Zustand $n=2$.

Aus den Gl. (2-6, 7, 8) erhält man unter Beachtung der Randbedingungen $\psi(x=0) = \psi(x=L) = 0$ mit den Eigenwerten von Gl. (2-9, 10) die Beziehungen

$$\begin{aligned} \Phi_1(x,t) &= A_1 \sin k_1 x e^{-j \frac{E_1}{\hbar} t} \\ \Phi_2(x,t) &= A_2 \sin k_2 x e^{-j \frac{E_2}{\hbar} t} \end{aligned} \quad (4-1)$$

Das Gemisch aus Grundzustand und angeregtem Zustand ist dann zu schreiben als

$$\Phi_{12}(x,t) = \Phi_1(x,t) + \Phi_2(x,t). \quad (4-2)$$

Nach Gl. (2-1) gilt für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Intervall dx zur Zeit t

$$\begin{aligned} P(t,x) = |\Phi_{12}(x,t)|^2 dx &= A_1^2 \sin^2 k_1 x + A_2^2 \sin^2 k_2 x + \\ &+ 2A_1 A_2 \sin k_1 x \sin k_2 x \cos \frac{E_2 - E_1}{\hbar} t \end{aligned} \quad (4-3)$$

Man sieht, daß die zeitabhängigen Terme $|\Phi_1(x,t)|^2$ und $|\Phi_2(x,t)|^2$ der reinen Zustände neben einem zeitabhängigen Term auftritt, der mit der Differenzenergie der reinen Zustände oszilliert. Fragt man nach dem wahrscheinlichsten Aufenthaltsort, so ist das erste Moment $\bar{x}(t) = \int_0^L x |\Phi(x,t)|^2 dx / \int_0^L |\Phi(x,t)|^2 dx$ zu bilden, nämlich

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \frac{(A_1^2 + A_2^2) \left(\frac{L}{2}\right)^2 + 2A_1A_2 \frac{-8}{(3\pi/L)^2} \cos \frac{E_2 - E_1}{\hbar} t}{(A_1^2 + A_2^2) \frac{L}{2}} \\ &= \frac{L}{2} \left(1 - \frac{64}{9\pi^2} \cdot \frac{A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} \cos \frac{E_2 - E_1}{\hbar} t \right), \quad (4-4) \\ \bar{x}(t) &\approx \frac{L}{2} \left(1 - 0,72 \frac{A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} \cos \frac{E_2 - E_1}{\hbar} t \right). \end{aligned}$$

Der wahrscheinlichste Aufenthaltsort des Elektrons oszilliert also mit einer Frequenz $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$. Da es die Ladung $-e$ trägt, emittiert es als Dipol mit eben dieser Frequenz elektromagnetische Wellen. Diese Energieverluste werden von Gl. (4-4) allerdings nicht erfaßt, da die stationären Energieeigenwerte als konstante Größen E_1 und E_2 vorausgesetzt wurden. Umgekehrt kann ein Elektron durch diesen Mechanismus von einem elektromagnetischen Feld angeregt werden. Man spricht dann von Absorption.

Meissen Verluste berücksichtigt werden, so wird, klassisch betrachtet, der Faktor g in den Gl. (3-22, 23) eben dadurch bestimmt. Ein anregendes Dirac-Impuls des elektrischen Feldes in Gl. (3-22) läßt das Elektron mit einer abklingenden Sinusfunktion oszillieren. Rückwirkungen auf das Feld seien vernachlässigt. Für den Erwartungswert des Ortes $\vec{r} = (\bar{x}(t) - \frac{L}{2})\vec{e}_x$ gilt daher

$$\bar{x}(t) - \frac{L}{2} = - \frac{eE_0}{m} \cdot \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{\sqrt{\omega_{21}^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}} \sin \sqrt{\omega_{21}^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} t. \quad (4-5)$$

Die Strahlungsleistung ist proportional dem zeitlich gemittelten Stromquadrat $\langle I^2 \rangle$ des strahlenden Dipols, da E- und H-

Felder proportional sind. Folglich erhält man für die normierte Linienform $v(f)$ der Resonanzkurve des Elektrons mit Gl. (3-23), $\vec{r}_0 = r_0 \vec{e}_x$, und $v \sim \mathcal{F}\{I^2\} \sim \mathcal{F}\left\{\left(\frac{d\vec{r}_0}{dt}\right)^2\right\} \sim |\dot{\omega} \hat{x}_0|^2$ sowie der Näherung $\omega \approx \omega_{21}$, $g^2 \ll \omega_{21}^2$

$$v(f) \approx \frac{g}{\left(\frac{g}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_{21})^2}, \quad (4-6)$$

also eine sogenannte Lorentz-Linie, wobei der Zähler von Gl. (4-6) aus der Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g}{\left(\frac{g}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_{21})^2} \frac{d\omega}{2\pi} \approx \{\omega_{21} \gg 0\} \approx \int_0^{\infty} \frac{g}{\left(\frac{g}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_{21})^2} \frac{d\omega}{2\pi} = 1 \quad (4-7)$$

resultiert. Die Halbwertsbreite der normierten Linie ist gerade $\Delta\omega = g$. Sie ist mit einer Leistung-Abklingkonstanten $\tau_{sp} = 1/g$ verknüpft, Gl. (4-5). Nach dieser Zeit ist die Strahlungsleistung auf den e -ten Teil gesunken,

$$\tau_{sp} = \frac{1}{\Delta\omega} = \frac{1}{g}. \quad (4-8)$$

Wenn aber, quantenmechanisch betrachtet, das Spektrum der emittierten bzw. der absorbierten elektromagnetischen Welle eine endliche Breite hat, dann kann die Energie E_2 des angeregten Zustandes nicht beliebig "scharf", sondern nur mit einer Unschärfe ΔE_2 bekannt sein. Experimentell wurde festgestellt, daß der Grundzustand $n=1$ ohne äußere Einwirkung beliebig lange bestehen bleibt, seine Energie E_1 also "scharf" ist, daß jedoch angeregte Zustände $n > 1$ im Mittel über viele Atome nach einer charakteristischen Zeit spontan (ohne äußeren Anlaß) in den Grundzustand übergehen werden und die überschüssige Energie in Form elektromagnetischer Strahlung, also eines Photons der mittleren Energie $h\nu_{mn}$, abgeben können. Diese typische Zeit nennt man Lebensdauer eines Zustandes, bezüglich spontaner Emission und bezeichnet sie als τ_{sp} . Das Produkt von Lebensdauer τ_{sp} und Energieunschärfe ΔE_m des angeregten Zustandes erfüllt die Unschärferelation

$$\Delta E_m \cdot \tau_{sp} = \frac{h}{2}. \quad (4-9)$$

Wird die Linienbreite eines Ensembles gleichwertiger Atome, quantenmechanisch gesehen, von der Unsicherheitsrelation diktiert, spricht man von natürlicher Linienverbreiterung. Klassisch verstanden ist die Ursache hierfür Strahlungsdämpfung, das Resultat für Esp stimmt aber mit der quantenmechanischen Größe nicht überein. Typische Werte für Esp liegen bei 10 ns und entsprechen Linienbreiten von 10^{-4} Å. Sind weitere Prozesse beteiligt, welche die Lebensdauer eines angeregten Zustandes verkürzen, so wird die Linie breiter. Man spricht auch dann von einer homogenen Linie.

Inhomogene Linien entstehen dann, wenn ein Ensemble von angeregten Atomen in unabhängige Klassen unterteilt werden kann, deren jede durch unterschiedliche angelegte Abstände $E_2 - E_1$ gekennzeichnet sind. Jede Atomklasse trägt eine natürliche Linie bei, deren Mittenfrequenz verschieden von der anderer Atomklassen ist. Die Überlagerung dieser Vielzahl natürlicher Linien ergibt die homogene Linie. Bei ihr ist eine Sättigung einzelner Atomklassen möglich (Reduktion der Klein-Signalverstärkung bei direkter Frequenz, frequency hole burning).

4.1. Die Boltzmann-Verteilung

Nach der kinetischen Theorie des Gases gilt für den Druck P_r

$$P_r = \frac{2}{3} N \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \left\{ \begin{array}{l} \text{Mittelwert,} \\ \text{pro Freiheitsgrad} \\ E_{kin} = \frac{1}{2} kT \end{array} \right\} = NkT, \quad (4-10)$$

wobei N die Konzentration der Atome, p ihr Impuls, m ihre Masse, T ihre absolute Temperatur und k die Boltzmann-Konstante ist. Wird ein Gas isotherm komprimiert, indem eine Kraft F in x -Richtung die Arbeit $F dx$ an jedem Atom verrichtet, so balanciert das Gas durch Druckerhöhung um $dP_r = dNkT$ diese Kraft gerade aus, also gilt im Gleichgewicht für das Volumen V

$$F N dx = kT dN$$

oder

(4-11)

$$F = kT \frac{d}{dx} (\ln N).$$

Wenn die Kraft F durch ein Potential beschrieben werden kann, dann entspricht der Arbeit E_{pot} , die in dem komprimierten Gas gespeichert wurde, die Abnahme der potentiellen Energie $E_{pot} F$ (z.B. einer gespannten Feder), also $-dE_{pot} F = dE_{pot} = -NV F dx$, folglich

$$d(\ln N) = \frac{1}{kT} \cdot F dx = -\frac{1}{NV} \cdot \frac{dE_{pot}}{kT} \quad (4-12)$$

mit der allgemeinen Lösung $\ln N = -\frac{E_{pot}}{kT} \frac{1}{NV}$, was zur Boltzmann-Verteilung

$$N = N_0 e^{-\frac{E_{pot}}{kT}} \quad (4-13)$$

folgt. Sie formuliert, daß im thermischen Gleichgewicht die Wahrscheinlichkeit, Atome in einer bestimmten räumlichen Anordnung anzutreffen, exponentiell mit der potentiellen Energie dieser Anordnung abnimmt und mit der absoluten Temperatur wächst.

4.2. Emission

Planck beschrieb die spontane Strahlungsemission eines schwarzen Körpers durch ein (postuliertes, durch Messungen und spätere quantenmechanische Rechnungen bestätigtes) Ensemble von harmonischen Oszillatoren, von denen jedes die Energieeigenwerte $E_n = n h \nu$, $n = 0, 1, 2, \dots$ annehmen konnte (im Gegensatz zum Elektron im Potentialtopf ist $V(x) \sim (x - x_n)^2$!). Die Wahrscheinlichkeit der Besetzung eines solchen Zustandes sollte der Boltzmann-Verteilung

Gl. (4-13) verwendet, so daß Planck für die Anzahl der Oszillatoren mit der Energie E_n die Beziehung $N_n = N_0 e^{-\frac{n h \omega}{kT}}$, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ erhielt. Für die gesamte Energie ergibt sich also $E_{ges} = \sum_{n=1}^{\infty} n h \omega N_0 e^{-\frac{n h \omega}{kT}}$ und für die Gesamtzahl der Oszillatoren $N_{ges} = \sum_{n=0}^{\infty} N_0 e^{-\frac{n h \omega}{kT}}$. Als mittlere absolute Energie erhielt er also mit der Abkürzung $x = e^{-\frac{h \omega}{kT}}$

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{E_{ges}}{N_{ges}} = \frac{N_0 h \omega (0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)}{N_0 (1 + x + x^2 + \dots)} \\ &= h \omega \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = h \omega \frac{\frac{x}{(1-x)^2}}{\frac{1}{1-x}} = h \omega \frac{1}{x-1} \end{aligned} \quad (4-14)$$

Nach Einsetzen von x ergibt sich die thermische Raumleistung

$$P_R = \langle E \rangle \Delta f = \frac{h f}{e^{\frac{h f}{kT}} - 1} \Delta f \approx \{h f \ll kT\} \approx kT \Delta f, \quad (4-15)$$

die in einer Polarisationsrichtung und für einen festen Betrag des Fortpflanzungsvektors einer elektromagnetischen Welle im Frequenzbereich Δf emittiert wird.

In Gl. (2-28) wurde berechnet, wieviele Zustände der elektronischen Wellenfunktionen in einem Würfel der Kantenlänge L für das Intervall k des Betrag des Fortpflanzungsvektors Platz haben, nämlich bezogen auf das Volumen L^3 gerade

$$M = \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3} L^3 \quad (4-16)$$

Betrachtet man nun nicht elektronische Wellenfunktionen, sondern normale elektromagnetische Wellen und betrachtet ein stehendes partiales Feld in einem Laboratoriums- "Würfel" der Kantenlänge L durch eine räumliche Fourier-Entwicklung so, daß der Laboratoriums- "Würfel" samt elektromagnetischen Feld in allen Raumrichtungen periodisch wiederholt erscheint, so hat sich im interessierenden Raumgebiet nichts geändert, nur kann man im Laboratoriums- "Würfel" die existierenden Felder formal durch eine Überlagerung ebener Wellen ausdrücken, wie es auch für die elektronischen Wellenfunktionen möglich war. Dabei gibt Gl. (4-16) gerade die mögliche Anzahl Moden M pro Volumen L^3 an, die für einen Bereich dk auftreten können. Da für $\frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3}$ und $\frac{4\pi f^2 df}{v^3}$ beschrieben werden kann, erhält man unter Berücksichtigung

der zwei möglichen orthogonalen Polarisationsrichtungen pro k -Vektor für die spektrale Energiedichte $u(f)$ (Einheit $\frac{WS^2}{m^3}$) das Planck'sche Strahlungsgesetz

$$u(f) = 2 M \langle \epsilon \rangle = N_{MF} S_0' h f \quad (4-17)$$

$$N_{Mf} = \frac{8\pi f^3}{v_{ph}^3 v_{gr}} \quad , \quad N_{ME} = \frac{8\pi E^2}{v_{ph}^2 v_{gr} h^2} \quad , \quad S_0' = \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

N_{Mf} bzw. N_{ME} ist die Anzahl möglicher Moden pro Volumen und Frequenz bzw. Energie im Raumwinkel 4π . S_0' gibt die Photonanzahl im thermischen Gleichgewicht pro Modus des Feldes an.

4.3. Stimulierte Prozesse

Einsteins leitete aus der Planck'schen Formel einige neue Erkenntnisse ab. Betrachtet werden

zwei Energieniveaus eines Atoms, genau Grundzustand E_1 und angeregter Zustand E_2 , Bild 4-19.

Strahlt man Licht der Frequenz $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/h$ in das Atom ab, so kann ein Photon absorbiert werden und das Atom geht in den angeregten Zustand E_2 über. Die

Wahrscheinlichkeit des Übergangs hängt von den Besetzungszahlen N_1'

und N_2' ab, die z. B. entsprechend einer Boltzmann-Funktion verteilt sind, gestrichelte Kurve, aber wie wir auch, so Einstein, proportional der einstrahlenden spektralen Energiedichte $u(f) = u(f_{21})$, also der Leistung, die sich im Bereich der Linie (zunächst) nicht ändert. Für die Anzahl der pro Sekunde angeregten Atome erhält man also

$$N_{12}' = N_1' B_{12} u(f_{21}). \quad (4-18)$$

Die Anzahl der pro Sekunde von E_2 nach E_1 unter Emission eines

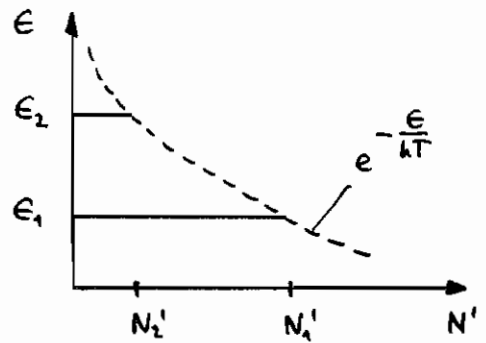


Bild 4-19

Photons $h\nu_{21}$ überträgt die Atome ist

$$N_{21}' = N_2' [A_{21} + B_{21} u(f_{21})] \quad (4-19)$$

Der Koeffizient A_{21} berücksichtigt dabei die spontane Emission. Die Koeffizienten A und B werden Einstein-Koeffizienten genannt. Im thermischen Gleichgewicht, gekennzeichnet durch eine Boltzmann-Verteilung der Besetzungszahlen N_1' und N_2' , muß die Anzahl der zurückföhrten Absorptionsprozesse gleich der Anzahl zurückföhrter Emissionsprozesse sein, also

$$N_{12}' = N_{21}' \quad (4-20)$$

Für das Verhältnis der Besetzungszahlen gilt nach Gl. (4-13)

$$\frac{N_2'}{N_1'} = e^{-\frac{h f_{21}}{kT}} \quad (4-21)$$

Durch Einsetzen von Gl. (4-20, 21) in die Gl. (4-18, 19) erhält man für die (noch unbekante) spektrale Leistungsdichte $u(f_{21})$

$$u(f_{21}) = \frac{A_{21}}{B_{12} e^{\frac{h f_{21}}{kT}} - B_{21}} \quad (4-22)$$

Da thermisches Gleichgewicht vorausgesetzt war, muß $u(f_{21})$ dem Planck'schen Strahlungsgesetz Gl. (4-17) entsprechen, so daß man für die Einstein-Koeffizienten ansetzen kann

$$B_{12} = B_{21} \quad (4-23)$$

$$\frac{B_{21}}{A_{21}} = \frac{v_{ph}^3}{8\pi h} \cdot \frac{1}{f_{21}^3} \quad , \quad A_{21} = N_{hf} h f_{21} B_{21}$$

Dies bedeutet:

1. Das von Einstein postulierte Phänomen der durch ein Photonenfeld $u(f)$ stimulierten (induzierten, erzwungenen) Absorption (B_{12}) bzw. Emission (B_{21}) läßt unter Berücksichtigung spontaner Emission (A_{21}) auf einen experimentell hervorragend bestätigten Zusammenhang für $u(f)$, Spontane Emissionen werden durch ein fiktives Feld (Nullpunktsfeld, Energie nicht entziehbar) der spektralen Leistungsdichte $N_{hf} h f_{21}$ hervorgerufen, bei dem jedes Modus die Energie $h f_{21}$ trägt.

2. Emissions- und Absorptionsraten sind im thermischen Gleichgewicht zueinander gleich.
3. Für das Verhältnis der stimulierten zur spontanen Emission gilt die Beziehung

$$\frac{P_{\text{stim}}}{P_{\text{sp}}} = \frac{B_{21} u(f_{21})}{A_{21} + B_{21} u(f_{21})} = e^{-\frac{h f_{21}}{k T}} \quad (4-24)$$

Im sichtbaren Spektralbereich ist für $T < 10000 \text{ K}$ $e^{-\frac{h f_{21}}{k T}} \ll 1$. Daher spielt im thermischen Gleichgewicht stimulierte Emission keine Rolle und Rauselprozesse überwiegen.

4. Gelingt es, die thermischen Besetzungszahlen durch einen Pumpvorgang auf irgendeine Weise zu invertieren, d.h. so $N_2' > N_1'$ wird, so ist auch $N_{21}' > N_{12}'$. Strahlt man ein Signal der Frequenz f_{21} ein, so wird dieses durch stimulierte Emission, welche spontane Emission bei properem $u(f)$ weit überwiegen kann, verstärkt.

Auch Signale mit Frequenzen, die von f_{21} abweichen, können wegen der endlichen Linienbreite des Übergangs gedämpft bzw. verstärkt werden. In den Gl. (4-18, 19) kann dies durch Multiplikation rechts und links des Gleichheitszeichens mit der normierten Linienform Gl. (4-6) berücksichtigt werden, da $v(f) df$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß der Übergang 1-2 mit einem Photon im Frequenzbereich $f \dots f+df$ in Wechselwirkung tritt. Wird nicht thermisches Rausen, sondern ^{eine} monochromatische ebene Welle eingestrahlt, so ist $u(f)$ aus Gl. (4-17) im Normierungsvolumen $V=L^3$ zu ersetzen durch $u(f) = \frac{P}{L^2 v_{ph}} \delta(f'-f)$ und anschließend über beide Seiten der Gleichung zu integrieren. Man erhält dann für die Übergangsraten in den angeregten Zustand

$$N_{12}(f) = N_1' B_{12} \frac{P}{L^2 v_{ph}} v(f)$$

und für den Übergang in den Grundzustand (4-25)

$$N_{21}(f) = N_2' [A_{21}(f) + B_{21} \frac{P}{L^2 v_{ph}} v(f)]$$

$\frac{P}{L^2 v_{ph}} = S \cdot hf$ ist die Energiedichte der ebenen Welle, S deren Photonen-dichte.

Aus der Bedingung Hermiteschen Gleichgewichts, Gl. (4-20), erhält man für $A_{21}(f)$, abweichend von Gl. (4-23), mit $S = S_0' \cdot V$ nach Gl. (4-17)

$$B_{12} = B_{21}, \quad (4-26)$$

$$A_{21}(f) = \frac{\nu(f)}{V} \text{ hf } B_{21}.$$

Für spontane Emission ist jedoch das gesamte Nullpunktfeld mit allen reinen Moden verantwortlich, Gl. (4-23). Im Hermiteschen Gleichgewicht darf daher nur die Nettoanzahl stimulierter Übergänge für den betrachteten Modus gleichgesetzt werden der Anzahl spontaner Übergänge, die durch denselben Modus des Nullpunktfeldes "stimuliert" werden. Diese spontane Übergangsrate soll unter dem Ausdruck $N_2' A_{21}(f)$ verstanden werden ($A_{21}(f) \neq A_{21}!$). Die gesamte spontane differentielle Übergangswahrscheinlichkeit dA_{21} ergibt sich durch Multiplikation von $A_{21}(f)$ mit der Modenanzahl $N_M f V df$, Gl. (4-17). Nach Integration über die Linie erhält man

$$A_{21} = N_M f \text{ hf } B_{21},$$

$$A_{21}(f) = \frac{A_{21} V(f)}{V N_M f} \quad (4-26*)$$

Dabei wurde vorausgesetzt, daß sich $N_M f \text{ hf}$ im Bereich der Linie nur wenig ändert und also vor das Integral gezogen werden kann. Gl. (4-26*) und Gl. (4-23) entsprechen sich.

5. Der Koeffizient A_{21} gibt an, wieviele spontane Übergänge pro Sekunde im Mittel ein Atom vom angeregten in den Grundzustand machen wird. Folglich ist der Reziprokwert von A_{21} die mittlere Lebensdauer dieses angeregten Zustandes bezüglich spontaner Emission,

$$\tau_{sp} = \frac{1}{A_{21}} = \frac{v_{ph}^3}{8\pi h} \cdot \frac{1}{f^3} \cdot \frac{1}{B_{21}} \quad (4-27)$$

Die Lebensdauer eines angeregten Zustandes kann durch stimulierte Emission offensichtlich stark verkürzt werden, (gl. (4-19)).

6. Aus der Überlegung von Einstein resultiert zwar die Existenz stimulierter Emission, nicht dagegen notwendigerweise folgende Tatsachen:

- * Die stimulierte Emission erfolgt phasenkohärent (zeitlich und örtlich) zur stimulierenden Schwingung, d.h. in derselben Phaselage und in derselben Richtung der einfallenden Welle.
- * Spontane Emission erfolgt dagegen ungerichtet in den gesamten Raumwinkel.

4.3.1. Stimulierte Verstärkung

Anordnungen, welche durch stimulierte Emission Licht verstärken bzw. mit Rückkopplungsstrukturen Licht erzeugen, werden Laser genannt, eine Abkürzung für Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation. Durch einen stimulierten Übergang vom angeregten in den Grundzustand wird die Leistung

$$\Delta P = hf B_{21} \frac{P}{L^2 v_{ph}} (N_2' - N_1') V(f) \quad (4-28)$$

im Volumen $V=L^3$ erzeugt. Wie in Folgerung 4 des Abschnitts 4.3. angegeben, muß für $\Delta P > 0$ eine Inversion des Mediums vorliegen so, daß mit gl. (4-21)

$$\frac{N_2'}{N_1'} = e^{-\frac{hf}{kT_i}} > 1 \quad (4-29)$$

bei der fiktiven Inversionstemperatur $T_i < 0$ der angeregte Zustand stärker besetzt ist als der Grundzustand.

Die differentielle Leistung, die im Normierungsvolumen in einem bestimmten Radius (eine ebene Welle) in z -Richtung fließt, ist das Produkt von differentieller Leistungsdichte $\Delta P/V$ und differentiellen Volumen,

$$dP = \frac{hf B_{21} \frac{P}{L^2 v_{ph}} (N_2' - N_1') v(f)}{L^3} \cdot L^2 dz \quad (4-30)$$

oder

$$\frac{dP}{P} = v(f) dz$$

mit der Verstärkungskonstanten

$$v(f) = hf B_{21} (N_2 - N_1) v(f) / v_{ph}, \quad (4-31)$$

wobei durch

$$N_1 = N_1' / V, \quad N_2 = N_2' / V \quad (4-32)$$

die Konzentration der Besetzungszahlen eingepreist wurde. Setzt man in Gl. (4-31) die Gl. (4-27) ein, so erhält man für die Verstärkungskonstante (für $N_2 - N_1 > 0$, sonst Absorption $\kappa(f) = -v(f)$!)

$$v(f) = \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \left(\frac{v_{ph}}{f} \right)^2 (N_2 - N_1) v(f) \quad (4-33)$$

und für die Lösung der Differentialgleichung Gl. (4-30)

$$P(z, f) = P(z=0) e^{v(f)z}, \quad (4-34)$$

nämlich eine in z -Richtung exponentiell wachsende Leistung. Liegt f genau auf der Linienmitte f_{21} , so ist die Verstärkungskonstante mit Gl. (4-6) proportional $4/g$ und somit umgekehrt proportional der Linienbreite $\Delta\omega = g$. Wenn die Lebensdauer τ_{sp} nach Gl. (4-8) gleich der reziproken Linienbreite $\Delta\omega$ ist, andere Effekte als homogene Verbreiterung aber keine Rolle spielen, wird in Linienmitte der Verstärkungskoeffizient unabhängig von der Linienform.

Da der Leistungsverstärkungsfaktor $P(z, f) / P(z=0) = e^{v(f)z}$ exponentiell mit der Frequenz zusammenhängt, ist die Leistungsverstärkungsbandbreite von der Verstärkung, also von z , abhängig und nimmt mit der Verstärkung ab (für 20 dB Verstärkung auf weniger als

$\Delta\omega/2,4$), da die Signalamplituden in Bandbreite schnell exponentiell wachsen ab an den Bandgrenzen. Für ausreichend große Verstärkungen kann die Inversionsdichte $N_2 - N_1$ nicht mehr konstant gehalten werden und sie nimmt ab. Die Verstärkung Bandbreite nimmt dann zu, da die Gesamtlebensdauer des Niveaus 2 wegen diminished Emission reduziert wird. Ist die Inversionsdichte $N_2 - N_1$ gerade auf die Hälfte des Wertes ohne diminished Emission abgesunken, spricht man von Sättigung.

4.3.2. Laser-Oszillator

Wird ein laseraktives Volumen durch eine resonante Struktur wie z.B. in Bild 3-11 oder 3-18 eingegrenzt, so kann sich eine selbstregulierende Schwingung aufbauen. Nach Gl. (4-34) ist die Verstärkung exponentiell längenabhängig; daher wird eine Welle, die sich in Richtung der größten Linearabmessung (z-Richtung) ausbreitet, am meisten verstärkt. Die Verstärkungen in Querrichtung fallen dämpferweise nicht ins Gewicht.

Selbsterregung setzt dann ein, wenn ein Resonatormodus nach einem Durchlauf der Länge L um so viel verstärkt wird, daß die erlittenen Verluste gerade ausgeglichen werden. Die Gesamtverstärkung ist dann Eins und es gilt die Schwellbedingung

$$v(\alpha + \alpha')^{-1} = 1, \quad (4-35)$$

wenn v das Verstärkungsmaß nach Gl. (4-33), α die Volumenverluste (Absorption, Streuung, Beugung) und α' die Verluste durch Nutzstrahlung (Transmission an den Begrenzungsflächen) für einen Modus bezeichnet. Es gelten die Definitionsgleichungen

$$\frac{dP}{P} = -\alpha dz, \quad \frac{dP'}{P'} = -\alpha' dz. \quad (4-36)$$

Diese Verluste des passiven Resonators können äquivalent durch eine charakteristische Photonenlebensdauer τ_p gemäß

der Beziehung (vgl. Gl. (4-5))

$$P_{int} = P_{int0} e^{-\frac{t}{\tau_p}} \quad (4-37)$$

beschrieben werden, wobei P_{int0} die zum Zeitpunkt $t=0$ und N_{int} die momentan vorhandene Lichtleistung in einem Resonatormodus ist. Hat der Resonator die Länge L und beträgt der Leitungsreflexionskoeffizient für (nahezu) senkrechte Einstrahlung an beiden Stirnflächen $|R| = L/2$ nach Gl. (3-67, 68) $R_{es} = R_{rs} = R$, so nimmt die Leistung der umlaufenden Welle nach zwei Reflexionen bei $z = L/2$ und $z = -L/2$, also nach der Zeit $\Delta t = 2 \frac{L}{v_{ph}}$, gerade auf $P_{int}(\Delta t) = P_{int0} \cdot R^2 e^{-2\alpha L}$ ab, d.h. es gilt mit Gl. (4-36, 37)

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{v_{ph}}{2L} \ln \frac{1}{e^{-2\alpha L} \cdot R^2} = \frac{v_{ph}}{L} \ln \frac{1}{R} + v_{ph} \alpha \quad (4-38)$$

Für die Photonenlebensdauern sind also zwei Parameter maßgeblich, welche die Bandbreite $\Delta \omega_R$ eines Resonatormodus bestimmen,

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{1}{\tau_{ps}} + \frac{1}{\tau_{pA}}, \quad \Delta \omega_R = \frac{1}{\tau_p},$$

$$\frac{1}{\tau_{ps}} = \frac{v_{ph}}{L} \ln \frac{1}{R}, \quad (4-39)$$

$$\frac{1}{\tau_{pA}} = v_{ph} \cdot \alpha,$$

nämlich die Photonenlebensdauer τ_{ps} bezüglich der an den Endflächen ausgekoppelten Nutzstrahlung und die Photonenlebensdauer τ_{pA} bezüglich aller anderen, global mit α erfolgten Absorptionsmechanismen.

Mit der Photonenlebensdauer τ_p läßt sich die Ausdrucksbedingung Gl. (4-35) auch anders formulieren. Die während τ_p "verlorengegangenen" Photonen müssen gerade durch stichweilige Prozesse nachgeliefert werden, also gilt an der Schwelle mit der Photonenlichte $S = \frac{P}{h\nu \cdot BD v_{ph}}$ im Resonatorvolumen $V = LBD$ (P ist wiederum die gesamte Leistung im betrachteten Resonatormodus, $P = 2P_{int}$) und den Gl. (4-25, 27)

$$\frac{S}{\tau_p} = \frac{N_{iH}' \beta_{21} \frac{P}{BD v_{ph}} v(f)}{V} = \frac{N_{iH}' \frac{v_{ph}^2}{8\pi h f^3} S h f v(f)}{\tau_{sp}}$$

$$\frac{\tau_{sp}}{\tau_p} = \frac{N_{iH}'}{V} \cdot \left(\frac{v_{ph}}{f}\right)^2 \cdot \frac{v_{gr} v(f)}{8\pi} \quad (4-40)$$

$$N_{iH}' = \frac{V}{h f \beta_{21} v(f) \tau_p} = V \cdot \left(\frac{f}{v_{ph}}\right)^2 \cdot \frac{8\pi}{v_{gr} v(f)} \cdot \frac{\tau_{sp}}{\tau_p} = V N_{MF} \cdot \frac{\tau_{sp}}{\tau_p}$$

für das Verhältnis von spontaner Lebensdauer des angeregten Zustands zur Protonenlebensdauer bzw. für die Schwellinversionsdichte (Schawlow-Townes-Beziehung). Dabei ist

$$N_i = N_i' / V = N_2 - N_1 \quad (4-41)$$

die Inversionsdichte und N_{iH} entsprechend die Schwelldichte.

Derjenige Resonanzmodus, welcher dem Maximum der normierten Linienform Gl. (4-6) am nächsten liegt, erfährt die höchste Verstärkung und gewinnt folglich als erster an. Hier eine homogene Linie vor und ist das Medium auch örtlich homogen invertiert, so wird nur ein einziger Resonanzmodus auszuwachsen, da auf Grund der stimulierten Emission die Verstärkung abnimmt, und zwar wegen der homogenen Liniencharakter über die ganze Linie hinweg, daß bei der Schwingfrequenz

f_R die Bedingung der Gl. (4-35) erfüllt ist, Bild 4-20a. Die Schwingfrequenz des Lasers, f_L , ("heiße Resonator") unterscheidet sich von der zugehörigen Resonanzfrequenz f_R des "kalten" Resonators. Dies ist leicht verständlich, wenn man die normale Dispersion des

Brechungsindex im Bereich der Verstärkerlinie berücksichtigt, Bild 3-2, da n unterhalb der Linienmitte f_{21} mit der Inversionsdichte N_i abnimmt, oberhalb f_{21} jedoch wächst. Das heißt aber mit Gl. (3-151), daß die Resonanzwellenlänge für $\lambda_{02} < \lambda_{21}$, d.h. für $f_R = f_{02} > f_{21}$ mit wachsender Inversion

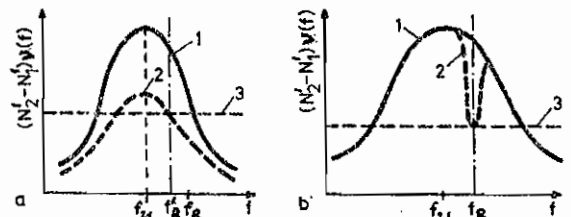


Bild 4-20. Sättigung von Emissionslinien durch eine Eigenschwingung mit f_R

1. Inversionslinie ohne Schwingung
2. gesättigte Linie
3. Schwellwert

- a) gleichmäßige Sättigung einer homogen verbreiterten Linie
- b) selektive Sättigung einer inhomogen verbreiterten Linie

zur Linienmitte hin wachsen wird auf $\lambda_{00} \approx \frac{1}{f_0}$, und daß für $\lambda_{00} > \lambda_{01}$ die Wellenlänge zur Linienmitte hin abnehmen wird: Die Schwingfrequenz des "heißen" Resonators liegt immer näher bei f_0 als die des "kalten" Resonators. Dieser Zieheffekt (frequency pulling) ist um so größer, je größer die Resonatorbandbreite und je kleiner die Linienbreite ist.

Bei räumlich inhomogen invertebtem Medium (wie im axiales Modus die Inversion hauptsächlich an Bündeln der elektrischen Feldstärke abtastet) können auch andere axiale Moden trotz homogener Linie anselungen (spatial hole burning).

Liegt eine inhomogene Linie vor, so benutz jeder Resonatormodus ein Loch in die Verstärkungslinse, so daß die Linie relativ, also inhomogen, gesättigt wird, Bild 4-21 b.

Während die Bandbreite eines Laserverstärkers relativ schnell mit der Verstärkung abnimmt, Abschnitt 4.3.1., verringert sich die spektrale Breite der Emission bei Selbstresonanz dramatisch, da die (bandbreitebestimmenden) Resonatorverluste durch das verstärkende Medium kompensiert werden. Die endliche Rauschleistung durch wärzliche spontan emittierte Strahlung bewirkt jedoch, daß in Gl. (4-35) v immer ein wenig kleiner ist als $\frac{1}{\alpha + \alpha'}$. v wird allein von stimulierter Emission verursacht. Die Summe von spontaner und stimulierter Lichtleistung ist gleich der durch $\alpha + \alpha'$ dem Resonatorvolumen entzogenen Leistung. Folglich tritt keine vollständige Entdämpfung des Resonators auf und die Emissionsbandbreite bleibt endlich ($\neq 0$), vgl. Gl. (4-57, 59). Offenrichtlich hängt also die Emissionsbandbreite von prozentualen Anteil spontaner Strahlung an der Gesamtintensität ab. Mit zunehmender Inversion des Mediums wird also in der Umgebung der Schwelle die Linie rasch schmaler.

4.3.3. Bilanzgleichungen des Lasers - Oszillators

Beim Laser ist vornehmlich der Energieaustausch zwischen zwei Systemen von Bedeutung, dem System der angeregten Zustände, und dem System der Photonen im Resonator, was Energiespeicher sind, die wie Induktivität und Kapazität miteinander wechselwirken können.

Interessieren Kohärenzeffekte nicht, bzw. danach die Wechselwirkung des Lasermediums mit dem Strahlungsfeld (die Änderung der Inversion und der Photonen dichte) lange im Vergleich zu allen Relaxationszeiten, dann genügt zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines Lasers die Aufstellung einer Bilanz der Besetzungs- und Photonzahlen. Mit dem Gl. (4-25, 26) ändert sich die Konzentration des angeregten Niveaus bzw. des Grundzustands wie

$$\frac{dN_2}{dt} = -N_2 [A_{21}(f) + B_{21} S h f v(f)] + N_1 B_{12} S h f v(f) = -\frac{dN_1}{dt} \quad (4-42)$$

Im stationären Zustand resultiert daraus das Planck'sche Strahlungsgesetz für die Photondichte S in einem Modus, Gl. (4-17).

Damit eine Besetzungsinversion überhaupt aufrecht erhalten werden kann, muß eine "Pumpe" mit einer Rate p pro Volumen V die angeregten Zustände auffüllen, indem beispielsweise Atome des Grundzustandes angeregt werden.

Maßgeblich für die Verstärkung ist allein die Inversionsdichte $N_i = N_2 - N_1$, Gl. (4-28, 40, 41). Folglich stellt man für die Bilanzgleichungen unter der Voraussetzung, daß nur ein Modus des Feldes ausreicht,

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= p - N_2 A_{21} - N_i B_{21} S h f v(f) = -\frac{dN_1}{dt}, \\ \frac{dS}{dt} &= N_i B_{21} S h f v(f) + \frac{N_2 A_{21}}{V N_{Mf}} - \frac{S}{\tau_p}. \end{aligned} \quad (4-43)$$

Die Besetzungsdichte des angeregten Zustandes wächst mit der Pumptrate p , wie nimmt ab mit spontaner und stimulierter Emission. Die Photondichte S wächst mit spontaner und

stimulierter Emission in einem Resonatormodus, wie nimmt ab mit den gesamten Resonatorverlusten.

Da die spontane Emission im Volumen V innerhalb der Breite Δf der (rechteckförmig angenommenen) normierten Linie (Maximalhöhe $\nu(f_{01})$) in alle möglichen Moden N_M' des Strahlungsfeldes geht,

$$N_{Mf}' = 2M = 2 \cdot 4\pi \cdot V \left(\frac{f}{\nu_{ph}}\right)^2 \frac{\Delta f}{\nu_{gr}} = \left\{ \begin{array}{l} \nu_{ph} \approx \nu_{gr} \\ \nu(f_{01}) \Delta f = 1 \end{array} \right\} = 8\pi V \frac{f^2}{\nu_{ph}} \cdot \frac{1}{\nu(f_{01})}, \quad (4-44)$$

$$N_{Mf} = N_{Mf}' / V,$$

gl. (4-6, 16, 17), ist für den betrachteten Modus des Photonenfeldes nur der Anteil $N_2 A_{21} / N_M'$ maßgeblich, gl. (4-26*).

Bisher war angenommen, daß die Übergänge ins Niveau 1 immer strahlend erfolgen. Ist das nicht der Fall, so ist die Definition des inneren Quantenwirkungsgrades η_i bezüglich strahlender Übergänge zweckmäßig, welches die Lebensdauer des Niveaus 2 bezüglich strahlender Übergänge, τ_{sp} , mit der gesamten Lebensdauer τ_2 verknüpft,

$$\tau_2 = \eta_i \tau_{sp}. \quad (4-45)$$

τ_{sp} in gl. (4-27) ist dann zu ersetzen durch τ_2 , wenn Änderungen der Dichtezahlen betrachtet werden. Für Änderungen der Photondichte bleibt τ_{sp} maßgeblich. Aus gl. (4-40) erhält man dann die Schwellendichten

$$N_{th} = N_{Mf} \frac{\tau_{sp}}{\tau_2} = \frac{1}{4f B_{21} V(f) \tau_2}. \quad (4-46)$$

An der Schwelle muß also die Anzahl der stimulierten Emissionsprozesse innerhalb der Photonenlebensdauer, $N_{th} 4f B_{21} V(f) \tau_2$, gerade Eins sein, d.h. jedes "verloren gegangene" Photon wird ersetzt. Für niedrige Schwelldichten N_{th} sollten also die Resonatorverluste klein, d.h. τ_2 groß sein, und die Lebensdauer bezüglich spontaner strahlender Emission sollte klein sein.

Unter Verwendung von gl. (4-45, 46) erhält man aus der

Beziehung Gl. (4-43)

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= p - \frac{N_2}{\tau_3} - \frac{N_i}{N_{ikH}} \cdot \frac{S}{\tau_p} = - \frac{dN_1}{dt} , \\ \frac{dS}{dt} &= \frac{N_i}{N_{ikH}} \cdot \frac{S}{\tau_p} + \frac{N_2}{N_{Mf} V \tau_{sp}} - \frac{S}{\tau_p} . \end{aligned} \quad (4-47)$$

N_2, N_1, N_i, S und p sind im allgemeinen zeitabhängige Größen. Wird ferner berücksichtigt, daß innerhalb des Verstärkerbandbreite gerade K elektromagnetische Strahlungsmoden angeregt werden können, so ist Gl. (4-47) folgendermaßen zu erweitern:

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= p - \frac{N_2}{\tau_3} - \sum_{k=1}^K \frac{N_i}{N_{ikH}} \cdot \frac{S_k}{\tau_{pk}} = - \frac{dN_1}{dt} \\ \frac{dS_k}{dt} &= \frac{N_i}{N_{ikH}} \cdot \frac{S_k}{\tau_{pk}} + \frac{N_2}{N_{Mf} V \tau_{sp}} - \frac{S_k}{\tau_{pk}} \end{aligned} \quad (4-48)$$

In den weiteren Ausführungen soll angenommen werden, daß während des Betriebs des Lasers $N_1 \ll N_2$ ist, daß also der untere Zustand nahezu unbesetzt ist. Kann in Gl. (4-48) für K Moden gesetzt werden $S = \sum S_k, N_{ikH} = N_{ikH}, \tau_p = \tau_{pk}$ mit $k = 1, 2, 3, \dots, K$, so erhält man ein System aus nur zwei gekoppelten Differentialgleichungen, nämlich

$$\begin{aligned} \frac{dN_i}{dt} &= p - \frac{N_i}{\tau_3} - \frac{N_i}{N_{ikH}} \cdot \frac{S}{\tau_p} , \\ \frac{dS}{dt} &= \frac{N_i}{N_{ikH}} \cdot \frac{S}{\tau_p} + Q \frac{N_i}{\tau_3} - \frac{S}{\tau_p} , \end{aligned} \quad (4-49)$$

wobei

$$Q = \frac{M_i \cdot K}{N_{Mf} V} = \frac{K}{N_{ikH} V} \cdot \frac{\tau_3}{\tau_p} \quad (4-50)$$

den Anteil der spontanen Emission an der Gesamtstrahlung beschreibt. Bei Halbleiterlasern nimmt Q typische Werte von 10^{-3} bis 10^{-6} an.

Nach Einführung normierter Größen X, I, Y für die Inversionsdichte N_i , die Pumprate p und die Photonen-dichte S ,

$$I = \frac{p}{p_{th}} \quad , \quad X = \frac{N_i}{p_{th} \gamma_i \tau_{sp}} \quad , \quad Y = \frac{S}{p_{th} \epsilon_p} \quad , \quad (4-51)$$

wobei

$$p_{th} = \frac{N_{th}}{\gamma_i \tau_{sp}} = \left\{ p_{th} (4-46,50) \right\} = \frac{N_{th} \epsilon_p}{\gamma_i \tau_{sp}} = \frac{K}{V Q \cdot \epsilon_p} \quad (4-52)$$

die Schwellpumprate p_{th} , bei der gerade die gesamten Resonatorverluste kompensiert werden, erhält man die normierten Bilanzgleichungen

$$\begin{aligned} \epsilon_p \dot{X} &= I - X - XY \quad , \\ \tau_{sp} \dot{Y} &= XY + QX - Y \quad . \end{aligned} \quad (4-53)$$

Im stationären Fall $\dot{X} = \dot{Y} = 0$ ergibt sich die Licht-Pump-
raten-Kennlinie unter Vernachlässigung des spontan emittierten
Lichtanteils ($Q=0$) zu

$$\begin{aligned} X = I \quad , \quad Y = 0 & \quad I \leq I_{th} = 1 \quad , \\ X = 1 \quad , \quad Y = I - 1 & \quad I \geq I_{th} = 1 \quad . \end{aligned} \quad (4-54)$$

Es liegt also eine Knickkennlinie vor, Bild 4-21 gestrichelte Geraden.

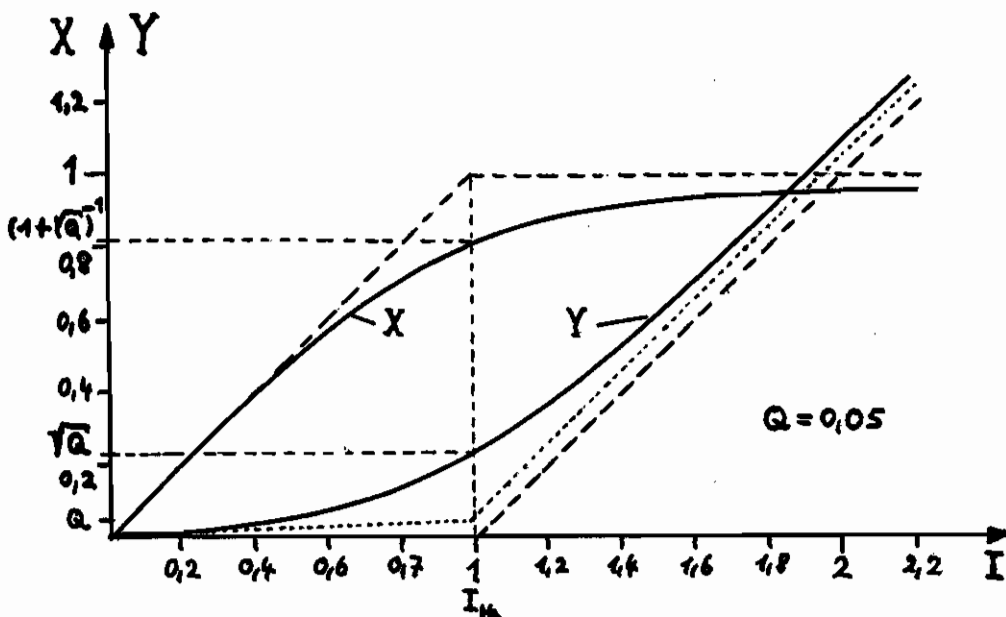


Bild 4-21

Berücksichtigt man spontane Emission, so erhält man

$$X = \frac{Y}{Y+Q} = \frac{I+1 - \sqrt{(I-1)^2 + 4QI}}{2(1-Q)} \quad (4-55)$$

$$Y = \frac{XQ}{1-X} = \frac{I-1 + \sqrt{(I-1)^2 + 4QI}}{2}$$

Der Grenzübergang $Q \rightarrow 0$ führt nach Wahl der richtigen Grenzwerte oberhalb und unterhalb der Schwelle zu Gl. (4-54). Es gelten die Grenzfunktionen

$$X \approx \frac{I}{1+I} \quad Y \approx QI \quad I \ll 1,$$

$$X = \frac{1}{1+\sqrt{Q}} \quad Y = \sqrt{Q} \quad I = I_H = 1, \quad (4-56)$$

$$X \approx 1 - \frac{Q}{I} \quad Y \approx I - 1 + Q \quad I \gg 1$$

für den Betrieb weit unterhalb, bei und weit oberhalb der Schwelle, bei der sich auch die Grenzgeraden der normierten Photondichte (Punktleistungsgeraden in Bild 4-21) schneiden. Wird spontane Emission nach Gl. (4-55) berücksichtigt, so bleibt immer $X < 1$ und $Y (I \neq 0) > 0$, Bild 4-21 durchgezogene Kurven. Aus Gl. (4-53) für $\dot{X} = \dot{Y} = 0$ kann die effektive Photonenlebensdauer (nur ein Resonanzmodus betrachtet)

$$\tau_{\text{eff}} = \frac{\tau_p}{1-X} = \tau_p \frac{Y+Q}{Q} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Gl. (4-50),} \\ \text{S1, S2} \end{array} \right\} = \tau_p (S \cdot V + 1) \quad (4-57)$$

definiert werden, da $\frac{Y+XY}{\tau_p} = Y \frac{1-X}{\tau_p} = \frac{Y}{\tau_{\text{eff}}}$ gilt. Die effektive Photonenlebensdauer ist also der Photonenanzahl im Resonator bzw. der normierten Pumprate proportional mit dem Grenzwert

$$\frac{\tau_{\text{eff}}}{\tau_p} \approx 1 + I \quad I \ll 1,$$

$$\frac{\tau_{\text{eff}}}{\tau_p} = \frac{1 + \sqrt{Q}}{\sqrt{Q}} \quad I = I_H = 1, \quad (4-58)$$

$$\frac{\tau_{\text{eff}}}{\tau_p} \approx \frac{I-1}{Q} \quad I \gg 1.$$

Bild 4-22 zeigt die starken Änderungen des auf τ_p normierten effektiven Photonenlebensdauer in Abhängigkeit von der

Pumprate. Die Halbwertsbreite $\Delta\omega_{rk}$ des passiven Resonators (nur ein Modus betrachtet!) ohne Entdämpfung durch stimulierte Emission ("kalter" Resonator) wird durch ϵ_p abg. (4-8), wobei die Resonanzkurve durch eine Lorentz-Linie getrübt wurde, $\Delta\omega_{rk} = \frac{1}{\epsilon_p}$. Zunehmende Entdämpfung durch stimulierte Emission vergrößert $\epsilon_{p,eff}$, und die Halbwertsbreite nicht auf

$$\Delta\omega_R = \Delta\omega_{rk} \frac{1}{S \cdot V + 1} \quad (4-59)$$

In diese reduzierte Linienbreite werden Photonen induziert emittiert, so daß ϵ_p (4-59) die Halbwertsbreite der Laseremission angibt, die, wie schon in Abschnitt 4.3.2. angedeutet, mit der Photonenzahl abnimmt. Messwerte für $\Delta\omega_R$ liegen wegen hier nicht erfaßter Einflüsse höher. Wegen der starken Änderung in der spektralen Lichtleistungsverteilung hängt auch die Größe K bzw. Q in ϵ_p (4-50) von I ab. Alle Beziehungen, in denen Q als konstanter Parameter impliziert wird, können daher in der Umgebung der

Schwelle nur als qualitative Aussage verstanden werden.



$Q = Q(I)!$

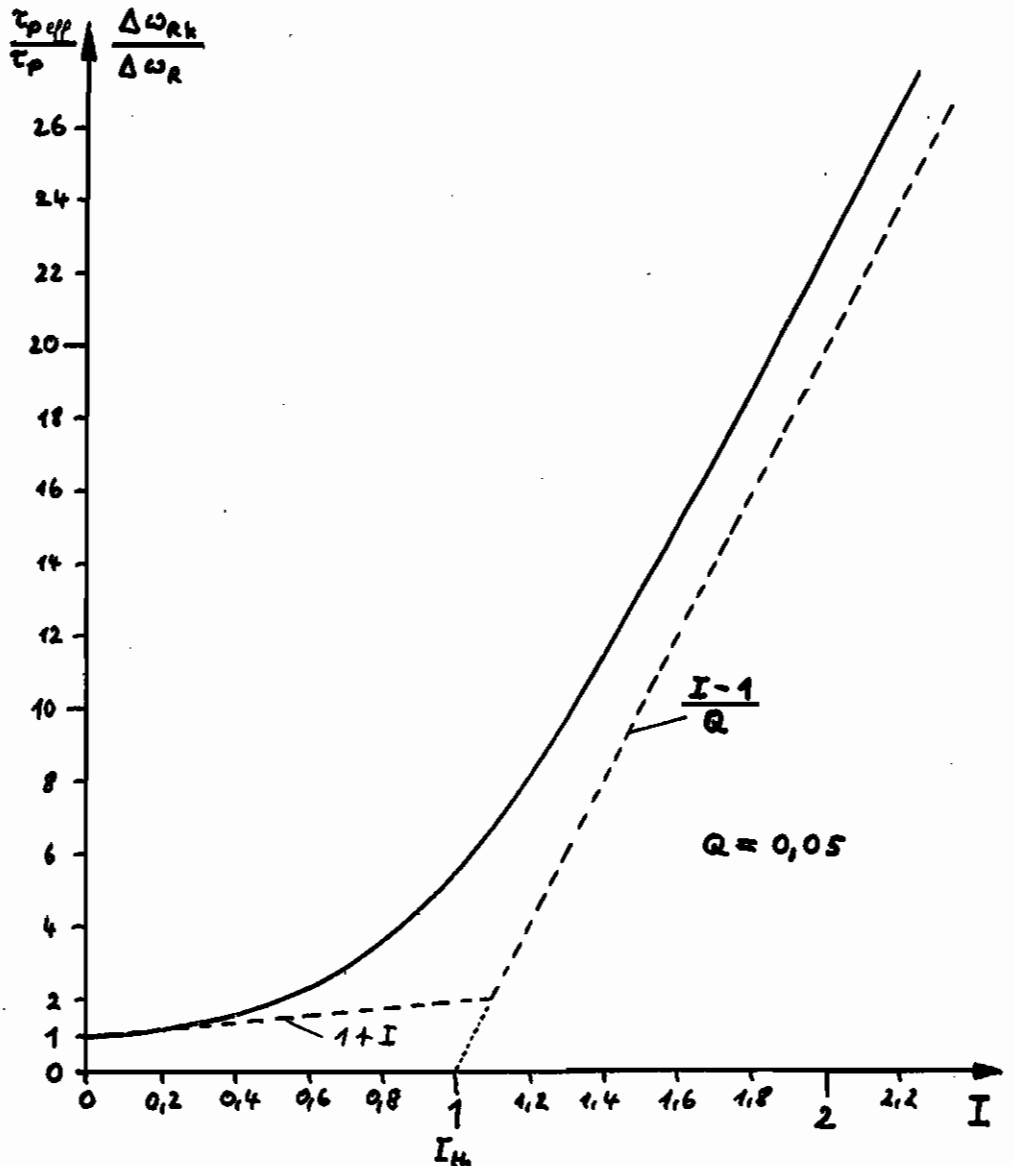


Bild 4-22

Folgende Quantenwirkungsgrade werden definiert:

$$\eta_{\text{int}} = \frac{1}{1 + \frac{\epsilon_{sp}}{\epsilon_{ns}}} = \frac{\text{Erzeugte Phot. pro V}}{\text{Inversionsdichte}} : \text{Inneser Quantenwirkungsgrad.}$$

ϵ_{sp} ist die Lebensdauer eines angeregten Zustandes für spontane Emission eines Photons, ϵ_{ns} ist die Lebensdauer für spontane nichtstrahlende Übergänge. Stimulierte Übergänge sind immer strahlend.

$$\eta_{\text{ext}} = \frac{\text{Der Laser verlassene Phot. pro V}}{\text{Inversionsdichte}} : \text{Erfolger Quantenwirkungsgrad be-}$$

z. B. für die Naturstrahlung

$$\eta_{\text{ext,d}} = \frac{d(\text{D. Laser verlassene Phot. pro V})}{dN_i} : \text{Differenzieller erfolger Quantenwirkungsgrad}$$

Inneser und erfolger Quantenwirkungsgrad hängen über

$$\eta_{\text{ext}} = \eta_{\text{int}} \cdot \frac{\text{Der Laser verlassene Photonen}}{\text{Der Laser erzeugte Photonen}} \quad (4-60)$$

Zusammen. Der Quotient in Gl. (4-60) kann für stimulierte Emission ($Q \rightarrow 0$) bei oder über der Schwelle mit Gl. (4-39) zu $\frac{1/\epsilon_{ps}}{1/\epsilon_{ps} + 1/\epsilon_{pa}}$ angepasst werden, so dass man

$$\eta_{\text{ext}} = \eta_{\text{int}} \cdot \frac{\epsilon_p}{\epsilon_{ps}} \quad (Q \rightarrow 0) \quad (4-61)$$

erhält.

Die an der Stelle $z = L/2$ gemessene optische Leistung außerhalb des Resonators hängt, wenn stimulierte Emission dominiert, mit der Leistung in der laufenden Welle im Resonator, $P_{\text{int}}/2$, mit Gl. (4-37, 39) über

$$P_L = \frac{P_{\text{int}}}{2} (1-R) = \frac{P_{\text{int}}}{2} \left(1 - e^{-\frac{L/v_{ph}}{\epsilon_{ps}}}\right) \quad (4-62)$$

Zusammen. Da die perfekte Leistung, örtlich homogen verteilt angenommen (für großes P_{int}), im Resonator $P_{\text{int}} = hf \cdot S \cdot \text{BDV}_{ph}$ für die doppelte Leistung der nach $z = L/2$ laufenden Welle ist, gilt unter der Voraussetzung $\frac{1}{2} \frac{L/v_{ph}}{\epsilon_{ps}} \ll 1$ ($R = 48\% \Rightarrow \frac{L/v_{ph}}{\epsilon_{ps}} = \ln \frac{1}{R} = 0,73$, also schlecht erfüllt für GaAs-Laser!) $\frac{L/v_{ph}}{\epsilon_{ps}} = \ln \frac{1}{R} = 0,73$, also schlecht erfüllt für GaAs-Laser!

$$P_L = \frac{1}{2} h f \cdot S \cdot B D V_{ph} (1 - e^{-\frac{L V_{ph}}{c p S}}) = \frac{1}{2} h f \cdot S \cdot V \frac{1}{c p S} (1 + \delta), \quad (4-63)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{L V_{ph}}{c p S}\right) = -\frac{1}{2} \frac{L V_{ph}}{c p S} + \frac{1}{3!} \left(\frac{L V_{ph}}{c p S}\right)^2 - \frac{1}{4!} \left(\frac{L V_{ph}}{c p S}\right)^3 + \dots$$

Die Entwicklung für die Exponentialfunktion konvergiert, so lange $\frac{L V_{ph}}{c p S} = \ln \frac{1}{R} < 1$, also $R > 0,37$ bleibt. Setzt man für $S = \gamma_{ph} \tau_p$ die asymptotische Näherung der Gl. (4-54) ein, so erhält man ($\delta \rightarrow 0$)

$$\frac{\tau_p}{c p S} = \frac{1}{h f} \cdot \frac{d(2 P_L)}{d(p V)} = \{ \text{Gl. (4-61)} \} = \frac{\gamma_{ext}}{\gamma_{int}}. \quad (4-64)$$

Da bei bekannten Materialdaten und gegebenem Geometrie des Lasers τ_{ps} berechnet werden kann, läßt sich nach Gl. (4-64) die Photonenlebensdauer τ_p aus der Steigung der Licht-Konversionskurve messen. Ferner läßt sich aus

$$\gamma_{ext} = \frac{2 P_L}{h f \cdot V \cdot N_i} \quad (\delta \rightarrow 0) \quad (4-65)$$

der externe Quantenwirkungsgrad messen und mit Gl. (4-64) der interne Quantenwirkungsgrad berechnen.

Im instationären Fall $\dot{x} \neq 0, \dot{y} \neq 0$ beschreiben die Differentialgleichungen Gl. (4-53) das dynamische Verhalten eines Laseroszillators. Ein prägnante zeitabhängige Größe ist, vor allem bei direkt (über den Pumpstrom) modulierten Halbleitern, die normierte Pumprate I , in anderen Fällen auch die Resonatorpunkte (also die Photonenlebensdauer) oder die Resonanzfrequenz (ausgedrückt über die Schwellinversionsdichte N_{th} jedes Resonatormodus, Gl. (4-48)). Gl. (4-53) ist ein gekoppeltes nichtlineares Differentialgleichungssystem, das im allgemeinen nur numerisch gelöst werden kann, jedoch ist die Linearisierung durch einen Kleinsignalansatz

$$I(t) = I_0 + I_1(t), \quad X(t) = X_0 + X_1(t), \quad Y(t) = Y_0 + Y_1(t) \quad (4-66)$$

unöf. Die Terme mit Index 1 stehen dabei für zeitabhängige Störgrößen, die so klein sein sollen, daß die Funktionen

$I(t)$, $X(t)$ und $Y(t)$ im zeitunabhängigen Arbeitspunkt I_0, X_0 und Y_0 durch ihre Tangenten gerichtet werden können. Setzt man Gl. (4-66) in Gl. (4-53) ein und vernachlässigt Produkte der Störgrößen, so erhält man

$$\tau_s \dot{X}_1 = I_1 - X_1 - X_0 X_1 - X_1 Y_0, \quad (4-67)$$

$$\tau_p \dot{Y}_1 = X_0 Y_1 + X_1 Y_0 + Q X_1 - Y_1. \quad (4-68)$$

Aus Gl. (4-68) ergibt sich

$$X_1 = \frac{\tau_p \dot{Y}_1 - (X_0 - 1) Y_1}{Y_0 + Q}, \quad \dot{X}_1 = \frac{\tau_p \ddot{Y}_1 - (X_0 - 1) \dot{Y}_1}{Y_0 + Q}, \quad (4-69)$$

was in Gl. (4-67) einzusetzen ist und zu einer Differentialgleichung für die Photonen dichte Y_1 führt,

$$\ddot{Y}_1 + \gamma \dot{Y}_1 + \omega_0^2 Y_1 = I_1 \frac{Y_0 + Q}{\tau_s \tau_p}, \quad (4-70)$$

mit den Abkürzungen

$$\gamma = \gamma_s + \gamma_p,$$

$$\gamma_s = \frac{Y_0 + 1}{\tau_s} = \frac{I_0 + 1 + \sqrt{(I_0 - 1)^2 + 4Q I_0}}{2\tau_s},$$

$$\gamma_p = \frac{1 - X_0}{\tau_p} = \frac{-I_0 + 1 + \sqrt{(I_0 - 1)^2 + 4Q I_0}}{2\tau_p (1 - Q)}, \quad (4-71)$$

$$\omega_0^2 = \frac{Y_0 + Q X_0 + 1 - X_0}{\tau_s \tau_p} = \frac{\sqrt{(I_0 - 1)^2 + 4Q I_0}}{\tau_s \tau_p}$$

für den Dämpfungskoeffizienten γ und die Kreisfrequenz ω_0 .

Wird die Pumpstrahlung moduliert, so ändert sich auch die normierte Kleinignalphotonendichte Y_1 sinusförmig. Man erhält mit $s = j\omega$ eine frequenzabhängige Übertragungsfunktion

$$\frac{Y_1(s, I_0)}{I_1(s)} = \frac{Y_0 + Q}{\tau_s \tau_p} \frac{1}{s^2 + \gamma s + \omega_0^2}, \quad (4-72)$$

eine Beziehung, die die Frequenzabhängigkeit einer Lorentz-Linie hat, Gl. (3-23). Als Modulationsempfindlichkeit wird der Quotient

$$H(\omega) = \left| \frac{Y_1(\omega, I_0)}{Y_1(0, I_0)} \right| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \quad (4-73)$$

bestimmt, das eine beträchtliche Resonanzüberschöpfung bei

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2} \quad (4-74)$$

anzuweisen kann, Bild 4-23.

$$\Delta = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 \quad (4-75)$$

wird als Diskriminante bezeichnet. Die Impulsantwort von $Y_1(t)$ auf eine Anregung $I_1(s) = \hat{I}_1$ lautet

$$Y_1(t) = \frac{\hat{I}_1}{2\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{\gamma_0 + Q}{\tau_s \tau_p} \left[e^{-(\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\Delta})t} - e^{-(\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\Delta})t} \right] \quad (4-76)$$

und ist exponentiell gedämpft.

Der Vorgang kann periodisch mit der Eigenkreisfrequenz

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad \Delta < 0 \quad (4-77)$$

oder aperiodisch ablaufen, $\Delta \geq 0$. Der aperiodische Grenzfall ist für impuls- bzw. sinusförmige Anregung durch

$$\left. \frac{\gamma}{\omega_0} \right|_{\text{Imp}} = 2, \quad \left. \frac{\gamma}{\omega_0} \right|_{\text{sin}} = \sqrt{2} \quad (4-78)$$

definiert, Bild 4-23. Der Abfall der Modulationsempfindlichkeit zu hohen Frequenzen hin erfolgt mit 40 dB/Dekade.

Die maßgebende Dämpfungskonstante γ_{eff} in Gl. (4-76) ist die kleinere der beiden Klammerausdrücke im Exponenten, also

$$\frac{1}{\tau_{eff}} = \frac{1}{2} \gamma_{eff} = \gamma/2 \quad \Delta < 0, \quad (4-79)$$

$$\frac{1}{\tau_{eff}} = \frac{1}{2} \gamma_{eff} = \gamma/2 - \sqrt{\Delta} \quad \Delta \geq 0,$$

wobei aperiodisches Einschwingen mit erfolgt ist. γ_{eff} ist stark von der normierten Pumprate I_0 abhängig, Bild 4-24, bzw. von der Photondichte. Für $I_0 < 1$ und $Q = 0$ erfolgt die Dämpfung (der Inversionsdichte X_1, Y_1 ist ja Null!) allein

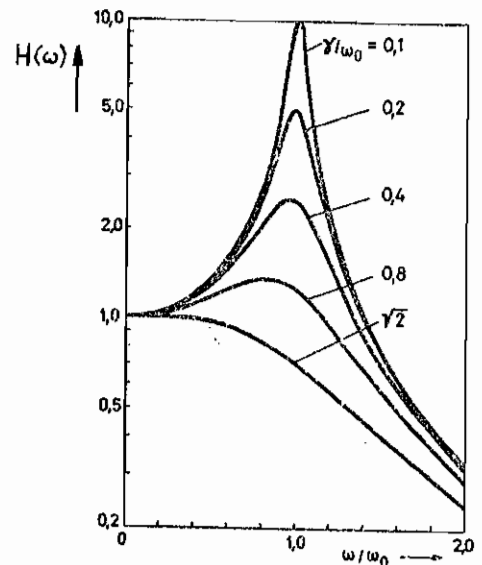
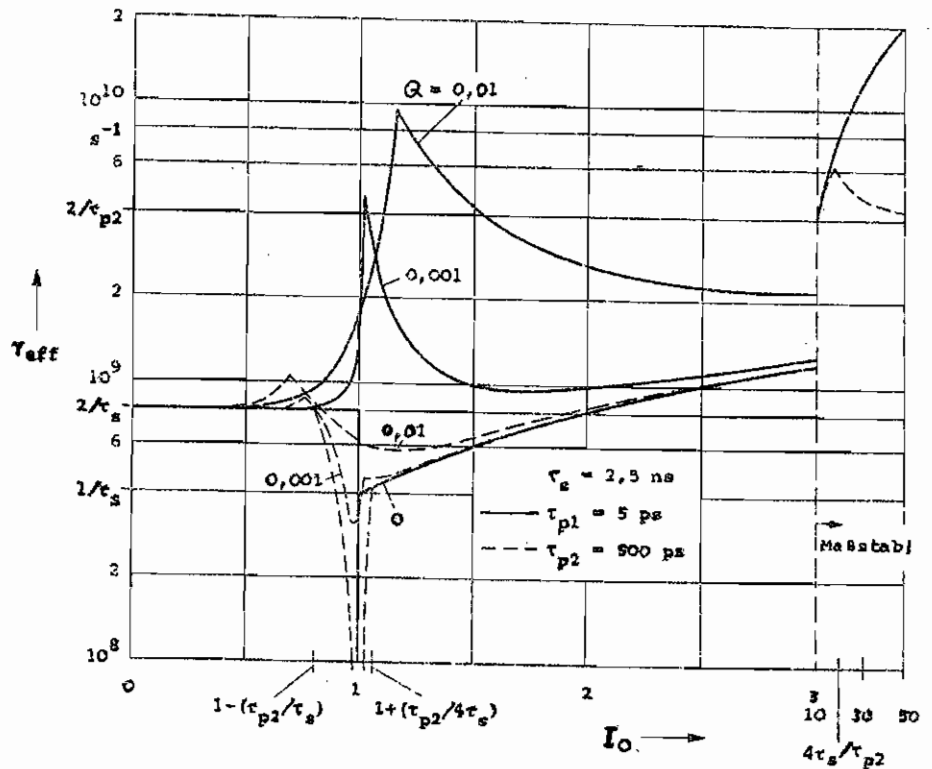


Bild 4-23

über die Fallkonstante $\tau_0 = \text{mit } \tau_{sp}$ des Übergangs ins Niveau 1, Gl. (4-71). Oberhalb der Schwelle trägt die stationäre stimulierte Strahlung γ_0 wesentlich zur Dämpfung bei. Spontane Emission in dem betrachteten Schwingungsmodus kann die Dämpfung deutlich erhöhen und die Resonanzstelle der Modulationsempfindlichkeit absplenden, jedoch wächst dann die Linienbreite der Emission beträchtlich, Gl. (4-57) und Bild 4-22.



Ein dritter Fall ist ebenfalls analytisch zu lösen, nämlich die Reaktion der Inversionsdichte

Bild 4-24

unterhalb der Schwelle auf eine Veränderung der Pumprate, wenn $Q \ll 1$ gesetzt werden kann. Für diesen Fall ist $\gamma = 0$ und man erhält aus Gl. (4-53)

$$\dot{X} + \frac{1}{\tau_0} X = \frac{1}{\tau_0} I. \quad (4-80)$$

Mit $I(-\infty < t < 0) = I_1$ und $I(t \geq 0) = I_2$, dann ergibt sich die Lösung

$$X(t) = I_2 \left(1 - \frac{I_2 - I_1}{I_2} e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right) \quad X(t) \leq X_M = 1. \quad (4-81)$$

Lichtleistung wird erst emittiert werden, wenn die Inversionsdichte den Schwellwert erreicht hat. Bis dahin verfehlt die

Verzögerungszeit

$$t_d = \tau_s \ln \frac{I_2 - I_1}{I_2 - 1} \quad Q \ll 1 \quad (4-22)$$

Aus gemessenen Werten für t_d (berechnet für $I_1 = 0$) kann also die Gesamtlebensdauer $\tau_0 = \gamma_{in} \tau_p$ des Niveaus 2 berechnet werden. t_d verschwindet, wenn $I \gg I_{th} = 1$ gewählt wird.

Nach dem Einsetzen minimaler Emission können die Bilanzgleichungen auch für $Q = 0$ zur Beschreibung des Großsignalverhaltens nicht mehr vereinfacht werden. Nun wird ergeben sich aus der Wechselwirkung von Reservoir N_2 des Niveaus 2 mit dem Photonenreservoir des Resonators, wie schon im Klein-signalfall analysiert, ausgeprägte Resonanzphänomene, Bild 4-25 Relaxationschwingungen genannt.

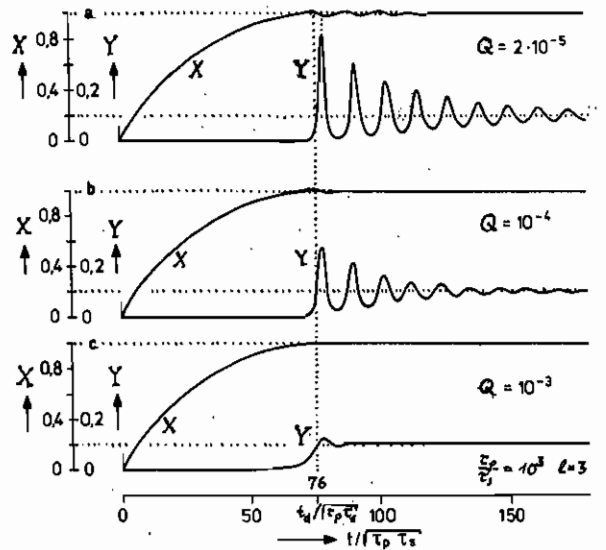


Bild 4-25 zeigt entsprechende Lösungen für drei verschiedene Werte von Q . Wird zur Zeit $t=0$ eine Sprungfunktion der Pumptrate mit der Höhe $I_2 = 1,1$ eingepreßt, so erreicht die Inversionsdichte nach der Zeit $t_d = 76 \sqrt{\tau_s \tau_p}$ den Schwellwert und die Photondichte steigt steil an. Solange sie unterhalb ihres stationären Wertes $Y_0 \approx I_2 - 1 = 0,1$ bleibt, wächst X über den Schwellwert auf X_{max} an, um durch die rasch anwachsende stimulierte Emission wegen $Y > Y_0$ wiederum bis auf X_{th} abgebaut zu werden. In diesem Zeitpunkt hat die Photondichte ihren Maximalwert Y_{max} . X sinkt weiter, bis $Y < Y_0$ wird. Dar $Y_{max} \gg Y_0$, so kann $X_{min} \ll X_{th}$ werden. Danach steigt X wieder an, während Y bis auf $Y_{min} \ll Y_0$ sinkt, bis erneut X_{th} erreicht ist. Der Vorgang wiederholt sich, allerdings ist $Y_{min} > 0$, so daß die Photondichte den stationären Wert Y_0 rascher erreicht,

was ein geringeres Übersdrehen $\gamma_{max2} < \gamma_{max1}$ zur Folge hat. Also ist auch $\kappa_{max2} < \kappa_{max1}$ und so folgt: Die Relaxationsdrehung kehrt ab. Während der letzten Phase des Ausdrehens ist eine Kleinignalnäherung angemessen. Für $\Delta < 0$ beschreibt eine Beziehung ähnlich Gl. (4-76) die Sprungantwort, die sinusförmig mit der Kreisfrequenz ω_c , Gl. (4-77), oszilliert und exponentiell mit der Zeitkonstante τ_{eff} , Gl. (4-79), gedämpft ist. Da (für Halbleiters) $\tau_2 \approx 10^3 \tau_p$ zu setzen ist, und oberhalb der Schwelle geschaltet werden kann $\tau_{eff} \approx \frac{\tau_2}{\beta_2} = \frac{\tau_2}{I_2}$, $\frac{1}{\omega_c} \approx \frac{1}{\omega_0} \approx \sqrt{\frac{\tau_2 \tau_p}{I_2 - 1}}$, dauert mit $\tau_{eff} \gg \frac{1}{\omega_c}$ die Relaxationsdrehung über viele Perioden.

Bisher war - mit Einstein, Gl. (4-18, 19) - angenommen worden, daß stimulierte Übergänge proportional der Inversionsdichte sind. Detaillierte Rechnungen für den Verstärkungsmechanismus des Halbleiters zeigen, daß die optische Verstärkung $v = hf \beta_{21} N_i v(f) / v_{ph}$ von Gl. (4-31) durch einen funktionalen Zusammenhang

$$v = v_0 \cdot N_i^l \quad \begin{array}{l} \text{DH-Laser: } (l=3 \text{ für } T=300\text{K}) \\ (l=1 \text{ für } T=0\text{K}) \end{array} \quad (4-83)$$

beschrieben werden muß mit den Konstanten v_0 und l , die auch manchmal durch die Näherung

$$v \approx v_1 (N_i - N_0) \quad (4-84)$$

dargestellt wird mit den Konstanten v_1 und N_0 , Gl. (5-31).

Nach Einführung noch mehr Größen ähnlich Gl. (4-51),

$$I = \frac{P^{(l)}}{P_H} \quad , \quad X = \frac{N_i^{(l)}}{P_H \gamma_{inj} \tau_p} \quad , \quad Y = \frac{S^{(l)}}{P_H^{(l)} \tau_p} \quad (4-85)$$

wobei die Schwellpumprate

$$P_H^{(l)} = \frac{1}{\gamma_{inj} \tau_p} \left(\frac{1}{v_0 \tau_p} \right)^l \quad (4-86)$$

wiederrum aus der Bedingung abgeleitet wird, daß stimulierte Emission gerade die Gesamtverluste des Resonators kompensie-

ren unip, erhält man die normierten Bilanzgleichungen

$$\begin{aligned} \tau_s \dot{X} &= I - X - X^2 Y, \\ \tau_p \dot{Y} &= X^2 Y + QX - Y. \end{aligned} \quad (4-87)$$

Für $Q=0$ gibt Gl. (4-54) eine Knickkurve für Inversion und Photonenendliche, während $Q \neq 0$, $l \neq 1$ die Angabe problematischer Ausdrücke analog Gl. (4-55) nicht gestattet.

Ein Kleinignalansatz Gl. (4-66) führt auf eine Differentialgleichung für die Photonenendliche,

$$\ddot{Y}_1 + \gamma^{(l)} \dot{Y}_1 + \omega_0^{(l)2} Y_1 = I_1 \frac{l X_0^{l-1} Y_0 + Q}{\tau_s \tau_p}, \quad (4-88)$$

wobei die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \gamma^{(l)} &= \gamma_s^{(l)} + \gamma_p^{(l)}, \\ \gamma_s^{(l)} &= \frac{l X_0^{l-1} Y_0 + 1}{\tau_s}, \quad \gamma_p^{(l)} = \frac{1 - X_0^l}{\tau_p}, \\ \omega_0^{(l)2} &= \frac{l X_0^{l-1} Y_0 + Q X_0^l + 1 - X_0^l}{\tau_s \tau_p} \end{aligned} \quad (4-89)$$

gelten. Für $l=1$ ist Gl. (4-88) identisch mit Gl. (4-70). In der Näherung verschwindender Beiträge spontan emittierter Photonen, $Q=0$, gilt oberhalb der Schwelle

$$\begin{aligned} \gamma^{(l)} &= l\gamma - \frac{l-1}{\tau_s}, \\ \omega_0^{(l)2} &= l\omega_0^2, \end{aligned} \quad (4-90)$$

dass also sowohl Dämpfungskoeffizient als auch das Quadrat der Kernkreisfrequenz um den Faktor l größer werden.

Bild 4-25 wurde zwar für $l=3$ berechnet, zeigt jedoch auch qualitativ das Verhalten eines Lasers mit $l=1$.

5. Optoelektronische Sender

In einem Halbleiter können Elektronen des Leitungsbandes mit Löchern des Valenzbandes strahlend rekombinieren. Die Energie der emittierten Photonen liegt in der Größenordnung des Bandabstands, $E = hf \approx E_0$. Wie schon am Ende des Abschnitts 2.1. ausgeführt, ist die Rate der strahlenden Übergänge für direkte Halbleiter besonders hoch: Bei einem Elektronenübergang müssen die Energie- und der Impuls erhalten bleiben. Die Differenz von Anfang- und Endenergie des Elektrons wird durch Emission oder Absorption eines Photons aufgebracht. Ein Photon hat mit dem (zwei-fachen) Impuls hf/c . Soll die Rekombinationswahrscheinlichkeit also hoch sein, darf kein dritter Stoßpartner erforderlich werden, um die mögliche Impulsdifferenz zu liefern oder aufzunehmen. Diese Bedingung ist für direkte Halbleiter erfüllt, bei denen das Leitungsbandminimum und das Valenzbandmaximum beide den Impuls $hk \approx 0$ haben.

Abgesehen von direkten Band-Band-Rekombinationen können es zu strahlenden Band-Term-Rekombinationen kommen, bei denen eine geladene Störstelle in verbotenen Band nach einander sowohl ein Elektron als auch ein Loch einfängt und miteinander rekombinieren läßt, Bild 5-1 a und b. Beim indirekten Halbleiter sind ebenfalls strahlende

Übergänge, vor allem Band-Term-Rekombinationen, möglich, vgl. Tabelle 2-1 für die Halbleiter Si, GaP, GaN. Die indirekte strahlende Band-Band-Rekombination, Bild 5-1 c, ist so unwahrscheinlich im Vergleich zu konkurrierenden Rekombinations-

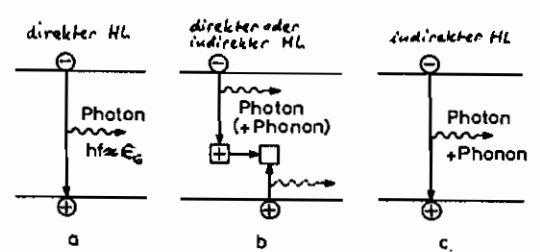


Bild 5-1 Strahlende Rekombinationsprozesse in direkten und indirekten Halbleitern
 a) direkte Band-Band-Rekombination
 b) direkte (und indirekte) Band-Term-Rekombination an einem Rekombinationszentrum
 c) indirekte Band-Band-Rekombination

mechanismen (Störatome fällt's immer!), daß sie keine prinzipielle Bedeutung hat, vpl. auch die genannten Minoritätslebensdauern für Si mit den errechneten für strahlende direkte Band-Band-Rekombination, Tabelle 2-2.

Strahlungslose Rekombination stellt für das Ziel der Lichterzeugung einen Verlustmechanismus dar, da die Übergangsenergie in Form von Wärme an das Gitter abgegeben wird. Im Falle des

Bildes 5-2 a verliert ein Leitungsbandelektron seine Rekombinationsenergie an ein anderes und reißt ins Valenzband über, während das angeregte "heiße" Elektron sich durch Kollisionen mit dem Gitter thermalisiert. Man nennt diesen seltsamen Vorgang "Auger-Prozeß".

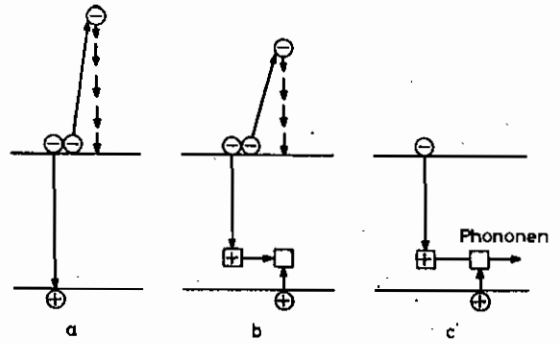


Bild 5-2. Strahlungslose Rekombinationsprozesse.
 a. Augerprozeß
 b. Band-Term-Rekombination mit Augerprozeß
 c. Band-Term-Rekombination am giant trap

Der gleiche Mechanismus kann auch in Form einer Band-Term-Rekombination ablaufen, Bild 5-2 b. Wird die Rekombinationsenergie an eine Störstelle abgegeben, die sich aus tiefem durch Photonenemission ihrer Anregungsenergie entledigt, so nennt man diese Störstelle "giant trap", Riesen Falle.

Bei den für die Strahlungsleistung verwendeten Halbleitern bemüht man sich, durch sorgfältige Präparation der Materialien die strahlungslose Rekombination möglichst klein zu halten und damit den internen Quantenwirkungsgrad η_{int} möglichst groß zu machen.

Die Beschreibung des Zwei-Niveau-Systems von Bild 4-19, die in Abschnitt 4.3. durchgeführt wurde, läßt sich auf den Emissionsprozess bei Halbleitern übertragen. Das angeregte Niveau 2 ist mit den durch Elektronen besetzten Zuständen des Leitungsbandes, das Niveau 1 mit den durch Elektronen unbesetzten Zuständen des Valenzbandes, also mit Löchern, zu assoziieren. Die Verteilung von Elek-

tronen und Löcher auf die verfügbaren Plätze ist durch Multiplikation der Zustandsdichte N_E für das Leitungs- (N_L) bzw. Valenzband (N_V), Gl. (2-29), mit der Fermi-Verteilungsfunktion f_F gegeben; diese Funktion charakterisiert, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein erlaubtes energetisches Platz von genau einer Elektronen eingenommen wird. Wegen des Pauli-Prinzips kann in jedem Zustand gerade ein Elektron sich aufhalten, wobei die Spinartung berücksichtigt werden muß. Man erhält also für die Elektronen- bzw. Lochkonzentration im Energieintervall $E \rightarrow E+dE$

$$n(E) = N_L(E) f_L(E) \quad , \quad p(E) = N_V(E) [1 - f_V(E)]. \quad (5-1)$$

Darin gilt bei parabolischen Bändern, Gl. (2-27), für die Anzahl der möglichen Plätze für Elektronen im Leitungsband, $N_L(E)$, bzw. für Löcher im Valenzband, $N_V(E)$, mit Gl. (2-29) pro Energie und Volumen

$$N_L(E) = N_E(E - E_L) = 2 \cdot 2\pi \left(\frac{2m_n}{h^2} \right)^{3/2} \sqrt{E - E_L}, \quad (5-2)$$

$$N_V(E) = N_E(E_V - E) = 2 \cdot 2\pi \left(\frac{2m_p}{h^2} \right)^{3/2} \sqrt{E_V - E}.$$

E_L und E_V sind die Energien von Leitungsbandunterkante und Valenzbandoberkante. $E_G = E_L - E_V$ ist der Bandabstand, während die Breite des verbotenen Zone m_n und m_p sind die effektiven Massen von Elektronen und Löchern. Der Faktor 2 rührt von der Spinartung der Bänder. Die Platzdichte in einem Energieintervall hT , von dem Bandkanten aus in das Innere der Bänder gerechnet, ist nach Gl. (2-30*), dort N_0 genannt, das Bandgewicht

$$N_{BL} = 2 \left(\frac{2\pi m_n kT}{h^2} \right)^{3/2}, \quad N_{BV} = 2 \left(\frac{2\pi m_p kT}{h^2} \right)^{3/2}. \quad (5-3)$$

Die Fermi-Funktion lautet

$$f(E, E_F) = \left[\exp \frac{E - E_F}{kT} + 1 \right]^{-1}. \quad (5-4)$$

Die Fermi-Energie E_F ist die Energie der Besetzungswahrscheinlichkeit $f(E_F, E_F) = \frac{1}{2}$. Für Halbleiter mit pn-Übergang im Nichtgleichgewicht sind für die Besetzungswahr-

steilheit der Elektronen und Löcher die Quasi-Fermi-Energien $E_F^{(n)}$ und $E_F^{(p)}$ maßgebend,

$$f_L(E) = f(E, E_F^{(n)}) \quad , \quad f_V(E) = f(E, E_F^{(p)}) \quad (5-5)$$

Voraussetzung dabei ist, daß die Träger innerhalb jedes Bandes untereinander im Gleichgewicht stehen, daß also die Energie relaxationszeit ($< 1ps$) klein ist gegen die Rekombinationszeit ($1 \dots 10ns$).

Bild 5-3 zeigt ein Zahlenbeispiel für die Funktionen der Gl. (5-1,2) bei Zimmertemperatur. Die strafflichten Flächen sind die Trägerkonzentrationen n und p der Gl. (5-6).

In der Umkehrfunktion $\xi(x)$ steckt ein nicht lösbares Integral. Die Gl. (5-7) gibt Näherungen unterhalb der Entartungsgrenze $x=1$, bei Entartung und weit oberhalb der Entartungsgrenze an.

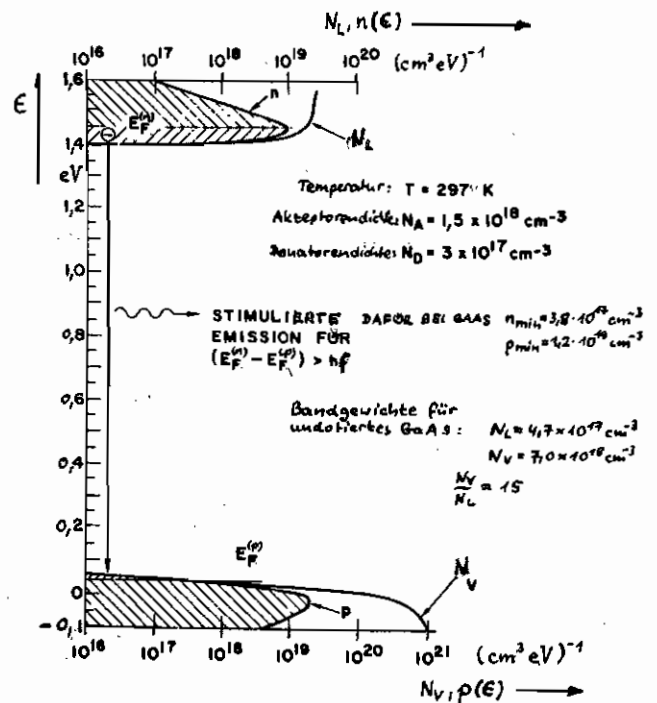


Bild 5-3. Zustandsdichten und Trägerkonzentrationen auf der p-Seite einer p-n-Übergang (GaAs) bei einer injizierten Elektronenkonzentration von $n = 10^{18} cm^{-3}$

$$n = \int_{E_L}^{\infty} n(E) dE = N_{BL} \mathcal{F}(\xi) \quad , \quad \xi = \frac{E_F^{(n)} - E_L}{kT} = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{n}{N_{BL}}\right) \quad (5-6)$$

$$p = \int_{-\infty}^{E_V} p(E) dE = N_{BV} \mathcal{F}(\xi) \quad , \quad \xi = \frac{E_V - E_F^{(p)}}{kT} = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{p}{N_{BV}}\right)$$

$$\mathcal{F}(x) \approx \begin{cases} kT \ln x & \text{für } x < 0,4 \quad , \text{ Fehler } < 10\% \\ kT [\ln x + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \dots] & \\ kT \left(\frac{3x\sqrt{\pi}}{4}\right)^{2/3} & \text{für } x > 5 \quad , \text{ Fehler } < 10\% \end{cases} \quad (5-7a)$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,3535533905 \quad A_2 = \frac{3}{16} - \frac{\sqrt{3}}{9} \approx -0,00495009$$

$$A_3 = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{5}}{48} \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{9} \approx 1,48386 \cdot 10^{-4} \quad (5-7b)$$

$$A_4 = \frac{1585}{6912} + \frac{\sqrt{5}}{32} \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{24} \sqrt{3} - \frac{\sqrt{5}}{25} \approx -4,42568 \cdot 10^{-6}$$

Zum nichtentarteten Fall $x < 0,4$, $f(E - E_F) \gg kT \approx \exp(-\frac{E - E_F}{kT})$, gilt wegen $\int_0^{\infty} \sqrt{y} e^{-y} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ in Boltzmann-Näherung, fl. (4-13),

$$\phi(\mp(E_F - E_F^{(p)})) \approx \exp(\mp \frac{E_F - E_F^{(p)}}{kT}), \quad (x < 0,4). \quad (5-8)$$

Für die intrinsische Dichte n_i gilt dann

$$n_i^2 = n_n p_n = n_p p_p = N_{0L} N_{0V} \exp(-\frac{E_G}{kT})$$

$$n_p = n_i^2 \exp(\frac{E_F^{(n)} - E_F^{(p)}}{kT}) \quad (5-9)$$

n_n, p_n und n_p, p_p sind die Gleichgewichtskonzentrationen im n - bzw. im p -Halbleiter.

Bild 5-4 zeigt schematisch das Dispersionsdiagramm eines direkten Halbleiters. Für solche Materialien mit Zinkblende-Struktur (typisch für III-V-Verbindungen) gilt nach einer quantenmechanischen Ableitung für das Verhältnis der effektiven Elektronenmasse zur Masse des freien Elektrons m_0

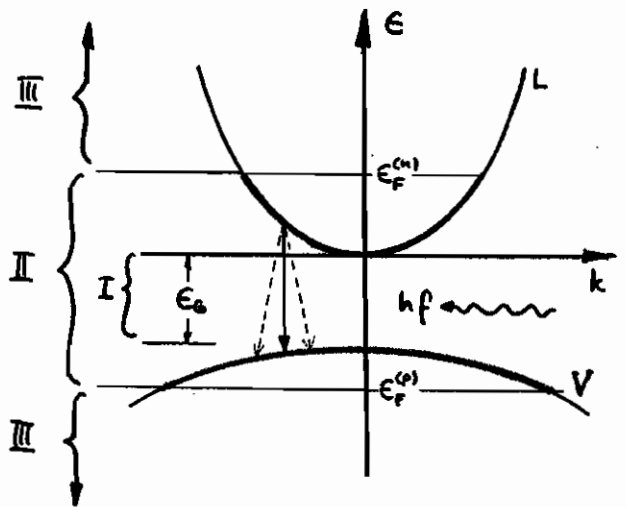


Bild 5-4. — Besetzung mit Elektronen bzw. Löchern bei $T = 0K$

$$\frac{m_n}{m_0} \approx 0,05 \frac{E_G}{eV}, \quad (5-10)$$

während die effektive Löchermasse fast zehnmal so groß ist, Tabelle 2-3. (Die Beiträge der beiden in GaAs vorhandenen Valenzbänder für schwere Löcher, $\frac{m_{pH}}{m_0} = 0,475$, und für leichte Löcher, $\frac{m_{pL}}{m_0} = 0,087$, werden mit $m_{pr}^{3/2} = m_{pH}^{3/2} + m_{pL}^{3/2} = (0,50 m_0)^{3/2}$ zusammengefaßt. Die Bänder haben beide ihr Maximum bei $k = 0$. Daraus erhält man $N_V/N_C = (\frac{m_{pL}}{m_n})^{3/2} = 21$, was von in Bild 5-3 angegebener Wert abweicht. Die Dis-

hervor kommt dadurch zustande, daß die Voraussetzung der Gl. (2-29), nämlich parabolische Bandstruktur, bei hoher Dotierung, wie in Bild 5-3 nicht mehr erfüllt ist. Wegen der großen effektiven Lückenweite ist das Bandgewicht des Valenzbandes viel größer als das des Leitungsbandes.

Für einen Halbleiterbereich werde durch irgend einen Mechanismus die Elektronen-Löcher-Verteilung des Bildes 5-4 eingestellt.

Photonenenergie $E = hf$		Effekt
I	$E_G > E$	Transparenz
II	$E_G < E < E_F^{(n)} - E_F^{(p)}$	stimulierte Rek.
III	$E_F^{(n)} - E_F^{(p)} < E$	Absorption ($T \neq 0$)

Bei der Temperatur $T = 0K$ sind alle verfügbaren Plätze im Leitungs-

Tabelle 5-1

oder Valenzband bis zu dem jeweiligen Fermi-Niveau besetzt. Hat ein einstrahlendes Photon die Energie $E < E_G$, so erfolgt keine Wechselwirkung mit dem Kristall, der folglich transparent wirkt. Hat das Photon eine Energie, die zwar größer ist als der Bandabstand, aber kleiner als der Abstand der Quasi-Fermi-Niveaus, so kann durch Absorption zwar kein Elektron aus dem Valenz- ins Leitungsband angehoben werden, da keine freien Plätze im Leitungsband bestehen. Elektronenplätze im Valenzband gegenüberliegen, wohl aber ist der stimulierte Übergang eines Leitungsbandelektrons ins Valenzband möglich, so daß das Medium verstärkt wird. Wird die Photonenenergie größer als der Abstand der Quasi-Fermi-Niveaus, dann können Elektronen aus dem Valenz- ins Leitungsband gelangen und der Kristall absorbiert. Tabelle 5-1 faßt diese Ergebnisse zusammen.

Notwendige Voraussetzung für einen optisch verstärkenden Halbleiterbereich ist also die Inversionsbedingung

$$E_G < E < E_F^{(n)} - E_F^{(p)}, \quad (5-11)$$

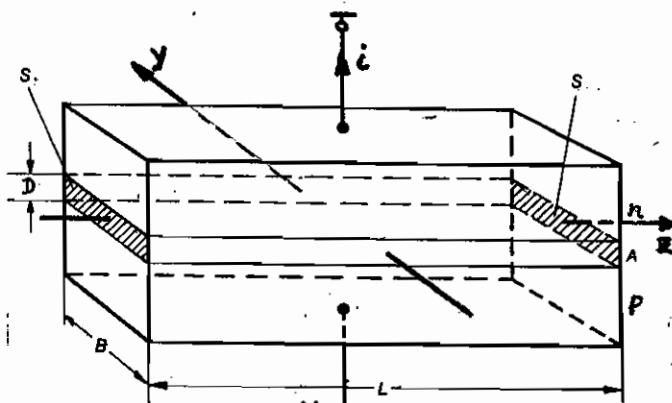
was impliziert, daß der Abstand der Quasifermi-Niveaus größer ist als der Bandabstand.

Bild 5-4 gilt für einen Halbleiter im Nichtgleichgewicht.

Über den Anregungsmechanismus wurde noch nichts gesagt. Die Erzeugung der perforierten Inversion ist aber leicht in der Umgebung eines abrupten pn-Überganges nach Bild 5-5 möglich, der entartet dotiert und in Flussrichtung vorgespannt ist. Optische Rückkopplung durch die Resonatorspiegel S soll vorerst nicht berücksichtigt werden. Bild 5-6 zeigt das zugehörige Bändermodell im strömenden Gleichgewichtsfall und im Fall (fast) vollmündiger Bandplättung, für den (wegen unendlicher Bahnwiderstände wie erreichbar!) die Spannung $U_0 - U$ an der Raumladungzone (RLZ) null geworden ist. Man sieht, daß in Abhängigkeit von der Spannung U die Fermi-Energie in die Quasi-Fermi-Niveaus $E_F^{(n)}$, $E_F^{(p)}$ aufspaltet und Gl. (5-11) erfüllt wird. Die dazu notwendige Spannung ist mindestens gleich dem Bandabstand,

$$eU = E_F^{(n)} - E_F^{(p)} > E_G \quad (5-12)$$

Zur Verknüpfung mit den Ergebnissen des Abschnitts 3.3. müssen die Übergangswahrscheinlichkeiten definiert werden, welche die elektronischen Übergänge zwischen Leitungs- (Niveau 2) und Valenzband (Niveau 1) für einen Modus des Strahlungsfeldes, pro Volumen $V = DBL$ und pro Energie $E = hf$ im Intervall $E \dots E + dE$ verbinden.



1868.71

Bild 5-5 Prinzipskizze eines pn-Übergangs der Breite B und Länge L

- A aktive Schicht der Dicke D
- n, p n- bzw. p-leitende Gebiete
- S Resonatorspiegel

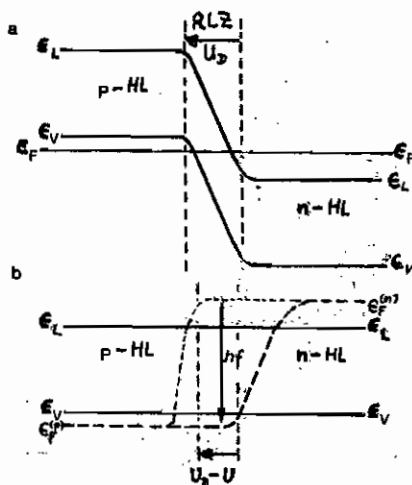


Bild 5-6 Bändermodell des pn-Übergangs (Prinzip)

- a strömloser Fall $U_0, U=0$
- b Injektionsfall $U_0, U \neq 0$

- E_L, E_V untere Valenzbandkante bzw. obere Leitungsbandkante
- E_F Fermi-Niveau
- $E_F^{(n)}, E_F^{(p)}$ Quasi-Fermi-Niveaus der Elektronen und Löcher
- U_D Diffusionsspannung
- U an RLZ wirksamer Anteil der äußeren Flussspannung
- hf Photonenergie

$B_{VL}(\epsilon)$: Stimulierte Absorptionsrate für Übergänge vom Valenz- ins Leitungsband $[(\text{cm}^3 \text{Ws}^2)^{-1}]$

$B_{LV}(\epsilon)$: Stimulierte Emissionsrate für Übergänge vom Leitungs- ins Valenzband $[(\text{cm}^3 \text{Ws}^2)^{-1}]$

$A_{LV}(\epsilon)$: Spontane Emissionsrate für Übergänge vom Leitungs- ins Valenzband $[(\text{cm}^3 \text{Ws}^2)^{-1}]$

Vorausgesetzt werde, daß die beschriebenen Übergänge voneinander unabhängig seien.

Analog zu den Gl. (4-25, 26, 26*) gilt dann für die Generationsrate $g(\epsilon)$ und die Rekombinationsrate $r(\epsilon)$ $[(\text{cm}^3 \text{Ws}^2)^{-1}]$ mit der Photonenanzahl $S' = S \cdot V$

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= B_{VL}(\epsilon) \cdot S', \\ r(\epsilon) &= A_{LV}(\epsilon) + B_{LV}(\epsilon) \cdot S'. \end{aligned} \quad (5-13)$$

Die quantenmechanische Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Leitungs- und Valenzband w_{LV} sowie zwischen Valenz- und Leitungsband w_{VL} sind gleich, vgl. auch Gl. (4-23), jedoch ist hier zusätzlich von Bedeutung, wieviele Elektronenplätze im Leitungsband mit welcher Wahrscheinlichkeit besetzt sind, so daß diese Elektronen an entsprechender Stelle im Valenzband wieviele Plätze mit welcher Wahrscheinlichkeit unbesetzt vorfinden. Über alle möglichen Kombinationen ist zu summieren. Es ist weiter zu berücksichtigen, daß die Energie erhalten bleiben soll, daß also ein Leitungsbandelektron seine gesamte bei der Rekombination freiwerdende Energie in Form eines Photons abstrahlen soll, und daß für einen Platz $\epsilon_c(\vec{k}_c)$ im Leitungsband der Energie ϵ_c und des Impulses \vec{k}_c ein gewisses Intervall von Impulsen um $\vec{k}_v = \vec{k}_c$ herum gestattet sein kann, zentriert auf den Wert für strikte Impulserhaltung, gestrichelte Pfeile in Bild 5-4. Der Energie Nullpunkt liegt an der Leitungsbanduntergrenze $\epsilon_c = 0$. Dabei gilt $\epsilon_v = -\epsilon_c$. Man erhält also mit den Energie- und Impulsvariablen ϵ_c, \vec{k}_c im Leitungs- und Valenzband, ϵ_v, \vec{k}_v ,

$$B_{VL}(\epsilon) = \int_{\vec{k}_e} \int_{\vec{k}_v} w_{LV} f_v(\epsilon_0(\vec{k}_v)) [1 - f_L(\epsilon_e(\vec{k}_e))] \delta(\epsilon_e(\vec{k}_e) - \epsilon - \epsilon_0(\vec{k}_v)) \cdot N_V(\epsilon_0(\vec{k}_v)) N_L(\epsilon_e(\vec{k}_e)) L(\vec{k}_e, \vec{k}_v) d^3k_v d^3k_e$$

$$B_{LV}(\epsilon) = \int_{\vec{k}_e} \int_{\vec{k}_v} w_{LV} f_L(\epsilon_e(\vec{k}_e)) [1 - f_v(\epsilon_0(\vec{k}_v))] \delta(\epsilon_e(\vec{k}_e) - \epsilon - \epsilon_0(\vec{k}_v)) \cdot N_L(\epsilon_e(\vec{k}_e)) N_V(\epsilon_0(\vec{k}_v)) L(\vec{k}_e, \vec{k}_v) d^3k_v d^3k_e \quad (5-14)$$

$$A_{LV}(\epsilon) = B_{LV}(\epsilon)$$

Die letzte Gleichung folgt analog zu Gl. (4-26) aus der Bedingung für thermisches Gleichgewicht mit $E_F^{(n)} = E_F^{(p)}$, Gl. (5-20) wurde gerade für $A_{LV}(\epsilon) = B_{LV}(\epsilon)$ abgeleitet.

Als Nettoüberspannung bezüglich stimulierter Emission wird definiert

$$B(\epsilon) = B_{LV}(\epsilon) - B_{VL}(\epsilon), \quad (5-15)$$

$$B(\epsilon) = \int_{\vec{k}_e} \int_{\vec{k}_v} w_{LV} [f_L(\epsilon_e(\vec{k}_e)) - f_v(\epsilon_0(\vec{k}_v))] \delta(\epsilon_e(\vec{k}_e) - \epsilon - \epsilon_0(\vec{k}_v)) \cdot N_L(\epsilon_e(\vec{k}_e)) N_V(\epsilon_0(\vec{k}_v)) L(\vec{k}_e, \vec{k}_v) d^3k_v d^3k_e$$

Da mit den Transformationen $\epsilon_e = \epsilon_e(\vec{k}_e)$, $\epsilon_v = \epsilon_0(\vec{k}_v)$ und der Funktionaldeterminante $|D(\epsilon_e, \epsilon_v)| = \left| \frac{\partial \vec{k}_e}{\partial \epsilon_e} \cdot \frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \epsilon_v} - 0 \right|$ nach Integration über ϵ_v geschrieben werden kann

$$A_{LV}(\epsilon) = \int_{\epsilon_e} w_{LV} f_L(\epsilon_e) [1 - f_v(\epsilon_e - \epsilon)] \cdot N_L(\epsilon_e) N_V(\epsilon_e - \epsilon) L(\vec{k}_e(\epsilon_e), \vec{k}_v(\epsilon_e - \epsilon)) |D(\epsilon_e, \epsilon_e - \epsilon)| d\epsilon_e, \quad (5-16)$$

$$B(\epsilon) = \int_{\epsilon_e} w_{LV} [f_L(\epsilon_e) - f_v(\epsilon_e - \epsilon)] \cdot N_L(\epsilon_e) N_V(\epsilon_e - \epsilon) L(\vec{k}_e(\epsilon_e), \vec{k}_v(\epsilon_e - \epsilon)) |D(\epsilon_e, \epsilon_e - \epsilon)| d\epsilon_e,$$

gilt für die Differentialquotienten $\frac{dA_{LV}(\epsilon)}{d\epsilon_e} = (\text{Integral } A_{LV})$,
 $\frac{dB(\epsilon)}{d\epsilon_e} = (\text{Integral } B)$ die Gleichung

$$\frac{dB(E)}{dE} = \frac{f_L(E_L) - f_V(E_0 - E)}{f_L(E_L)[1 - f_V(E_0 - E)]} \cdot \frac{dA_{LV}(E)}{dE} \quad (5-17)$$

$$\frac{dB(E)}{dE} = \left[1 - \exp \frac{E - (E_F^{(n)} - E_F^{(p)})}{kT} \right] \frac{dA_{LV}(E)}{dE}$$

Da die Variable E_0 im Klammerausdruck nicht mehr vorkommt, kann leicht integriert werden, und man erhält die von N_L, N_V, L unabhängige Beziehung

$$B(E) = A_{LV}(E) \left[1 - \exp \frac{E - (E_F^{(n)} - E_F^{(p)})}{kT} \right] \quad (5-18)$$

Gl. (5-18) gilt für einen Modus des Strahlungsfeldes. Die gesamte spektrale spontane Emissionsrate $A_{LV,sp}(E)$ (entspricht A_{21} in Gl. (4-26*)) ist dann $A_{LV}(E)$ (entspricht $A_{21}(f)$ in Gl. (4-26)) multipliziert mit der Modenanzahl im betrachteten Energieintervall dE , also

$$A_{LV,sp}(E) = N_M dE V B(E) \left[1 - \exp \frac{E - (E_F^{(n)} - E_F^{(p)})}{kT} \right]^{-1} \quad (5-19)$$

mit N_M aus Gl. (4-17). Für den Fall thermischer Gleichgewichts $E_F^{(n)} = E_F^{(p)}$, $g(E) = r(E)$ folgt

$$\frac{A_{LV}(E)}{B(E)} = \frac{1}{e^{\frac{E}{kT}} - 1} = S_0' \quad (5-20)$$

daß also die spontane Emission in einem Modus des Strahlungsfeldes ebenso groß ist wie die durch Hohlraumstrahlung in demselben Modus stimulierte Nettoabsorption (Planck'sches Strahlungsgesetz).

Analog zu Gl. (4-28) ist der Leistungswachstum durch stimulierte Emission in einem Modus im Photonenenergieintervall $E \dots E + dE$ und Volumen $V = DBL$ gegeben durch

$$\Delta P = B(E) V \Gamma_m E S_0' dE \quad (5-21)$$

Der Konzentrationsfaktor Γ_m (Gl. (3-98, 146)) beschränkt, daß möglicherweise nur ein Teil der Gesamtleistung auf das Rekombinationsvolumen entfällt und zu stimulierter Emission Anlaß gibt. Die differentielle Leistung, die

im Volumen V in einem bestimmten Modus in z -Richtung fließt, ist das Produkt von stimulierter Leistung pro Volumen mit dem differentiellen Volumen,

$$dP = \Gamma_m B(\epsilon) \cdot \epsilon \cdot S' d\epsilon dB dz,$$

oder mit $\epsilon S' = PL/v_{ph}$

$$\frac{dP}{P} = v(\epsilon) dz \quad (5-30)$$

mit der Verstärkungskonstanten

$$v(\epsilon) = \Gamma_m V B(\epsilon) d\epsilon / v_{ph}.$$

Einsetzen von Gl. (5-19, 4-17) mit $v_{ph} \approx v_g$ liefert

$$v(\epsilon) = \Gamma_m \frac{v_g^2 h^2}{8\pi} \cdot \frac{1}{\epsilon^2} \left[1 - \exp \frac{\epsilon - (\epsilon_F^{(n)} - \epsilon_F^{(p)})}{kT} \right] A v_{gs}(\epsilon). \quad (5-31)$$

Analog zu Gl. (4-33) erhält man optische Verstärkung gerade dann, wenn die Inversionsbedingung erfüllt ist, d.h. wenn für $B(\epsilon) > 0$ der Faktor des Integranden der Gl. (5-16) größer als null wird, also wenn gilt

$$f_v(\epsilon_e) - f_v(\epsilon_e - \epsilon) > 0$$

oder

$$(5-32)$$

$$\epsilon_e < \epsilon < \epsilon_F^{(n)} - \epsilon_F^{(p)},$$

was auch aus Gl. (5-31) für $[\dots] > 0$ folgt. Die untere Grenze der Photonenenergie ist durch den Minimalwert des Bandabstandes gegeben, da ja sonst überhaupt keine Wechselwirkung stattfindet, Bild 5-4 und Tabelle 5-1.

Die Emissionslinie kann homogen oder inhomogen sein. Eine inhomogene Linie läßt dann vor, wenn zwei Klassen von Elektronen und Löchern mit demselben Kristallimpuls $\hbar k$ miteinander rekombinieren könnten, und wenn die Auffüllung der bei $\hbar k_e = \hbar k_h$ rekombinierenden Träger durch Injektionströmung weit langsamer abläuft als die Entleerung durch stimulierten Emission. Die Linienfunktion L in Gl. (5-14) ließe dann $L(\hbar k_e, \hbar k_h) = \delta(\hbar k_e - \hbar k_h)$. Eine homogene Linie würde dagegen im umgekehrten Falle beobachtet,

Wenn also die Auffüllung bei den einzelnen k -Werten durch Streuung viel rascher erfolgt, als die Entleerung möglich ist, so daß es in die Verstärkerlinie einbrechendes Loch sofort wieder einpreßbar wird, dafür aber sich die Verstärkung insgesamt reduziert. Die Träger sind dann nicht mehr nach Impuls zu klassifizierbar, die Linienfunktion wird eine Konstante $L(\bar{h}_e, \bar{h}_v) = L_0$. Die Träger-Energie relaxation hat eine Zeitkonstante $\tau_0 = 0,1 \dots 1 \text{ ps}$ bei hohen ... mittleren T_0 -Temperaturen. Nach Gl. (4-8) entspricht dem bei 200 nm eine homogene Linienbreite von $\Delta h_0 = 3,6 \dots 36 \text{ \AA}$. Ist daher der axiale Resonator - Modenabstand $\Delta h_R > \Delta h_0$, so wäre bei einer inhomogenen Linie Multimodenbetrieb zu erwarten, wäre $\Delta h_R < \Delta h_0$, müßte Monomodenbetrieb beobachtet sein. Tab. 3.3.2. liegen nach Abschnitt 3.3.2. typische Modenabstände bei $\Delta h_R = \Delta h_0 \approx 2 \text{ \AA}$, man würde also in jedem Falle Monomodenbetrieb erwarten.

Im Experiment wird jedoch beobachtet, daß in einem Bereich oberhalb der Schwelle Halbleiterlaser monomodig, bei stärkeren Pumpen aber multimodig arbeiten. Dies kann erklärt werden, wenn man berücksichtigt, daß bei hohen Dichten von der Impuls der Träger nicht mehr gut definiert ist. Da jedes Träger das Kristallgitter in seiner Umgebung durch Coulomb-Kräfte deformiert und er bei Bewegung eine Art Deformations-Schleife mit sich zieht, mißt er den Impuls des Gitters zusammen mit der seiner Schleife, so daß Rekombinationsprozesse zwischen Elektronen (mit Schleife) und Löchern (mit Schleife) erfolgen können, auch wenn die Träger selbst nicht den selben Impuls haben, bei der Wechselwirkung kann ein Teil des benötigten Differentialimpulses an die Schleifen abgeben oder von ihnen genommen werden. In diesen Fällen wird der Ausdruck der Linienfunktion in Gl. (5-16) nach quantenmechanischen Rechnungen geändert werden durch

$$N_L(E_e) N_V(E_v) L(\bar{h}_e(E_e), \bar{h}_v(E_v - E)) \approx C_1 \left(\frac{m_r}{h^2} \right)^{3/2} \sqrt{E - E_G} \frac{\frac{1}{V} \cdot \frac{h}{\tau_0}}{\left[E_e - \frac{m_r}{m_n} (E - E_G) \right]^2 + \left(\frac{h}{\tau_0} \right)^2} \quad (5-33)$$

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_n} + \frac{1}{m_p} \quad (5-34)$$

mit der reduzierten Masse m_r , der "Parallelschaltung" von effektiven Elektronen- und Löchermasse. Der Quotient hat die Gestalt einer normierten Lorentzlinie. Nimmt man an, daß sich bei Veränderung von E_0 in den Integranden des f_L (5-14, 15, 16) die Linienfunktion am stärksten ändert, so wird $dB_{UV}(\epsilon) = B_{UV}(\epsilon) L(\epsilon_0, \epsilon) d\epsilon_0$, d.h. die Rate der stimulierten Emission für Ladungsträgerenergien im Intervall $\epsilon_0 \dots \epsilon_0 + d\epsilon_0$ ist für Träger mit Energien im Maximum der Linienfunktion am größten. Träger dieser Energie werden also durch ein zählendes Signal der Photonenenergie ϵ am schnellsten abgesaugt und verarmen in der Konzentration. Träger außerhalb des Maximums $\epsilon_0 = \frac{m_r}{m_n} (\epsilon - \epsilon_0)$ verarmen weniger. Wenn nun durch stärkeres Pumpen die gesamte Trägerkonzentration vergrößert wird, wächst die Konzentration und damit die Klein-signalverstärkung außerhalb der Linienfunktionsmitte rascher als im Zentrum. Das führt aber dazu, daß amfangs nur im Maximum der Verstärkung ein einziger Modus ausdringt, der die niedrigsten Verluste hat, bei höheren Pumpstufen aber auch Moden rechts und links davon auf der ϵ -Skala penitend verstärkt werden, um ebenfalls anzukommen, und das, obwohl $\Delta\lambda_e < \Delta\lambda_e$ ist.

Um möglichst viel Leistung dabei spektral zu konzentrieren, ist es wünschenswert, die Dotierung hoch zu wählen, damit durch kleines ϵ_0 die Linienfunktion breit wird und sich eher konstanten verhält.

Im Grenzfall Impulserhaltung, $L(\vec{k}_e, \vec{k}_v) = \delta(\vec{k}_e - \vec{k}_v)$, läßt sich (5-16),

$$B(\epsilon) = \int_{\epsilon_0} w_{UV} [f_e(\epsilon_0) - f_v(\epsilon_0 - \epsilon)] N_c(\epsilon_0) N_v(\epsilon_0 - \epsilon) \cdot \delta(\vec{k}_e(\epsilon_0) - \vec{k}_v(\epsilon_0 - \epsilon)) |D(\epsilon_0, \epsilon_0 - \epsilon)| d\epsilon_0,$$

leicht lösen. Für die Deltafunktion gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \delta[\varphi(x)] dx = \sum_x \frac{\psi(x_0)}{\left| \frac{d\varphi(x_0)}{dx} \right|}, \quad (5-35)$$

wobei sich die x_0 als einfache Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ ergeben. Setzt man parabolische Bänder voraus, $\epsilon_e = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}$,

$$E_0 = -E_G - \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m_p}, \text{ so wird die Funktionaldeterminante } |D| = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2m_n m_p}{\hbar^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E_e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E - E_e - E_0}} \text{ und es gilt mit Gl. (5-2)}$$

$$\psi(E_e) = w_{LV} [f_L(E_e) - f_V(E_e - E)] 4\pi \left(\frac{2m_n}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E_e} \cdot 2\pi \left(\frac{2m_p}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{-E_G - E_e + E} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2m_n m_p}{\hbar^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E_e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-E_G - E_e + E}},$$

$$\psi(E_e) = \sqrt{\frac{2m_n}{\hbar^2}} \sqrt{E_e} - \sqrt{\frac{2m_p}{\hbar^2}} \sqrt{-E_G - E_e + E} \stackrel{!}{=} 0,$$

$$E_{e1} = \frac{m_r}{m_n} (E - E_G),$$

$$\frac{d\psi(E_{e1})}{dE_e} = \left[\frac{2\hbar^3}{m_n m_p} \left(\frac{m_r}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E - E_G} \right]^{-1}.$$

Wegen der Spinerhaltung beim Übergang erscheint beim Produkt $N_L N_V$ nur einmal der Faktor 2 für Spinerhaltung. Folglich erhält man nach elementarer Rechnung für die stimulierten Emission

$$B(E) = \frac{16\pi}{\hbar^4} m_n m_p w_{LV} \left[f_L\left(\frac{m_r}{m_n} (E - E_G)\right) - f_V\left(-\frac{m_r}{m_n} \left(\frac{m_n}{m_p} E + E_G\right)\right) \right] \cdot 2\pi \left(\frac{2m_r}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E - E_G},$$

oder ohne spezielle Wahl des Energie nullpunktes (5-36)

$$B(E) = \frac{16\pi}{\hbar^4} m_n m_p w_{LV} \left[f_L\left(\frac{m_r}{m_n} (E - E_G) + E_L\right) - f_V\left(-\frac{m_r}{m_p} (E - E_G) + E_V\right) \right] \cdot 2\pi \left(\frac{2m_r}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E - E_G}.$$

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar für optische Verstärkung, $B(E) > 0$ und reell, die Inversionsbedingung Gl. (5-32). Entsprechend gilt für spontane Emission

$$A_{LV}(E) = \frac{16\pi}{\hbar^4} m_n m_p w_{LV} \left[f_L\left(\frac{m_r}{m_n} (E - E_G) + E_L\right) [1 - f_V\left(\frac{m_r}{m_p} (E - E_G) + E_V\right)] \right] \cdot 2\pi \left(\frac{2m_r}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E - E_G}. \quad (5-37)$$

Gl. (5-36, 37) genügen der allgemein gültigen Gleichung Gl. (5-19).

Zur Grenzfall, dass keine Impulserhaltung gefordert wird, $L(\vec{k}_e(E_e), \vec{k}_0(E_e - E)) |D(E_e, E_e - E)| dE_e = dE_e$ in Gl. (5-16), führt für $T=0$, also $f_L = 1$, $f_V = 0$, zu

$$A_{LV}(\epsilon) = \int_{\epsilon_0}^{\epsilon - \epsilon_G} w_{LV} f_L(\epsilon_e) [1 - f_V(\epsilon_e - \epsilon)] N_L(\epsilon_e) N_V(\epsilon_e - \epsilon) d\epsilon_e, \quad (5-38)$$

$$B(\epsilon) = \int_{\epsilon_0}^{\epsilon - \epsilon_G} w_{LV} [f_L(\epsilon_e) - f_V(\epsilon_e - \epsilon)] N_L(\epsilon_e) N_V(\epsilon_e - \epsilon) d\epsilon_e,$$

Wenn man beachtet, daß $\int_a^b [(x-a)(b-x)]^{\frac{n}{2}} dx = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \Gamma^2(\frac{n}{2} + 1)$,
 $n = -1, 0, 1, 2, \dots$ etc. Ferner gilt $x = \epsilon_e$, $a = 0$, $b = \epsilon - \epsilon_G$, $n = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,
 so daß die Lösung resultiert

$$A_{LV}(\epsilon, T=0) = B(\epsilon, T=0) = B_{LV}(\epsilon, T=0) = w_{LV} \cdot 2 \cdot 2\pi \left(\frac{2m_n}{h^2}\right)^{3/2} \cdot 2\pi \left(\frac{2m_p}{h^2}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (\epsilon - \epsilon_G)^2, \quad (5-39)$$

$$B_{VL}(\epsilon, T=0) = 0.$$

Bild 5-7 zeigt die Funktionen der Gl. (5-36, 37) mit k -Erhaltung bei $T=0K$ und $T=80K$, Bild 5-8 entsprechendes für Gl. (5-38) ohne k -Erhaltung. Zu beachten ist, daß für $T=0K$ die stimulierte Nettoemission, die gleich ist der spontanen Emission, bei Photonenenergien $\epsilon - \epsilon_G > \epsilon_F^{(n)} - \epsilon_F^{(p)} - \epsilon_G$ null wird. Für $T \neq 0K$ resultiert $B(\epsilon) < 0$ und $A_{LV}(\epsilon) \neq 0$, Tabelle 5-1.

Das Maximum für spontane Emission liegt bei höheren Photonenenergien $\epsilon_A \geq \epsilon_0$ als das Maximum der stimulierten Nettoemission ϵ_0 . Für $T=0K$ ist $\epsilon_A = \epsilon_0$. Der Einfluß der unterschiedlichen Fermi-Funktions-Terme macht sich bemerkbar.

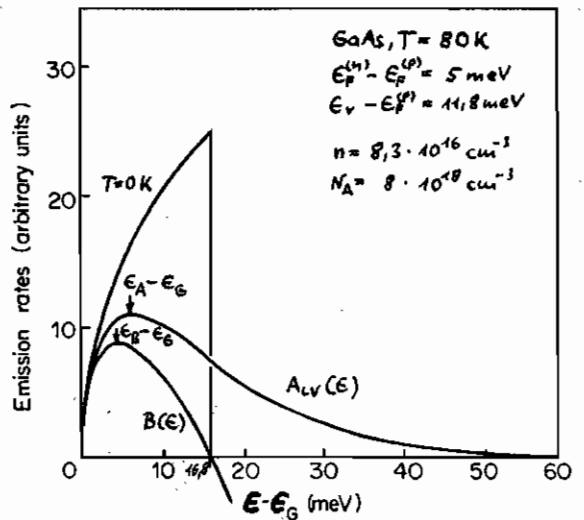


Bild 5-7 Emission rates with k -selection rule calculated from eqns. (5-36) and (5-37)

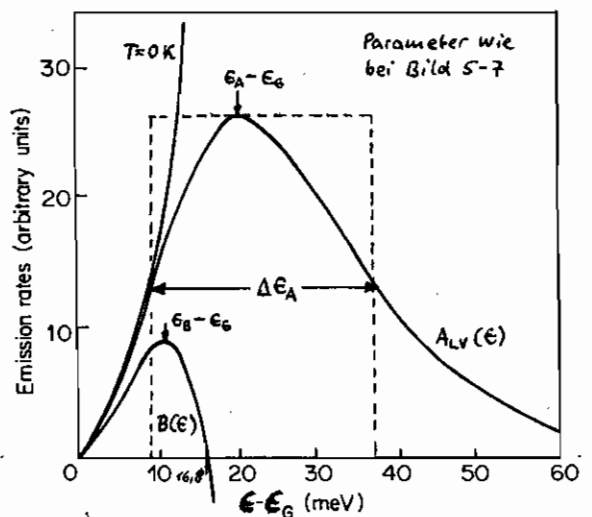


Bild 5-8 Emission rates without k -selection rule calculated from eqns. (5-38)

Um die gesamte spontane Rekombinationsrate innerhalb der Linienbreite ΔE_A von Bild (5-8) zu berechnen, ist das Integral

$$A_{LVps} = \int_{E=E_0}^{\infty} N_{ME}(E_A) \Delta E_A A_{LV}(E) dE \quad (5-40)$$

zu bestimmen. Für Übergänge ohne h -Erhaltung gilt mit dem Integranden $I(E, E_0)$ des Gl. (5-38)

$$A_{LV} = \int_{E_0=E_0}^{\infty} \int_{E_0=0}^{E-E_0} I(E, E_0) dE_0 dE = \int_{E_0=0}^{\infty} \int_{E=E_0+E_0}^{\infty} I(E, E_0) dE dE_0,$$

$$A_{LV} = \left\{ \begin{matrix} E_0 = E_0 - E \\ dE_0 = -dE \end{matrix} \right\} = \int_{E_0=0}^{\infty} \int_{E_0=-\infty}^{-\infty} I(E_0 - E_0, E_0) (-dE_0) dE,$$

und folglich

$$A_{LV} = \int_{E_0=0}^{\infty} \int_{E_0=-\infty}^{-\infty} w_{LV} f_L(E_L) [1 - f_V(E_0)] N_L(E_0) N_V(E_0) dE_0 dE,$$

so daß die Integration über Valenz- und Leitungsband getrennt ausgeführt werden kann. Mit Gl. (5-1,6) erhält man also

$$\begin{aligned} VA_{LVps} &= r' n_p = r' p_p \frac{p}{p} n = r' n n \frac{n}{n} p, \\ A_{LVps} &= w_{LV} N_{ME}(E_A) \Delta E_A \cdot n p \approx \{p = p_p\} \approx \frac{1}{V \tau_p} n, \quad (5-41) \end{aligned}$$

so daß, wie üblicherweise in der Halbleitertheorie angerechnet, die gesamte (hier strahlende) Rekombinationsrate proportional den beiden Trägerkonzentrationen ist. Im thermischen Gleichgewicht gilt Gl. (5-9). Folglich wird $A_{LVps, gesam} = w_{LV} N_{ME}(E_A) \cdot \Delta E_A \cdot n_i^2$. ^{Top} _{für schwache Störung der Majoritätsträgerkonzentration $p = p_p$} In die Lebensdauer bezüglich spontaner Rekombination. Gl. (4-41) gilt offensichtlich unabhängig von Bandverlauf bei allen Halbleitern, nicht nur bei direkten Materialien mit strahlender Rekombination. Für strichle oder blockweise h -Erhaltung treten Modifikationen ein.

Rechnungen mit parabolischen Bändern zeigen das grundsätzliche. Tatsächlich sind die Zustandsdichten beider notwendig für hohe Dotierung keine Darstellungsfunktion mehr. Die unterschiedlichen Donator- und Akzeptorbande bilden eigene Bänder, die nicht mit dem Leitungs- bzw. Valenzband verschmelzen. Folglich bekommen die Zustandsdichten "Schwänze", die in die vorher verbotene Zone hineinragen.

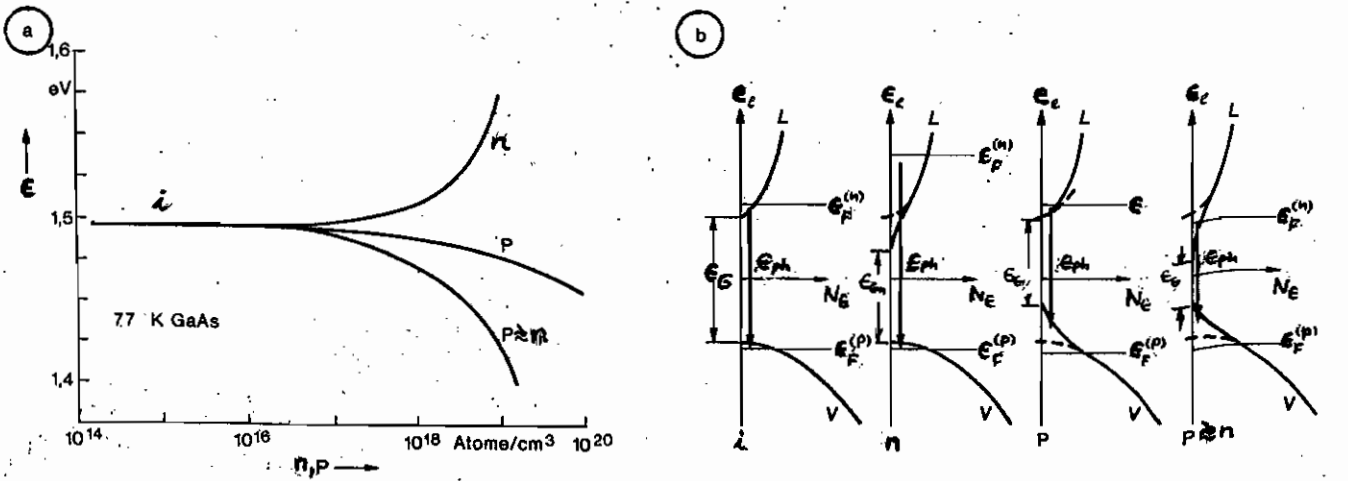


Bild 5-9 Dotierung und optische Eigenschaften von Halbleiterlasern a Laser-Photonenergie E als Funktion der Dotierung b Zustandsdichte N bei verschiedenen Dotierungen
 i Bereich niedriger Dotierung
 n Bereich der Donatordotierung (n-Dotierung)
 p Bereich der Akzeptordotierung (p-Dotierung)
 p+n Bereich der kompensierten Dotierung
 V, L Valenz- bzw. Leitungsband

Bild 5-9 n- und p-Dotierung. Zeichnet N der Verlauf ein tragen.

Für niedrige i-Dotierung ist die Photonenenergie E ungefähr gleich dem Bandabstand. Mit höherer n-Dotierung (des n-Halbleiters in Bild 5-5) wird das Fermi-Niveau höher ins Leitungsband geschoben. Bei gleicher Anregung (ins p-Bereich injizierte Trägerdichte in Bild 5-6) liegt das Quasi-Fermi-niveau weiter im Leitungsband als im Fall i. Gleichzeitig entstehen Bandlücken im n-Bereich. Nach Bild 5-3 liegt die höchste Ladungsträgerkonzentration ungefähr bei den Fermi-Energien. Folglich wird die Photonenenergie größer als bei i-Dotierung. Bei wachsender p-Dotierung (des p-Halbleiters) bewegt sich das Fermi-niveau wegen der sehr großen Zustandsdichte nur wenig in das Band hinein, aber es gibt Bandlücken. Die Injektion von Löchern ins n-Bereich wird aus demselben Grund (hohe Zustandsdichte) zur Erzielung einer Inversion (Verschiebung von $E_F^{(p)}$ in n-Halbleiter) sehr wenig ergebnisreich. Überprüfe findet vor allem in das Akzeptorband statt, so daß die Photonenenergie kleiner wird als bei i-Dotierung. Um mit möglichst geringen (d.h. Elektro-) Strömen auszukommen, um eine gegebene Inversion, also optische Verstärkung, zu erreichen, wird das aktive Volumen im p-Halbleiter durch p-kompensiert dotiert, d.h. gleichzeitig n- und im Überdies p-entartet dotiert. So-

wohl Leitungs- als auch Valenzband des p-Halbleiters haben Bandschwänze, die gerade im Leitungsband wegen der geringen Zustandsdichte rasch zu füllen sind, so daß schon bei geringer Elektroneninjektion aus dem entartet dotierten n-Halbleiter die Inversionsbedingung erfüllt wird. Bei dieser Dotierungszahl ist die Photonenenergie am niedrigsten.

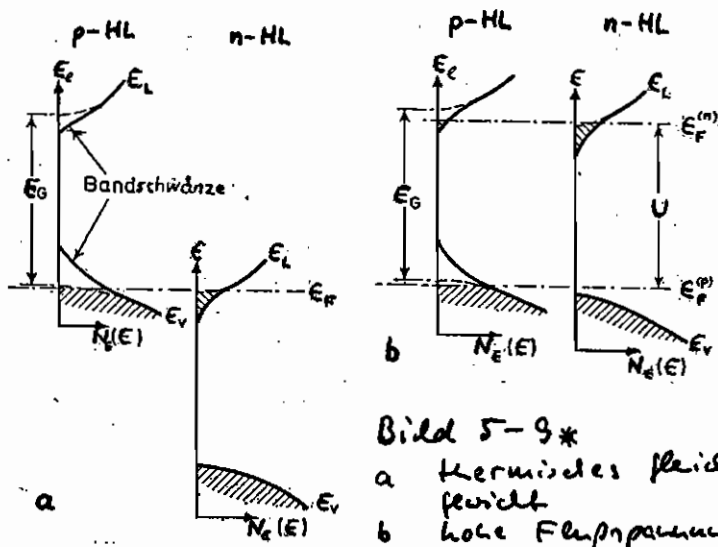


Bild 5-9*
 a thermisches Gleichgewicht
 b hohe Flußspannung

Nied. Bild 5-9* zeigt die Zustandsdichten in unmittelbarer Umgebung einer Sperrschicht, einmal im thermischen Gleichgewicht, zum zweiten mit hoher Flußspannung U . Das p-Halbleiter ist offenbar kompensiert dotiert.

Auf die Fähigkeit zu monomodaler Emission wirkt sich hohe (kompensierte) Dotierung günstig aus, da E_C in Gl. (5-33) kleiner wird. Andererseits wächst die Absorption durch freie Ladungsträger, da in Gl. (3-39) n der Trägerkonzentration und der reziproken Kollisionszeit proportional ist. Ferner nimmt der Brechungsindex mit der Konzentration zu. Ein Blick auf Bild 3-3 zeigt, daß für Photonenenergien im transparenten Bereich ein Sinken des Brechungsindex mit wachsender Konzentration eine Verschiebung der Absorptionsschwelle zu höheren Energien hin bedingt. Folglich wird die Fermi-Energie höher im Leitungsband liegen und die Photonenenergie (Absorption und Emission) höher (Burstein-Moss-Verschiebung) sein.

Die Schwellstromdichte eher durch einen optischen Resonator rüch gekoppelten Struktur nach Bild 5-5 soll nun berechnet werden. Die Breite der aktiven Zone D , ein Wellenleiter mit z -Guiding nach Abschnitt 3.3.4., ist ungefähr gleich der Diffusionslänge der Minoritätsträger L_n , also $D \approx L_n$. Höchsteinjektions spielen deswegen keine Rolle, weil das n-Gebiet stärker entartet dotiert ist als das kom-

penetration p -gebiet. Durch den injizierten Strom müssen im Volumen $V = DOL$ gerade so viele strahlend rekombinierende Ladungsträger produziert werden, daß die Verluste während des Laserbetriebs gedeckt sind, gl. (4-35, 5-31), also mit gl. (4-38)

$$v(E) = (\tau_{pm}(E) v_{ph})^{-1} \quad (5-42)$$

Dies ist Schwelle sein stimuliert Prozesse wegen des üblicherweise hohen Photonen dichten verschärfbar. Dann gilt für den Strom, daß er gerade die zur spontanen Rekombination benötigten Träger liefern muß,

$$\frac{\eta_{int} i}{Ve} = \int_{E_0}^{\infty} A_{sp}(E) dE. \quad (5-43)$$

Bei (und über) der Schwelle gilt gl. (4-42), wobei $v(E)$ für eine bestimmte Photonenenergie E_0 maximal werden wird, Bild 5-8. Der nächstgelegene Resonanzmodus m schiebt dann an. Nach Umformung ergibt sich für den Schwellstrom $i_{th} = i(v(E_0))$

$$i_{th} = \frac{eV}{\eta_{int}} \cdot \frac{\int_{E_0}^{\infty} A_{sp}(E) dE}{A_{sp}(E_A) \Delta E_A} \cdot \frac{A_{sp}(E_A)}{A_{sp}(E_0)} \cdot A_{sp}(E_0) \Delta E_A. \quad (5-44)$$

E_A ist diejenige Energie, bei der die spontane Emission maximal wird, Bild 5-8, unter ΔE_A ist die Halbwertsbreite α verstanden. Mit den Abkürzungen

$$\gamma_1 = \frac{\int_{E_0}^{\infty} A_{sp}(E) dE}{A_{sp}(E_A) \Delta E_A}, \quad \gamma_2 = \frac{A_{sp}(E_A)}{A_{sp}(E_0)}, \quad \gamma_3 = \left[1 - \exp \frac{E_0 - (E_F^{(n)} - E_F^{(p)})}{kT} \right] \quad (5-45)$$

erhält man den Schwellstrom

$$i_{th} = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \frac{q \pi e}{c^3 h^3} \cdot \frac{n^3 V E_0^2 \Delta E_A}{\eta_{int} \tau_{pm}(E_0) \Gamma_m(E_0)}. \quad (5-46)$$

Der Quotient γ_1 von wahrem Integral und Rechtecknäherung in Bild 5-8 ist nahezu eins und fast temperaturunabhängig. γ_2 wächst mit der Temperatur, ist für $T=0K$ aber ebenfalls eins. Auch γ_3 wächst mit der Temperatur und hat für $T=0K$ wegen $E < E_F^{(n)} - E_F^{(p)}$ den Wert eins. Für

eine typisch kompenziert dotierte aktive p-zone ist $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \approx 9$ bei $T = 300 \text{ K}$.

Die Strom-Spannungs-Kennlinie für unentartet dotierte pn-Überspanne läßt sich nicht mehr auf einfache Weise berechnen. Als brauchbare Näherung kann man jedoch die übliche Kennliniengleichung

$$i = i_{sc} \left(e^{\frac{u - R_b i}{c \cdot kT}} - 1 \right) \quad (5-47)$$

heranziehen. $u = U + R_b i$ ist die extern anliegende Spannung, U die an der Sperrschicht wirksame Anteil, vgl. Bild 5-5, R_b der Bahnwiderstand und i_{sc} der Sättigungsstrom. Im Falle der Nichtentartung erhielte man mit Gl. (5-9)

$$i_{sc01} = eBL \left(\sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}} \cdot \frac{1}{N_D} + \sqrt{\frac{D_n}{\tau_n}} \cdot \frac{1}{N_A} \right) n_i^2, \quad i_{sc02} \approx 10 \cdot i_{sc01} \quad (5-48)$$

Dabei steht D_p, D_n für die Diffusionskonstanten, τ_p, τ_n für die Lebensdauern in n- und p-Material, N_D, N_A für die Donator- und Akzeptorandichten, und mit $U_T = kT/e$ wird die Temperaturspannung definiert. In der Tendenz gilt Gl. (5-48) auch bei unentartet dotierung, allerdings nicht mehr für die Temperaturabhängigkeit von U_T und i_{sc} . Jedenfalls wird der Sättigungsstrom durch die hohe Dotierung sehr klein werden. Typische Messwerte liegen, wenn temperaturunabhängig, im pA-Bereich. Der erste Term in der Klammer von Gl. (5-48) beschreibt den Löcherstrom, der zweite den Elektronenstrom.

Um hohe optische Verstärkung zu erreichen ist Elektroneninjektion erwünscht; man erreicht sie dadurch, daß das n-Gebiet stärker unentartet dotiert wird als das p-Gebiet, vgl. den Text zu Bild (5-9). Gl. (5-48) reduziert sich dann zu $i_{sc} = eBL \sqrt{\frac{D_n}{\tau_n}} \frac{1}{N_A} n_i^2$, wobei bereits der in Gl. (5-41) berechnete Wert für die Lebensdauer τ_n der Elektronen im p-Material eingesetzt wurde. Quantitative Aussagen lassen sich aus den Gl. (5-47, 48) im unentartet dotierten Fall nicht ableiten.

Die Konstante c in Gl. (5-47) berücksichtigt bei nicht unentartet dotierten Dioden, daß Rekombination in der RLZ den Gesamtstrom bei fester Spannung senkt. Für niedrige Ströme gilt die Kennliniengleichung mit $c=2$. (Im Hochinjektionsfall, wenn also die Anhebung der Majoritätsträgerdichten im

den Diffusionszonen nicht mehr vernachlässigt werden kann, gilt ebenfalls $c=2$.) Der Bereich mittlerer Stromstärke wird mit $c=1$ erfüllt. Die Sättigungsstromstärke für niedrige und mittlere Stromstärke unterscheiden sich nicht bedeutend, (gl. (5-48)). Quantitativ ist auch hier keine Übertragung auf eine anbarbare dotierte Diode möglich; aus Messungen ergibt sich jedoch $c_{UT} = c_{UT}(300K) = (2,7 \dots 3) U_T(300K)$ als unabhängig von der Temperatur im Bereich $-20^\circ C \dots 40^\circ C$.

Die Kennlinie (gl. (5-47)) beschreibt im Flußbetrieb ein n-Halbleiters bis zu solchen Spannungen $u - R_b i$, so lange mit (gl. (5-12)) $e(u - R_b i) = E_F^{(n)} - E_F^{(p)} = \Delta E_F < E_G$ gilt. Dann setzt nämlich Lawation ein und die Fermi-Niveaus haben die Tendenz, in gleichem Abstand zueinander zu gehen, wobei der Abstand wächst, so wie sie überproportional (mit (gl. (5-30, 36)) z.B. exponentiell) die Verdichtungskonstante und damit die stimulierte Emission, welche durch Trägerverringern ΔE_F auf den Schwellwert ΔE_{FH} zu ziehen bemüht ist. Wäre andererseits $\Delta E_F < \Delta E_{FH}$, so wäre die Anzahl stimulierter Rekombinationen überproportional kleiner, so daß ΔE_F durch die Träger des Nichteinstroms wieder auf den Schwellwert ΔE_{FH} gehoben würde. Bei idealen Verhältnissen träte also eine Spannungsprättigung ein. Wäre $R_b = 0$, so müßte die externe Spannung u konstant bleiben. Dies wird auch in μ als Näherung beobachtet, so daß nach Einsetzen stimulierter Emission für die Kennlinie gilt, (gl. (5-32)),

$$i \approx \frac{\mu}{R_b} - \frac{\Delta E_{FH}}{e R_b} \approx \frac{\mu}{R_b} - \frac{E_G}{e R_b} \quad (5-49)$$

Bei Betrieb in Vorwärtsrichtung bringt der Tunnel Effekt Abweichungen, z.B. in der gegen über reiner Diffusion fast verschwindenden Temperaturabhängigkeit von c_{UT} . Bei Betrieb in Rückwärtsrichtung und Dotierung ab $N_D \approx 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ für GaAs dominiert der Tunnel Effekt, so daß schon für kleine Sperrspannungen sehr hohe Rückwärtsströme fließen. (Wird $E_F^{(n)}$ in Bild 5-6 a durch eine Sperrspannung abgesenkt, so können Elektronen des p-Halbleiters mit $E_0 < E_F^{(p)}$ auf energetisch gleichwertige Plätze im n-Halbleiter mit $E_0 > E_F^{(n)}$ überwechseln, in dem sie die verbotene, räumlich sehr schmale

Zone in der Sperrschicht durchtunneln, vgl. den Text zu Bild 2-3.) Das Bauelement verhält sich wie eine Rückwärtsdiode (Backward Diode). Für Dotierungen $N_D < 10^{18}$ für GaAs ist Lawinendurchbruch maßgeblich, der bei Spannungen ab ungefähr 5V einsetzt.

Die geringe Breite des RLZ erlaubt die Vernachlässigung der Sperrschichtkapazität, die für konventionell dotierte Dioden mit abrupter Dotierung proportional zur Wurzel aus der Sperrspannung wächst. Es dominiert die Diffusionskapazität, verursacht durch Ladungsspeicherung von Minoritätsträgern des Leitendarmes $n_{int} \tau_p$, $C_{diff} = \frac{n_{int} \tau_p i}{U_T} \approx \tau_p i_s e^{\frac{U}{U_T}}$, die exponentiell mit der Flußspannung wächst. Für Zwecke der Modulation zählt das nicht, da bei Vorspannung oberhalb der Laserschwelle $C_{diff} \rightarrow 0$ geht. Es gilt nicht mehr $n_{int} \tau_p = \tau_p$, sondern die Lebensdauer der Minoritätsträger wird durch die Intensität des optischen Strahlungsfeldes festgelegt. Beim Einschalten einer Stromspannung wirkt sich C_{diff} aber wohl aus, wie in Bild 4-25 für den zeitlichen Verlauf der (hier: Elektronen-) Inversionsdichte zu sehen ist, vgl. auch Gl. (4-82). Nach dem Einsetzen stimulierter Emission, $Y_0 \neq 0$, ist die Reaktion von X wesentlich schneller.

Die spontan emittierte Lichtleistung $P = hf \cdot A_{sp}$ hängt nach Gl. (5-41) linear von der Elektronendichte $n = n_p$ im p-Bereich ab. (Lichtinjektion vernachlässigt, $p \approx p_p \approx N_A$) Diese Ladung wird durch einen Strom $i = enV$, in des Rekombinationsvolumen V transportiert, so daß $P_{sp} \sim i$ wird. Dabei ist Rekombination in der RLZ (nicht strahlend!) und der Einfluß des Bahnwiderstandes vernachlässigt. Tabwidbild ist jedoch nicht der Strom, sondern die Spannung primäre Ursache der Emission, vgl. Gl. (5-12). In Boltzmann-Näherung (bei abrupt dotierten Dioden eigentlich unvernünftig) gilt Gl. (5-6) zusammen mit Gl. (5-8). Mit Gl. (5-9, 12) erhält man am Rande der RLZ $x = -w_p$, $x = w_n$, Bild 5-6,

$$n(-w_p) = n_p \exp \frac{E_F^{(n)} - E_F^{(p)}}{kT} = n_p e^{\frac{u}{U_T}},$$

$$p(w_n) = p_n \exp \frac{E_F^{(n)} - E_F^{(p)}}{kT} = p_n e^{\frac{u}{U_T}}. \quad (5-50)$$

Näherungsweise wurde die Majoritätsträgerkonzentration des Gleichgewichtszustandes eingesetzt, $p(-w_p) \approx p_p$, $n(w_n) \approx n_n$. Folglich gilt mit Gl. (5-41) für die spontan emittierte Leistung, $n \approx n(-w_p)$, $p \approx p_p$, $n p = n_i^2 \exp \frac{u}{U_T}$,

$$P_{sp}(E) \approx w_{LV} N_{MG}(E_A) \Delta E_A E n_i^2 e^{\frac{u}{U_T}}. \quad (5-51)$$

Mit Gl. (5-47) und $i \gg i_{sc}$ wird $u = c U_T \ln \frac{i}{i_{sc}}$, so daß man

$$P_{sp}(E) \approx w_{LV} N_{MG}(E_A) \Delta E_A E n_i^2 \left(\frac{i}{i_{sc}} \right)^c \quad (5-52)$$

erhält. Wenn bei niedrigen Strömen die nichtstrahlende Rekombination in der RLZ wesentlich zum Strom beiträgt, $c=2$, wird $P_{sp,c=2} \sim \left(\frac{i}{10 i_{sc,c=1}} \right)^2$ sein. Für mittlere Stromwerte gilt $P_{sp,c=1} \sim \frac{i}{i_{sc,c=1}}$.

Die spontane Strahlung wird in dem gesamten Raumwinkel emittiert, die stimulierte Leistung dagegen läuft in Richtung der größten optischen Verstärkung bzw. der stärksten Auskoppelung durch einen optischen Resonator (wie in Abschn. 3.3.2. und 3.3.5. beschrieben) und erfüllt dabei einen viel kleineren Raumwinkel $\Delta\Omega$. Um die Lichtstrom-Kennlinie unter Einwirkung stimulierter Prozesse darzustellen, muß folglich die Wechselwirkung mit dem optischen Feld erfaßt werden, im einfachsten Fall in Form von Bilanzgleichungen für den Raumwinkelbereich $\Delta\Omega$.

Nach Gl. (5-41) gilt ohne k-Erhaltung, daß die spontane Emissionsrate dem Produkt von Elektronen- und Löcherdichte proportional ist, wobei durch Rekombinationsprozesse die Anzahl von Elektronen und Löchern im gleichen Maß verringert wird. Setzt man voraus, daß in aktiven Volumen die Fermi-Niveaus $E_F^{(n)}$, $E_F^{(p)}$ ungefähr gleich weit im Bandinneren liegen, so ist entsprechend dem wesentlich höheren Valenzbandgewicht auch die Löcherkonzentration wesentlich höher als die Elektronenkonzentration. Die absolute Konzentrationsänderungen gleichen sich

bei beiden Trägerarten nach einer Rekombinationszeit, die re-
lativen Änderung jedoch sind wesentlich verschieden. Selbst
wenn $E_F^{(p)}$ bei niedriger oder konstanter Dotierung nur wenig
im Bandinneren liegt, kann bei ausreichend geringer Inversion
(also Dichte der injizierten Elektronen) gesteuert werden

$$V \cdot A_{\text{Lupe}} \approx w_{\text{LV}} N_{\text{ME}}(E_A) \Delta E_A p p n = A_0 n = \frac{1}{\tau_p} n = \frac{\eta_i}{\tau_s} n, \quad (5-53)$$

$$\tau_p = A_0^{-1} = [w_{\text{LV}} N_{\text{ME}}(E_A) \Delta E_A (N_A^{(p)} - N_D^{(p)})]^{-1},$$

so daß die Rekombinationsrate unter dieser Voraussetzung
unabhängig von der Ladedichte wird.

Die Verteilung für die kinetische Emission sind verschä-
kelt. Wäre der Ausdruck in eckigen Klammern des Gl. (5-19)
eins, d. h. für $T=0K$, so wäre die Proportionalität $B(E) \sim$
 $A_{\text{Lupe}}(E) \sim n$ wie in Gl. (5-53), und die optimale Verdichtung
wäre der Elektronendichte und damit dem Injektionsstrom
proportional. Tatsächlich trifft das nicht zu. Es läßt sich
aber näher (ohne Ableitung) mit $B = \int_{E_0}^{\infty} B(E) dE$

$$V \cdot B = B_0 \cdot n^e \quad \begin{array}{l} e=1 \text{ bei } T=0K, \text{ Gl. (5-19, 40, 53)} \\ e=3 \text{ bei } T=300K, \end{array} \quad (5-54)$$

vgl. Gl. (4-83). Für die Änderung der Elektronendichte
($\frac{dn}{dt} = 0$ gemäß der Voraussetzung zu Gl. (5-53)) und der Akkumula-
tion kann man in Analogie zu Gl. (4-43, 47) mit Gl. (5-13)
schreiben (p ist von nun an die Pumprate, nicht die Ladedichte!)

$$\frac{dn}{dt} = p - \frac{n}{\tau_s} - B_0 n^e \cdot S, \quad \tau_s X = I - X - X^e Y,$$

$$\frac{dS}{dt} = B_0 n^e S' + \frac{n}{N_{\text{MF}} V \tau_p} - \frac{S}{\tau_p}, \quad \tau_p Y = X^e Y + QX - Y, \quad (5-55)$$

$$p = \frac{i}{eV}, \quad \text{im von Gl. (5-46)}, \quad n_{\text{M}} = N_{\text{MF}} \frac{\tau_p}{\tau_p} \text{ von Gl. (4-46)}.$$

Normiert wurde analog zu Gl. (4-85, 86)

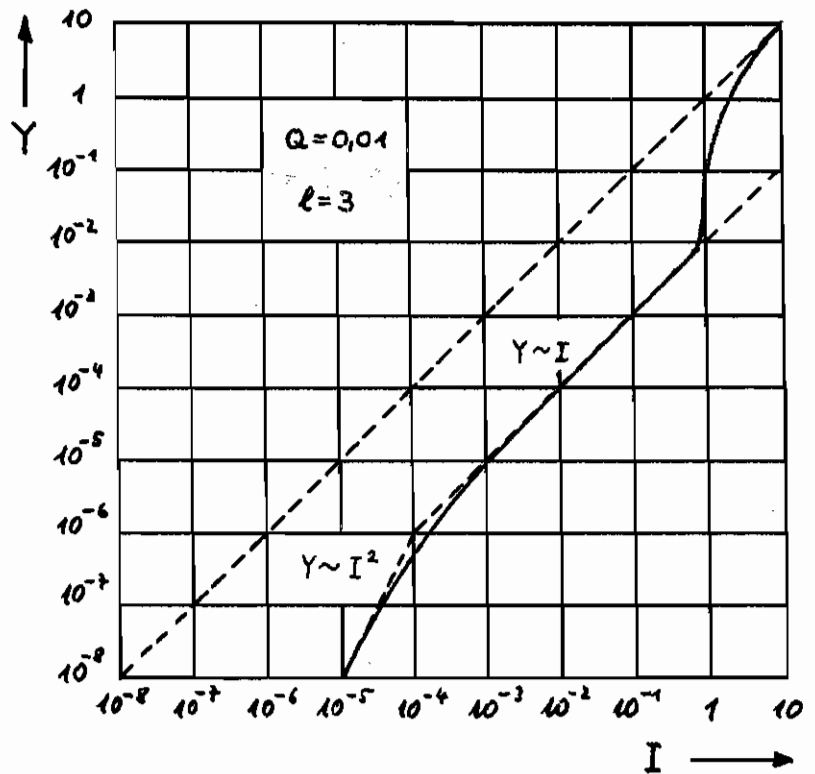
$$I = \frac{p}{p_{\text{M}}}, \quad X = \frac{n}{p_{\text{M}} \tau_s}, \quad Y = \frac{S}{p_{\text{M}} \tau_p}, \quad p_{\text{M}} = \frac{1}{\tau_s} \left(\frac{1}{B_0 \tau_p} \right)^{1/e}, \quad (5-56)$$

mit

$$Q = \frac{\eta_i K}{N_{\text{MF}} V} = \frac{K}{n_{\text{M}} V} \cdot \frac{\tau_s}{\tau_p}, \quad \text{für GaAs } Q = 10^{-2} \dots 10^{-6} \quad (5-57)$$

nach Gl. (4-50). Alle Ergebnisse des Abschnitts 4.3.3. lassen sich jetzt leicht auf das Hallelektrosystem übertragen.

Bild 5-10 zeigt in doppelt logarithmischer Darstellung die normierte Photonen-dichte (nach Gl. (4-63) der Aus-pumpstrahlung von K Resonanzmode proportional, in den Raumwinkel $\Delta\Omega$ abstrahlt) über der normierten Pump rate (proportional dem Injektionsstrom).



Für geringe Injektion wächst sich

Bild 5-10

Rekombination in der RLZ nach Gl. (5-52) mit $c \approx 2$ aus. Bei höheren Strömen tritt ein proportionaler Zusammenhang, der die stimulierte Verstärkung der spontanen Strahlung auch für Pump rates $I > 1$ erhalten bleibt. Stimulierte Verstärkung, insbesondere im Zusammenhang mit optischer Rückkopplung, sorgt dafür, daß die Rekombinationsstrahlung der Ladungen $n-n_{th}$ vollständig ($\gamma_{int} = 1, Q = 0$) stimuliert erfolgt, und so wesentlich mehr Leistung als vorher in dem erfaßten Raumwinkel $\Delta\Omega$ emittiert wird. Da sich die Elektronendichte nur noch unwesentlich ($Q \neq 0$) ändert, vgl. Bild 4-21, bleibt mit Gl. (5-53) auch der Anteil spontaner Strahlung konstant, während sich die stimulierte Emission der Asymptote $Y = I - 1$ nähert, Gl. (4-54).

Für die Abfallcharakteristik M im wesentlichen die optische Resonatorverantwortlich, der als Licht- oder Wellenleiter-

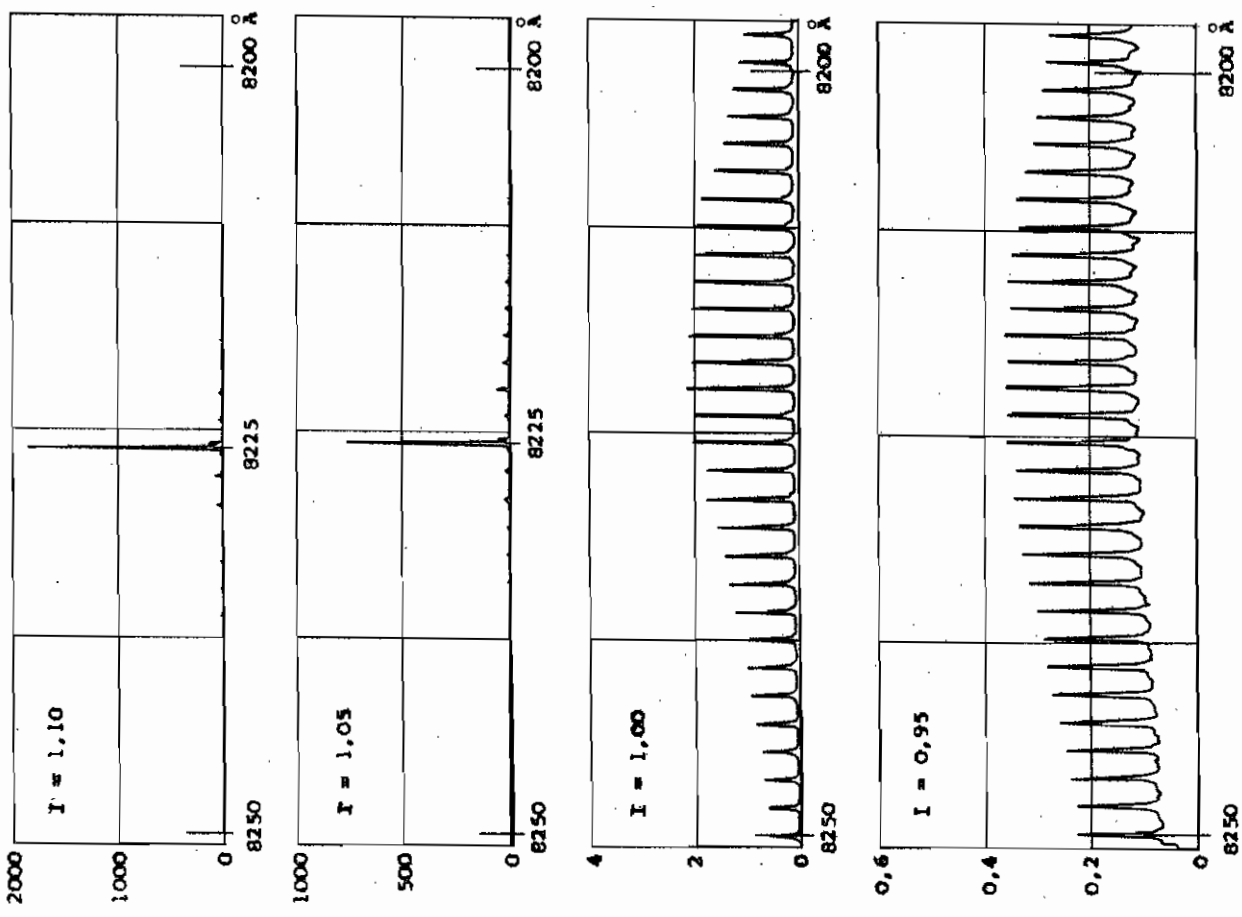
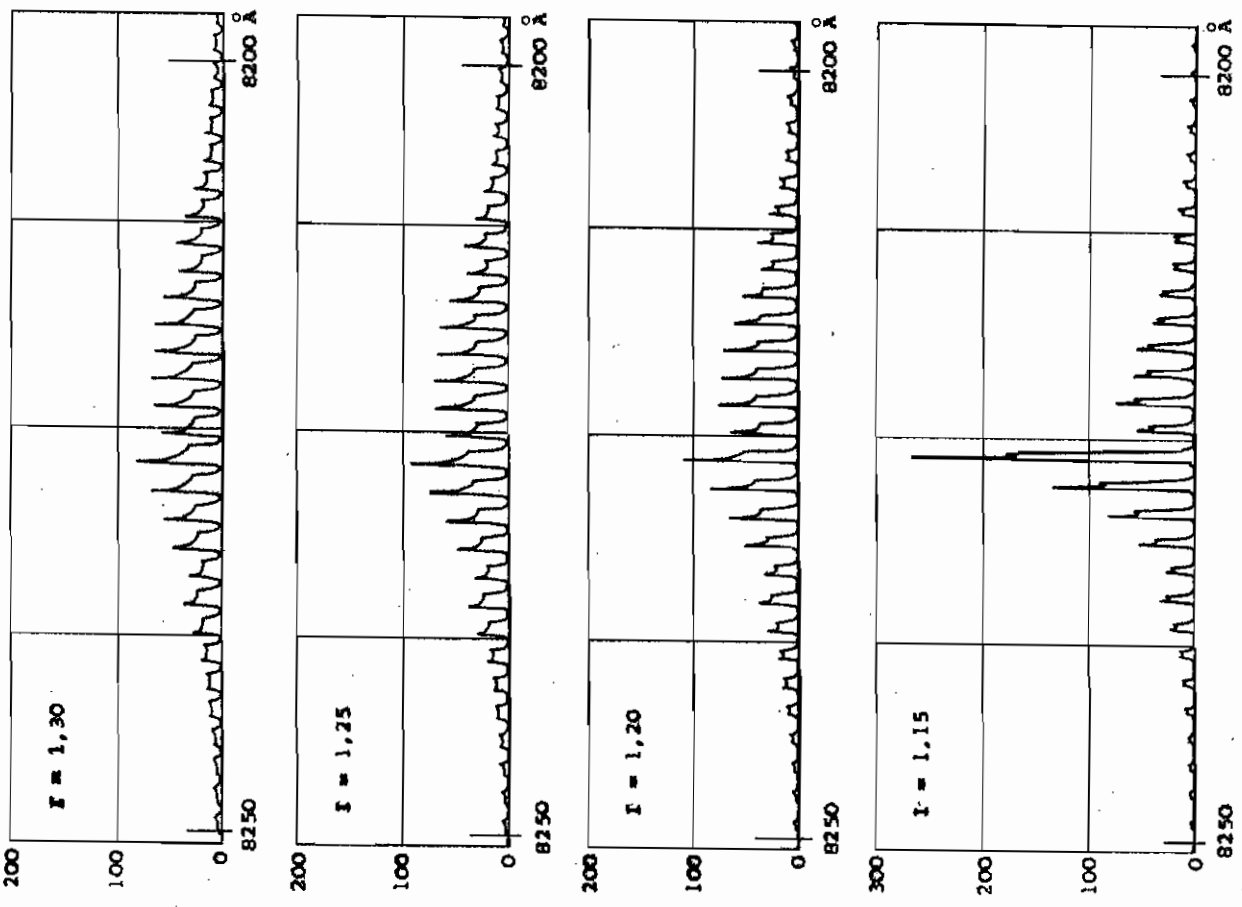
lets, meist mit lateralen Indexprofil, ausgebildet ist. Da typische Größenordnungen für die Abmessungen moderner Halbleiterschichten $D=0,1 \dots 0,5 \mu\text{m}$, $B=2 \dots 20 \mu\text{m}$, $L=100 \dots 500 \mu\text{m}$ betragen, ist der Abstrahlwinkel θ der xz -Ebene des Bildes 5-5 gemäß Gl. (3-106) wesentlich größer (min $\approx \frac{1}{D}$) als in der yz -Ebene (min $\approx \frac{1}{B}$). Diese Abstrahlungen sind unter freien und beschränkten Wellenbewegung.

Die Aussparungsspektren eines moderner arbeitenden GaAs-Lasers sind in Bild 5-11 in Abhängigkeit von der normierten Pumprate zu sehen. Erst unterhalb der Schwelle werden die gewöhnlichen Resonatormoden (nur axiale Moden sind in Bild erkennbar) gleichmäßig verstärkt. Bei Annäherung an die Schwelle nimmt der kontinuierliche Anteil spontaner Strahlung relativ zu (Gesamtleistung) und die Verstärkungsebene wird schwächer. Oberhalb der Schwelle existiert ein Bereich, in dem nur ein einzelner Resonatormodus dominiert, während bei höheren Pumpraten ein komplexes Multimodenspektrum mit überlagerten Moden häufig zu beobachten ist.

Die Temperatur hat mannigfache Auswirkungen auf das Verhalten von Halbleiterschichten. Nach Gl. (5-46) ist vor allem der Schwellstrom betroffen, der wesentlich von Temperaturgang der Koeffizienten γ_2 und γ_3 abhängt, so daß er mit der Temperatur wächst; die Fermi-Funktion gestattet dann nämlich die Besetzung höherer Zustände im Leitungsband, so daß die unteren Zustände durch eine unzureichende Strom wieder aufgefüllt werden müssen. Dies hat auch Auswirkungen auf das Spektrum der emittierten Strahlung. Ihr Intensitätsmaximum verschiebt sich zu höheren Photonenenergien, wenn der Injektionsstrom größer wird (Burstein-Moss-Verschiebung, bei Zimmertemperatur wenig ausgeprägt). Von größerer Bedeutung ist die Abnahme des Bandabstandes mit der Temperatur durch Trägerechselwirkung. Für undotiertes GaAs gilt

$$E_g(T) = 1,43 \text{ eV} - 4,7 \cdot 10^{-4} \text{ eV K}^{-1} (T - 300 \text{ K}). \quad (5-58)$$

Nach den Gl. (5-36, 37, 38) nimmt die Photonenenergie mit



spektrale Lichtleistung in relativen Einheiten

Doppel-Hetero-Struktur mit Streifenkontakt, GaAlAs
 $D = 0,5 \mu\text{m}$ $B = 17 \mu\text{m}$ $L = 400 \mu\text{m}$

Bild 3-11 CW-Spektren als Funktion des Injektionsstroms $I = i/i_M$
 Laser C3 $T = 273 \text{ K} + 20 \text{ K}$ Auflösung $\Delta\lambda = 0,1 \text{ \AA}$ $i_M = 170 \text{ mA}$

das Verstärkungsniveau $E = E_0$ entsprechend.

Der Brechungsindex n_r des Resonators ändert sich mit dem Reflexionsstrom (vgl. Gl. (3-42), Abnahme von n_r mit der Konzentration freier Ladungsträger), aber auch vor allem mit der Temperatur wegen Verschiebung der Absorptionskante E_0 (vgl. Bild 3-3, $\omega < \omega_0$ im transparenten Bereich, $\omega_0 \approx E_0(\hbar)$). Für GaAs ist

$$\frac{1}{n_r} \cdot \frac{dn_r}{dT} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \quad (5-59)$$

der lineare Temperaturkoeffizient des Brechungsindex. Der lineare Ausdehnungskoeffizient von GaAs beträgt

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{dL}{dT} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}. \quad (5-60)$$

Aus Gl. (3-151) mit $\frac{L}{\lambda} \gg \frac{b}{\lambda} \gg \frac{d}{\lambda}$ erhält man

$$\frac{1}{\lambda_e} \cdot \frac{d\lambda_e}{dT} = \frac{1}{n_r(\lambda_e)} \cdot \frac{dn_r(\lambda_e)}{dT} + \frac{1}{L} \frac{dL}{dT} \approx \frac{1}{n_r(\lambda_e)} \cdot \frac{dn_r(\lambda_e)}{dT}. \quad (5-61)$$

Für GaAs resultiert bei der Vakuumwellenlänge $\lambda_0 = 820 \text{ nm}$ eine geringere Medienverschiebung von

$$\frac{d\lambda_e}{dT} = +0,55 \text{ \AA K}^{-1}, \quad (5-62)$$

während sich das Maximum der Verstärkungswerte entsprechend

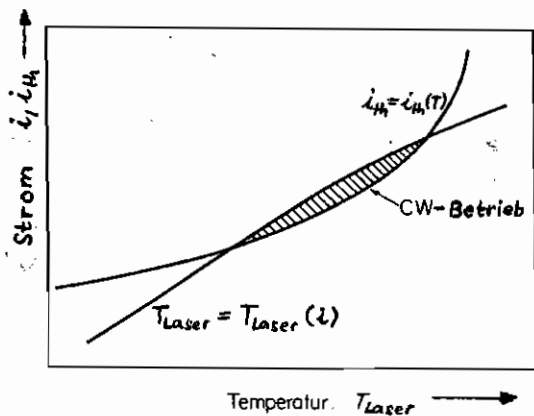
$$\frac{d\lambda_{E_0}}{dT} = +2,13 \text{ \AA K}^{-1} \quad (5-63)$$

ändert. Diese Temperaturgenauigkeit entspricht recht genau dem Temperaturkoeffizienten des Bandabstands, Gl. (5-58).

Bei der Strom-Spannungseigenschaft ist der Sättigungsstrom wegen des metallähnlichen Leitungscharakters nicht signifikant temperaturabhängig. Beim Überwiegen von Tunneleffekten im Flußbereich ist $\alpha \sim U_T$ eine Konstante bezüglich der Temperatur. Der Bahnwiderstand kann, je nach Technologie, eine negative Temperaturkoeffizienten haben.

Bei der Konstruktion von Lasern ist darauf zu achten, daß der Schwellstrom so niedrig bleibt, daß die Erwärmung

durch die Stromerhöhung auf $i > i_{th}$ nicht die Schwelle zu stark nach oben verschiebt, so daß i_{th} immer größer als i bleibt, da der Schwellstrom überproportional zu $T_{Laser} i$, Bild 5-12, wächst.



Nur im Durchschnitt der Kerne $i_{th} = i_{th}(T)$, $T_{Laser} = T_{Laser}(i)$ kann ein Dauerstrich (CW: Continuous Wave) erwartet werden.

Bild 5-12

5.1. Bauformen von Injektionslasern

Die Struktur des Bildes 5-5 wird Homo-Übergang genannt. Sie weist folgende schwerwiegenden Nachteile auf:

1. Die Breite B des Kristalle kann aus Fertigungsgründen nicht wesentlich unter $B = 50 \mu\text{m}$ reduziert werden. Die Dicke D des aktiven Zone wird durch die Diffusionslänge μ der Elektronen im p -Material bestimmt, $D \approx 3 \mu\text{m}$. Um ausreichende Verstärkung in einer Vorzugsrichtung zu haben, muß die Resonatorlänge im Bereich von $L = 400 \mu\text{m}$ sein.
2. Die elektromagnetischen Felder sind nur schlecht durch gain-guiding (Abschnitt 3.3.4.) μ pliziert, $\Gamma_m \ll 1$. Des über D ins n - bzw. p -Material hineinragende Feldanfall erleidet in diesen Gebieten sehr starke Absorptionsverluste, da dort $hf > E_g$ ist.
3. Infolgedessen ist τ in Gl. (5-46) für den Schwellstrom sowohl das Rekombinationsvolumen $V = DBL$ hoch, als auch die Photonenlebensdauer und der Konzentrationsfaktor Γ_m sehr klein. Schwellstromdichten von $\frac{i_{th}}{BL} > 100 \text{ kA cm}^{-2}$

sind die Regel, so daß allen falls bei LN_2 -Temperaturen (77K) Impulsbetrieb mit niedrigem Leistungsverhältnis möglich ist, aber kein CW-Betrieb, vgl. Bild 5-12.

Um Laser mit niedrigem Schwellstrom, also hohen externen Quantenwirkungsgrad geht, geringer thermischer Belastung und daher großer Lebensdauer herzustellen, muß der elektrische Kompositionsgang modifiziert werden: Das Rekombinationsvolumen sollte verkleinert und die Wellenführung verbessert werden. Die angrenzenden Zonen sollten verlustarm sein (Ausnahme: CSP-Laser). Um den

Herstellungprozess nicht zusätzlich zu erschweren, wird eine Verspiegelung der Resonatorspaltflächen bei $z = \pm L/2$ nicht vorgezogen, so daß die Photonenlebensdauer zps bezüglich der auskoppelten Lichtleistung aus Gl. (3-65, 66) mit Gl. (4-39) aus Bild

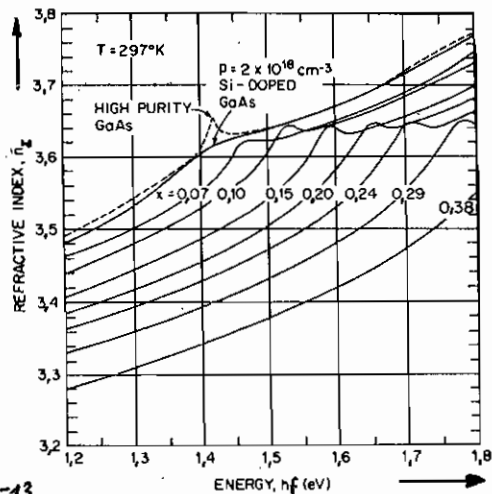


Bild 5-13
Refractive index as a function of photon energy for $Al_xGa_{1-x}As_x$. For purposes of comparison, the refractive index of high purity GaAs and Si-doped GaAs that is often used for active layers of GaAs- $Al_xGa_{1-x}As$ heterostructure lasers is also given.

5-13 berechnet werden kann als Funktion der Photonenenergie.

5.1.1. Doppel-Hetero-Laser (DH)

Bild 5-14 zeigt den (aus technologischen Gründen recht komplizierten) epitaktial gewachsenen Schichtaufbau eines DH-Lasers aus dem ternären System $Al_xGa_{1-x}As$. Bild 5-15 stellt die wesentlichen Bereiche veranschaulicht dar. In Bild 5-16 sind für verschiedene Mischungsverhältnisse des ternären Systems $AlAs$, $GaAs$, $Al_{0.5}Ga_{0.5}As$ die Bandabstände (ungefähr gleich der Photonenenergie) angetragen. Das ternäre

System der Bilder 15-14,15 ist hervorgerufen. Es fällt auf, daß sich mit wachsendem Aluminiumgehalt der Bandabstand vergrößert. Die Leiterschichten (gestrichelte Kurven) bleibt dabei nahezu

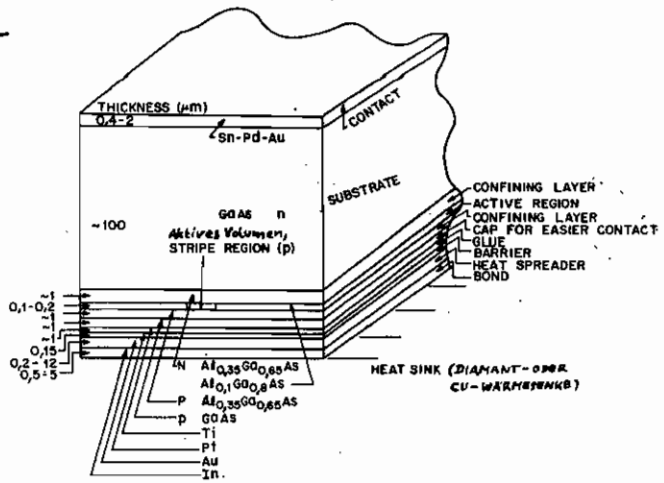


Bild 5-14 A typical CW stripe (proton bombardment isolated) laser with all associated layers, their thicknesses and functions.

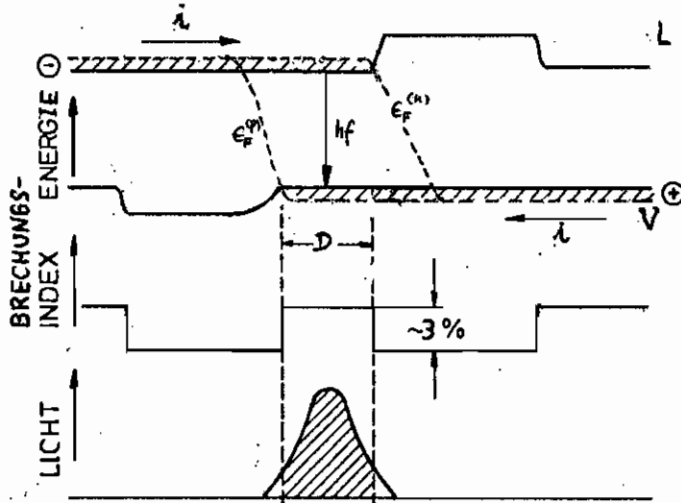


Bild 5-15

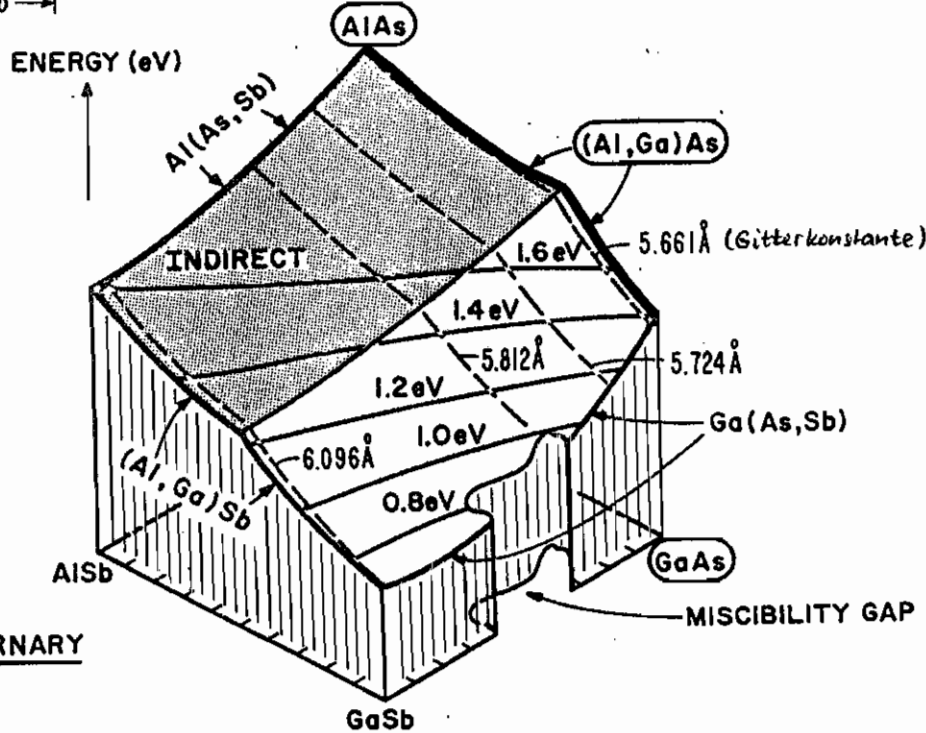
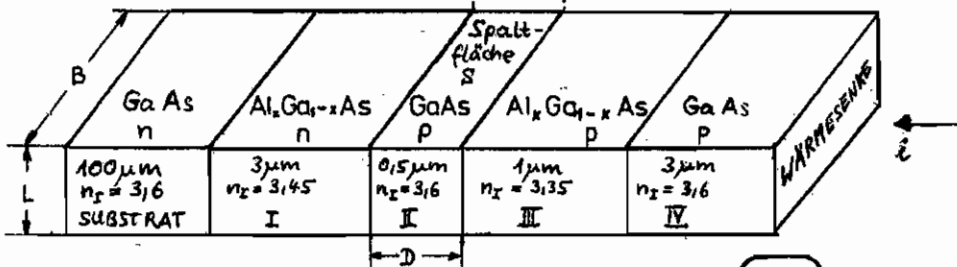


Bild 5-16

(Al,Ga)(As,Sb) QUATERNARY

OE

GaSb

konstant, was geringe Kristallbaufehler und damit höheres η_{int} sowie lange Lebensdauer garantiert. Für Photonen im transparenten Bereich der Absorptionstheorie Bild 3-3 vollkoinzident mit dem des Brechungsindex n_2 , Bild 5-15. Durch die Sprünge im Bandabstand wird für Elektronen und Löcher eine Potentialbarriere eingebaut, so daß die Dicke D der Rekombinationszone nicht durch die Diffusionslänge, sondern durch die Dicke der aufgewachsenen GaAs Zone bestimmt wird, die aus bereits genannten Gründen p-artig, aber kompariert dotiert ist. Die Breite B der

Rekombinationszone läßt sich durch andere Maßnahmen verringern, Bild 5-17. Die wichtigsten Methoden sind die Isolierung eines Bereichs mit einer Oxidmaske, die auf die Streifenbreite B geöffnet und mit aufgedampftem Metall kontaktiert wird, Bild 5-17b,

die Reduktion der Leitfähigkeit außerhalb der Streifenzone durch Beschuß mit Protonen, Bild 5-17c, und das Ätzen einer Mesa-Struktur mit anschließender Kontaktierung, Bild 5-17e. Typische Werte sind $D \approx 0,3 \mu m$, $B = 10 \mu m$, was das Rekombinationsvolumen und damit die Schwellstromdichte bereits um den Faktor 50 gegenüber einer Homostruktur auf ungefähr $2 kA/cm^2$ verringert. Zusätzlich wird durch die DH-Struktur aber auch die Wellenführung in horizontaler Richtung verbessert. Bild 5-18a zeigt für $D = 0,2 \mu m$ und verschiedene Mizelungsverhältnisse κ die Strukturfunktionen $|H|^2$ des fl. (3-95, 96) für den Grundmodus bei schwacher Führung, $\Delta \ll 1$ fl. (3-93), vgl. auch Bild 3-10. Man sieht, daß mit wachsendem Δ -Faktor wegen des kleiner werdenden Brechungsindex n_2 , Bild 5-13, in denen die RLZ auf freistehenden Flächen die Wellenführung im aktiven Volumen besser wird.

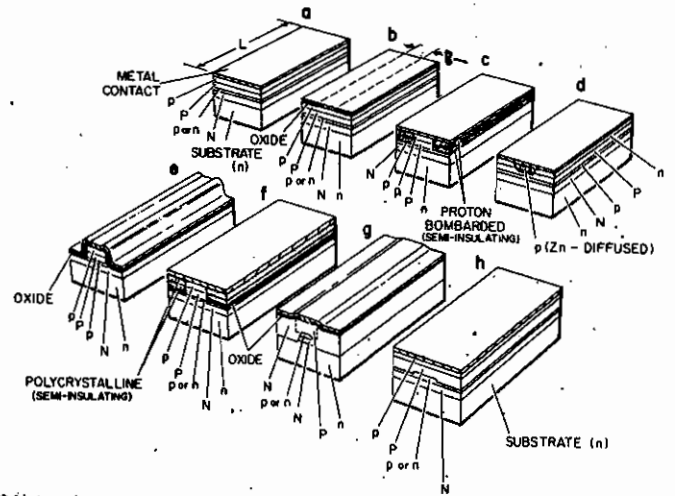


Bild 5-17 DH laser configurations. (a) Broad. (b) Stripe contact. (c) Proton bombardment (semi-insulating) stripe isolation. (d) Doping profile stripe. (e) Stripe mesa. (f) Embedded stripe. (g) Buried heterostructure. (h) Rib-guide stripe. The top p-GaAs layer shown in most cases, provides an easier contact to the metal than $Al_xGa_{1-x}As$.

Äquivalente Aussagen gelten bei Variation der Dicke für konstantes Brechungsverhältnis, Bild 5-17 b.

Bild 5-19 zeigt drei Moden des Schichtwellenleiters. Bild 5-20 gibt Werte des Konzentration

faktors Γ_{mp} , Gl. (3-98), in Abhängigkeit von der Dicke D der Rekombinationszone.

Für $D = 0,5 \mu\text{m}$ ist $\Gamma_{m0} = 0,9$ ein typischer Wert bei $x = 0,3$. Bild 5-20, 21 demonstriert, daß der Volumenverlust

gering bleibt und in Gl. (5-46) nimmt nur linear mit D ab, und

hinreichend bleibt auch Γ_{m0} nahezu konstant, ab $D = 0,5 \mu\text{m}$, jedoch nicht Γ_{m0} größer als D , so daß ein

minimales Schwellstrom, wie in Bild 2-22 zu sehen, existiert. Er liegt für $D = 0,1 \dots 0,2 \mu\text{m}$ bei

$$\frac{j_{th}}{D} = \frac{I_{th}}{DBL} = 1,5 \text{ kA cm}^{-2} \mu\text{m}^{-1}$$

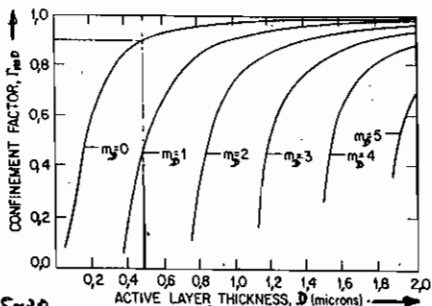


Bild 5-20 Γ_{mp} against d for the first five transverse modes at $x = 0,3$ in the $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}/\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ three-layer slab waveguide.

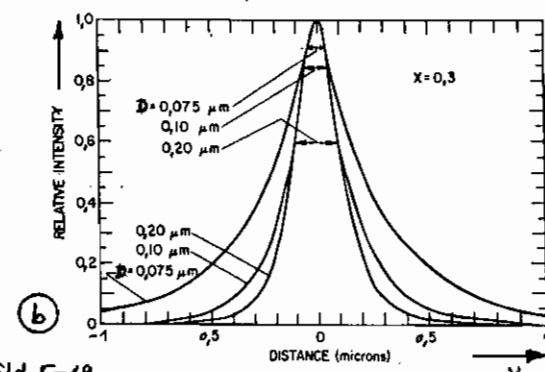
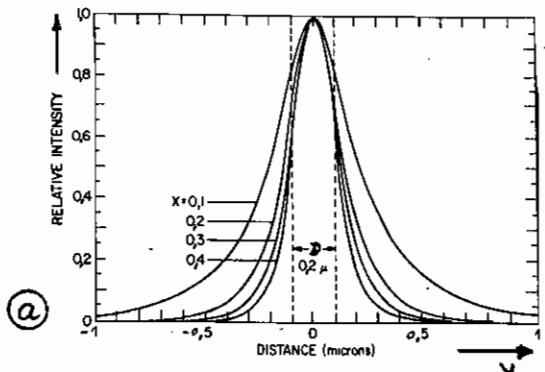


Bild 5-18 Optical electric field intensity $|E|^2$ of the fundamental mode normal to the heterojunction plane against distance for three-layer $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}/\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ slab waveguides. (a) for several values of x at $D = 0,2 \mu\text{m}$, (b) for several values of D at $x = 0,3$.

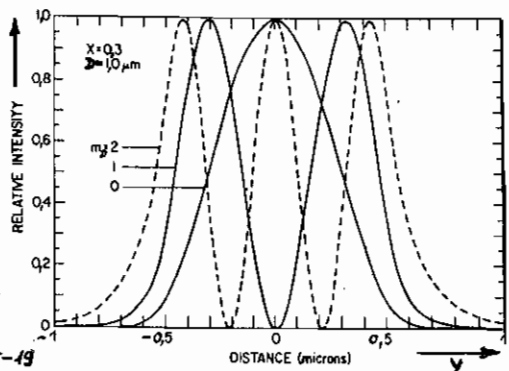


Bild 5-19 $|E|^2$ against x in a three layer $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}/\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ slab waveguide with $x = 0,3$ and $D = 1,0 \mu\text{m}$. The fundamental, first-, and second-order modes are shown.

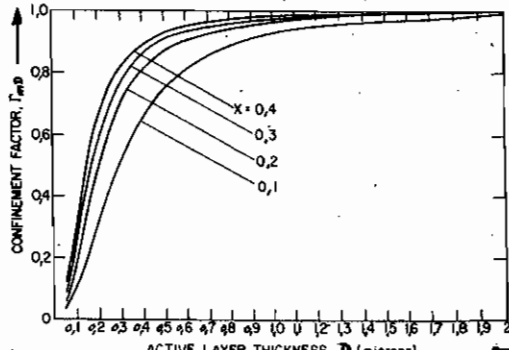


Bild 5-21 Γ_{m0} against d for the $m_0 = 0$ mode in the $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}/\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ three-layer slab waveguide for several values of x .

Bei diesen niedrigen Schwellströmen ist Dauerbetrieb leicht möglich. Die Dicke des oberen Substrats und IV darf nicht zu klein sein, damit nicht unnötig große Energie in absorbierende Schichten peripheren Bereichs fließt, Bild 5-15. Eine vom Mischarbeitsverhältnis κ abhängige Dicke von $\sim \frac{0,24}{\kappa} \mu\text{m}$ (ohne Abschaltung) soll nicht unterschritten werden, wenn $D \approx 0,1 \mu\text{m}$ ist. Typisch für solche Strukturen sind Schwellströme um 100 mA .

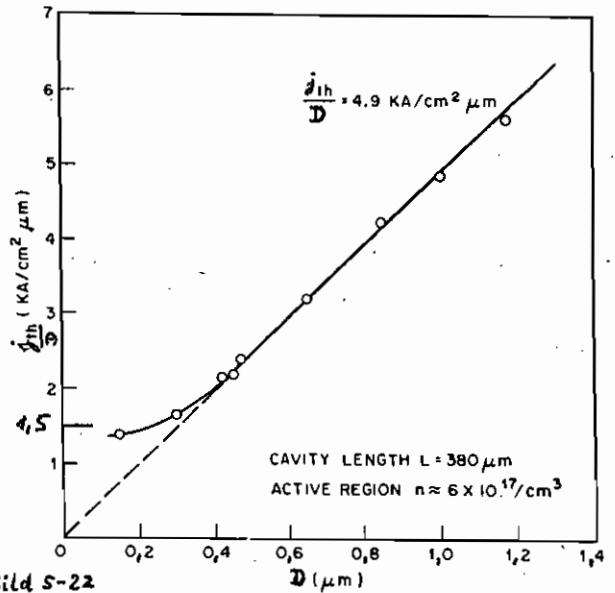


Bild 5-22 Threshold current as a function of d at room temperature for a series of similarly doped "uniform" DH lasers. Cavity length is $380 \mu\text{m}$; active region $n \approx 6 \times 10^{17}/\text{cm}^3$.

Das optische Feld ist parallel zur Sperrschichtplatte polarisiert (TE-Wellen), da für den niedrigsten transversalen Modus des Reflexionslichtes an den Spaltflächen für diese Polarisation höher ist als für TM-Wellen, Bild 3-7.

Die laterale Führung übernimmt das Verstärkungsprofil unter dem Streifenkontakt, Abschnitt 3.3.4: Die Inversion wird lateral, wenn sie verikal, ortsabhängig. Grund dafür ist die räumliche Stromverteilung, ausgehend von einem schmalen Streifen zu einer viel größeren Elektrode hin. Bei üblichen Streifenkontakten unter $20 \mu\text{m}$ Breite ist der laterale Grundmodus nur schwer einzustellen. Mit wachsendem Injektionsstrom können höhere Moden oszillieren, was das Spektrum, und, durch Energieaustausch innerhalb der lateralen Moden, das Einschiebungsverhalten und die Linearität der Lichtstromkennlinie ungewünscht beeinflusst. Bild 5-23 zeigt typische Nah- und Fernfeldcharakteristika eines "perforierten" DH-Lasers, der mit verschiedenen Streifenabständen B hergestellt wurde. Eine primitive laterale Wellenführung befreit von der Injektionsstrom-Abhängigkeit.

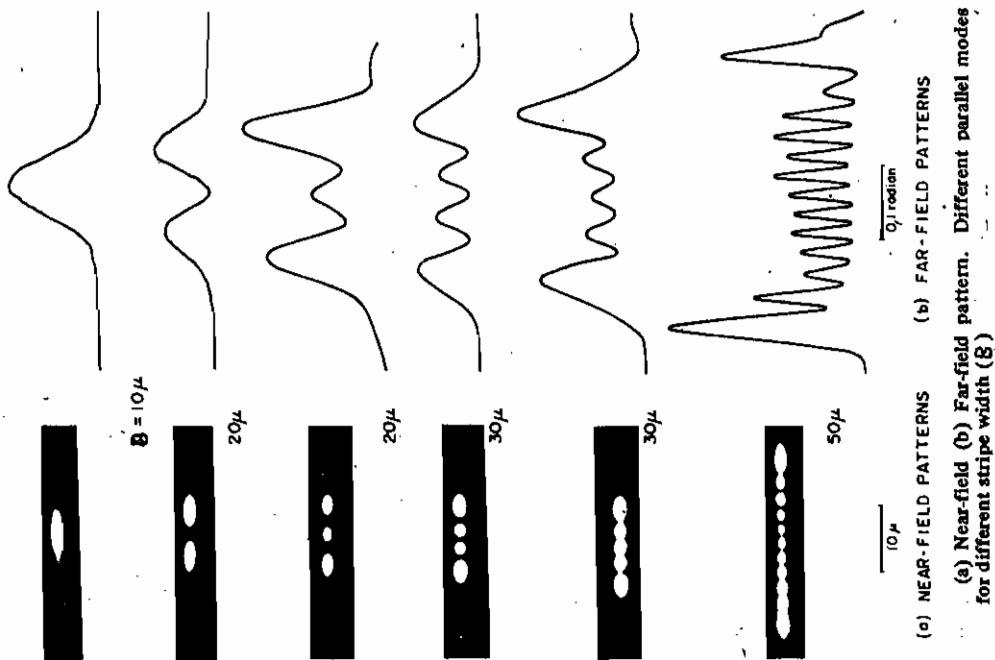


Bild 5-23

5.1.2. Sperrschicht - DH - Laser (DCC, γ S)

Beim DCC- (Double lateral injection Current Confinement) oder γ S- (Junction Stripe) - DH - Laser wird die Breite B durch die Ausbildung zweiseitiger Sperrschichten definiert begrenzt, Bild

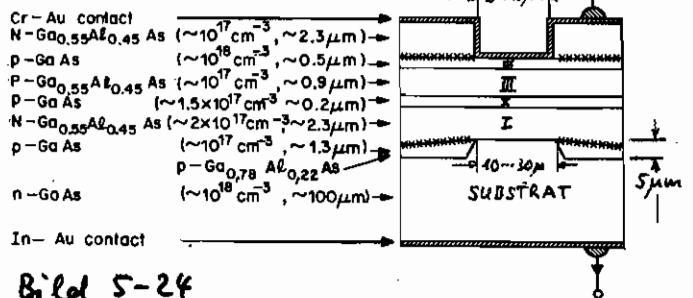


Bild 5-24

5-24. Die starke Divergenz der Stromlinien einer γ S- DH-Struktur wird dadurch vermieden, daß sowohl an der Ober-, als auch an der Unterseite der DH-Vier-Schichtenfolge von Bild 5-15 der Strom durch ein von perforierten pn-Übergängen (~~xxxxxx~~) definiertes Fenster fließen muß. Im einzelnen sieht der Schichtaufbau folgendermaßen aus: Auf ein in Mesa-Form geätztes Substrat aus n-GaAs läßt man eine p-Ga_{0,78}Al_{0,22}As-Schicht in Flüssigphasenepitaxie (LPE) aufwachsen, die sich auf der Mesa-Fläche

aus bisher umgekehrten Gründen aber nicht aufgebaut. Dann folgt die konventionelle DH-Struktur mit den Zonen I bis IV des Bildes 5-15. Zunächst läßt man eine n-Ga_{0,55}AlAs-Ao-Schicht aufwachsen, die in einem Streifen von $B = 15 \mu\text{m}$ Breite bis auf Schicht IV heruntergeätzt und mit Metall bedampft wird. Horizontal und lateral konnte bis zum Doppelpunkt des Schwellstroms der Grundmodus eingestellt werden bei einer Ausgangsleistung von 16 mW pro Spiegel. Entsprechend gut ist die Linearität der Licht-Strom-Kennlinie.

5.1.3. Buried - Hetero - Laser (BH)

Bild 5-25 zeigt den Aufbau eines BH-Lasers. Auf ein n-GaAs-Substrat läßt man im LPE-Verfahren eine DH-Struktur wie in Bild 5-15 aufwachsen, die anschließend bis auf das Substrat heruntergeätzt wird, so daß als aktive Zone ein GaAs-Neststreifen stehen bleibt. In einem zweiten LPE-Schritt

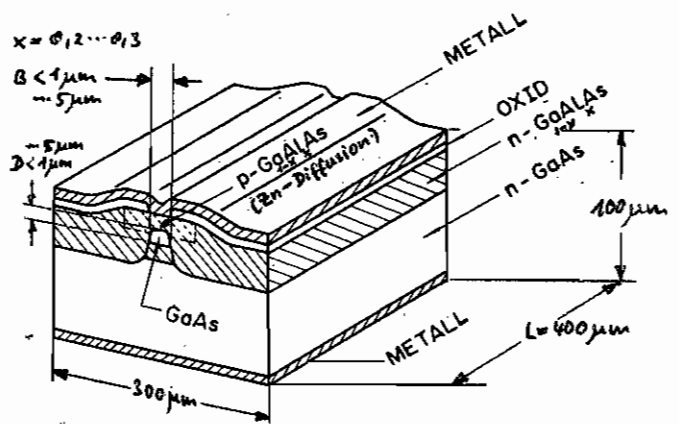


Bild 5-25

läßt man n-Al_xGa_{1-x}As zur vollständigen Einbettung der aktiven Zone aufwachsen. Die p-Zone wird durch Zink-Diffusion formiert. Da zwar GaAlAs wegen des höheren Bandabstandes eine größere Diffusionsspannung U_D aufweist als GaAs ($\Delta U_D \approx \Delta E_{g1e}$), wäre normalerweise eine Einengung des Strompfades auf dem GaAs-Bereich gegeben. Um jedoch den Schwellstrom durch temperaturabhängige parasitäre Strompfade nicht zu beeinflussen, wird in eine Oxidschicht ein Streifen geätzt, Metall aufgedampft und kontaktiert. Schwellströme von $i_k = 15 \text{ mA}$ entsprechend $\frac{i_k}{BL} = 0,75 \text{ kA cm}^{-2}$ wurden 1976 erreicht bei Ausgangsleistungen von einigen mW. Das Maßfeld zeigt für $B \approx D$ Zylinder-symmetrie mit Gaußscher Verteilung der Intensität im Grundmodus. Betrieb bis zum 10fachen Schwellstrom ist möglich, ohne daß sich das Spektrum oder

die Licht-Ström-Kennlinie unkontrolliert verändert. Das optische Feld ist wie beim DH-Laser eine TE-Welle bezogen auf die Sperrschichtebene, da die Mesa-Ätzung nicht exakt parallele Kanten des aktiven Streifens liefert. Die epitaktische Schichtstruktur in vertikaler Richtung dagegen ist so parallel wie die Netzebenen des Kristalls.

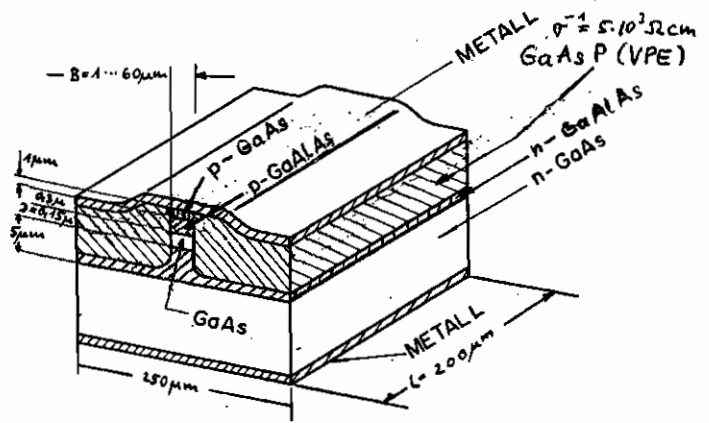
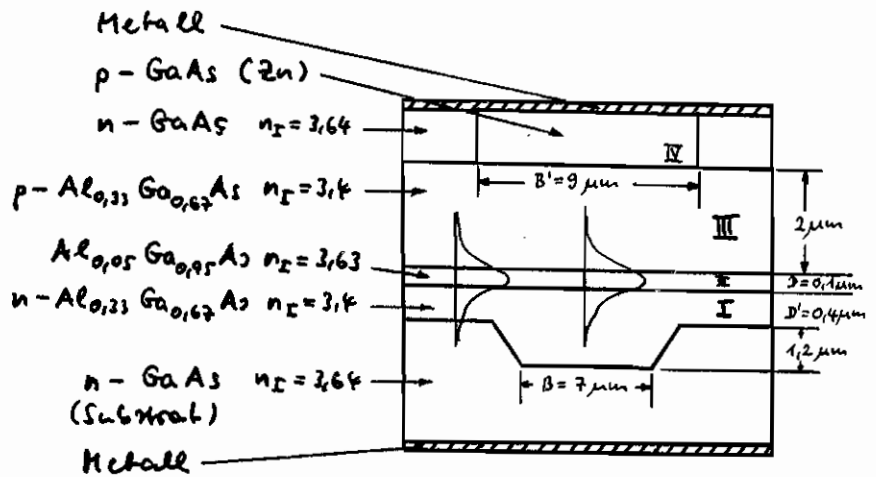


Bild 5-26

Das technologisch aufwendige Verfahren mit LPE in zwei Schritten kann vereinfacht werden, wenn statt der monokristallinen n-AlxGa_{1-x}As-Schicht des zweiten LPE-Schrittes polykristallines hochohmiges GaAs_{1-x}P_x (0,05 < x < 0,01) aus der Dampfphase (Vapor Phase Epitaxy, VPE bei 600°C) aufwächst, Bild 5-26. Die benötigte Temperatur ist niedriger als beim LPE-Verfahren (800°C) und folglich die Wahrscheinlichkeit der Wanderung von Störstellen und des Einbaus von Verunreinigungen geringer. Die Mesa-Ätzung des aktiven Streifens braucht nicht bis auf das Substrat zu reichen, da die GaAs_{1-x}P_x-Schicht auch auf n-GaAlAs aufwächst. Das aktive Volumen wird für den Strom durch die hochohmige GaAsP-Schicht eingespeist, welche durch einen niedrigeren Brechungsindex als GaAs planar die Seitenflächen eines optischen Resonators definiert. Bei Boden- und Deckflächen besitzt das die gewöhnliche DH-Struktur. Die Schwellstromdichten für B = 5 μm liegen bei $\frac{I_{th}}{BL} = 0,8 \text{ kAcm}^{-2}$ und für B = 10...20 μm wegen des besseren Konzentrationsefforts bei $\frac{I_{th}}{BL} = 0,3 \dots 0,1 \text{ kAcm}^{-2}$. Die Kontrolle des lateralen Modenspektrums ist bis zum vierten Schwellstrom parambiert. Je nach Streifenbreite nehmen Moden verschiedener lateraler Ordnung an, in vertikaler Richtung breitet sich um der Grundmodus aus, vgl. Bild 5-23. Die Endflächen bei z = ±L/2 werden wie üblich durch Spalten oder auch durch Ätzen hergestellt.

5.1.4. Channelled-Substrate-Planar-Laser (CSP)

DH- und auch DCC-Laser sind technologisch relativ einfach herzustellen und bieten große Zuverlässigkeit und Lebensdauer. Der BH-Laser hat Bild 5-27



war der Vorteil exakter Wellenführung, ist aber technologisch aufwendiger. Wegen des hohen Brechungsindexunterschieds vom Streifen zur Umgebung beim BH-Laser ist die Wellenführung stark. Für Betrieb im Grundmodus muß daher der Streifenquerschnitt klein sein. Dann ist aber eine Begrenzung der Ausgangskantung auf einige μm erforderlich, um Beschädigungen an den Spaltflächen durch zu hohe Feldstärken zu vermeiden. Man ist folglich bestrebt, die Wellenführung etwas schwächer zu machen, um der aktiven Zone einen etwas größeren Querschnitt geben zu können.

Bild 5-27 zeigt die CSP-Struktur. Ein Substrat wird durch Maschenätzung mit Rillen ("Kanälen") versehen. Darauf läßt man im LPE-Verfahren die übliche Vier-Schicht-DH-Struktur aufwachsen. Wenn Schicht I außerhalb der Rille dünn genug ist, erreicht der Ausläufer der evaneszenten Welle von Gebiet II das Substrat und erleidet dort starke Verluste, während im Rillenbereich der Schichtwellenleiter ungestört bleibt. Setzt man anschließend homogene Stromverteilung über der Rille voraus (dies wird durch ein geringfügig breiteres Gebiet IV erreicht), so ist die elektronische Verstärkung über der Rille zwar konstant, aber es ändern sich die optischen Absorptionsverluste außerhalb der Rille. Das muß durch einen komplexen Brechungsindex wie in Gl.(2-119) beschreibbar werden, so daß in Zusammenarbeit von ortsrabhängigen

Verhalten und ortsunabhängige elektronische Verstärkung ein gain-guiding-Mechanismus zustande kommt. Beim DH-Laser bewirkt die inhomogene Stromverteilung eine Wellenführung, die ortsunabhängig und daher wenig stabil ist. Beim CSP-Laser sind ortsunabhängige Verlustmechanismen für das gain-guiding verantwortlich, so daß das Modenspektrum sehr gut kontrolliert ist, vorausgesetzt, daß wegen $Q < 0$ (induktive Antiparallelität, nach Gl. (3-38) nicht der Brechungsindex mit der Trägerkonzentration) nicht die Defokussierung überwiegt. Das kann aber leicht durch die Wahl der Dicke D' und der Breite D'' im Bild 5-27 eingestellt werden.

Typische Schwelldröme liegen bei $i_m = 70 \text{ mA}$. Ausgangsleistungen bis 10 mW pro Facette sind im Dauerbetrieb erreichbar. Bis zum zweifachen Schwelldstrom fließt allein der (vertikale und horizontale) Grundmodus. Die Fernfeldstrahldivergenz liegt bei nur 8° . Die Linearität des Licht-Strom-Kennlinien ist hervorragend.

5.1.5. Transverse - Junction - Stripe - Laser (TJS)

Die bis 1979 am technologisch einladendsten realisierte Struktur mit passiver, ortsunabhängiger Wellenführung ist der TJS-Laser, Bild 5-28a. Auf ein Substrat läßt man eine gegenüber Bild 5-15 als Zone II geänderte Struktur im LPE-Verfahren aufwachsen und diffundiert Zink in die schraffierte Zone ein, so daß eine p-Schicht in einem Teil der Zone II entsteht. Weniger tief wird die doppelt schraffierte p⁺-Zone eindiffundiert. Der GaAs-Bereich ist vertikal durch GaAlAs-Schichten mit größerem Bandabstand zur Ausbildung eines Wellenleiters eingefädelt. Wegen der höheren Diffusionsspannung an der stark durchgezogenen p⁺-Grenzschicht gegenüber der p-GaAs-Diode fließt der Strom hauptsächlich vertikal in die schwarz markierte aktive Zone. Wie beim Homo-Übersetz (dort vertikal!) wird lateral die aktive Zone durch die Diffusionslänge des Trägers bestimmt, vertikal dagegen durch die DH-Struktur.

Layer	Material	Thick- ness (μm)	Carrier concentra- tion (cm^{-3})	Al content	Dopant
1st(I)	n-(GaAl)As	12	1×10^{18}	0.35	Te
2nd(II)	n-GaAs	~ 0.3	1.5×10^{18}	...	Te
3rd	n-(GaAl)As	2	1×10^{18}	0.35	Te
4th	p-(GaAl)As	2	1×10^{18}	0.35	Ge
5th	p-GaAs	1.5	1×10^{18}	...	Ge

Da aber die Diffusionslänge mit wachsendem Strom und einsetzender Stimulierter Rekombination höchstens geringfügig kleiner wird, ist auch die laterale Wellenlänge dafür. Bis zum dreifachen Schwellstrom

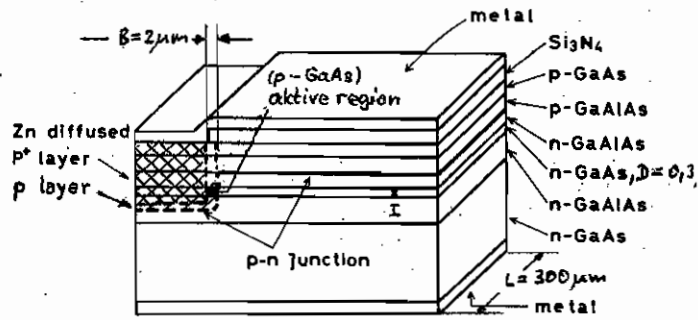
$$\frac{I_{th}}{B_{z=300\mu\text{m}}} = \frac{30 \text{ mA}}{6 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2} = 5 \text{ A cm}^{-2}$$

schwimmt nur der (vertikale und laterale) Grundmodus. Für den Homo-Übergang allein, ohne vertikale Begrenzung, würde man Schwellstromdichten von 40 A cm^{-2} erwarten.

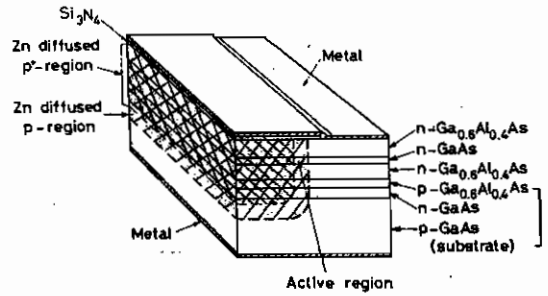
Die das Struktur des Bildes 5-28a sind zwei

Dioden unterschiedlicher Krümmung parallel geschaltet. Die eine pumpt den aktiven Homo-Übergang, die andere liefert einen nach temperaturabhängigen parasitären Strom. Dabei macht man Aufbauten wie in Bild 5-28b (Homo-Übergang) oder Bild 5-28c (Single-Hetero-Übergang, SH), bei denen der parasitäre Diodenbereich nicht in Fluss-, sondern in Sperrrichtung vorgespannt wird. Beim SH-Übergang wird zudem durch das lichtseitige $\text{Ga}_{0,6}\text{Al}_{0,4}\text{As}$ -Schicht das Diffusionsgebiet für Elektronen (siehe III in Bild 5-15) durch eine Potentialbarriere klarer definiert.

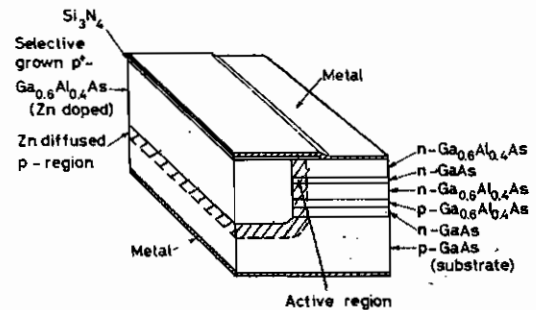
Die Halbwertsbreite des Strahlbündels beträgt bei der Anordnung des Bildes 5-28a 10° in vertikaler und lateraler Richtung. Die maximale Ausgangsleistung (Spiegelbelastung!) beträgt im Dauerbetrieb 2 mW . Dynamisch zeigt dieses Laser aus noch nicht restlos geklärten Gründen entgegen der Erwartung keine Relaxationsoszillationen.



(a)



(b)



(c)

Bild 5-28

Device structures of lateral injection lasers. (a) Former type structure. (b) Present new structure (homojunction type). (c) Present new structure (single-heterojunction type).

5.1.6. Einfluß der axialen Trägerdiffusion

Interne axiale Trägerdiffusion verhindert eine räumliche Inhomogenität der Elektronendichte in der aktiven Zone (kein spatial hole burning, vgl. Text zu Bild 4-20).
 Im Text nach Gl. (5-33) wurde beschrieben, daß für reale Laserstrukturen ein Injektionsstrombetrieb existiert, der nur einen axialen und transversalen Modus zuläßt. Ist dabei der Resonator gut definiert, d.h. gibt es in Abstrahlrichtung des Strahls keine parasitären Effekte, so läßt sich ein solches Monomode-Betrieb einstellen, das auch bei Modulation mit Bitraten über 1 Gbit/s erhalten bleibt. Strukturen mit injektionsstromunabhängiger Wellenführung sind dabei überlegen. Typische Linienbreiten sind $\Delta x = 0,1 \mu\text{m}$, vgl. Bild 5-11.

5.2. Superlumineszent - Diode (SL)

Vermeidung der optischen Rückkopplung, die für den Laserbetrieb Voraussetzung ist, macht aber die verbleibende Zone ausreichend lang, so erhält man ein SL-Diode, Bild 5-28. Der rückwärtige Teil der Struktur ist unempfindlich gegenüber dem Injektionsstrom und absorbiert. Spontane emittierte Strahlung wird im Resonatorvolumen $L \gg D \gg \lambda$ vornehmlich in z-Richtung verstrahlt, Gl. (5-30, 31), und führt zu sogenannter Superstrahlung, Anlauf, die an der vorderen Facette austreten kann. Die spektrale Breite liegt, nur wenig durch die Verstärkung eingeschränkt, bei $\Delta \lambda = 80 \text{ \AA}$ und ist 100-mal so breit wie bei guten He-Ne-Lasern. Die maximale Ausgangsleistung liegt bei 50 mW, die Stromdichte bei 10 kA cm^{-2} , $i = 2,25 \text{ A}$, so daß nur gepulster Betrieb möglich ist. Reduktion der Ausgangsleistung auf 1/10 würde Dauerbetrieb gestatten. Der SL-Bereich liegt in der Umgebung der Schwelle, Bild 5-10.

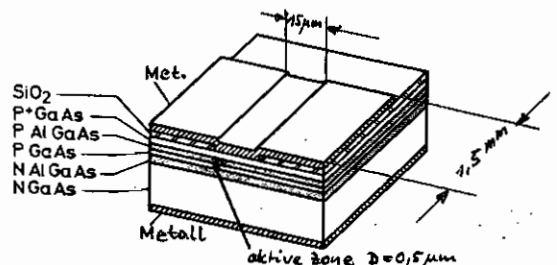


Bild 5-29 Doppelheterodiode mit Streifenkontakt für Superlumineszenz-Betrieb

5.3. Lumineszenz - Diode

Hat auch die optische Verstärkung der spektralen Strahlung keinen Einfluß mehr, wird also gemäß dem Spektrum für spontane Emission des Breits $\Delta\lambda = 300 \text{ \AA}$ für GaAs emittiert, so spricht man von Lumineszenz. Das Lumineszenz-Bereich für Laser liegt unterhalb der Schwelle in Bild 5-10, wo also die Lichtintensität dem Strom proportional ist, wenn man von Kaskaden Effekten abzieht, vgl. Gl. (4-56), $\gamma = \alpha I$.

Eine Lumineszenzdiode kann als Homo-, als SH- oder als DH-Übergang aufgebaut sein. Für Ankerlampen wird meist ein Homo-Übergang nach Bild 5-30 verwendet. Durch Totalreflexion (gestrichelter Pfeil) würde ein sehr großer Lichtanteil in der unteren des Übergangs zurückgehalten. Daher läßt man eine Halbkugel aus n+-Material abätzen, so daß Reflexion an der Kugeloberfläche mit noch in weiterem Abstand mit minimaler Reflexion erfolgt und deswegen keine Totalreflexion auftritt.

Der Transmissionsfaktor an der Medium-Luft-Grenzfläche beträgt für unpolarisierte Strahlung nach Gl. (3-65, 66)

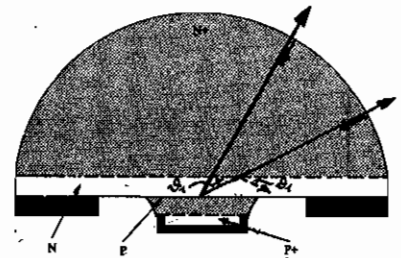


Bild 5-30
In Flüssigkeitsepitaxie hergestellter Si-dotierter GaAs-Domwafer mit konvexen Mesa-Sperrschichtseiten. Die Quantenausbeute erreicht hierbei durch das Flüssigkeits-Epitaxieverfahren, die halbkugelförmige Wafer-Konfiguration und die optimale Dimensionierung der effektiv strahlenden Fläche zur gesamten Grundfläche die bisher höchst erzielbaren Werte
 Halbleiter Metall

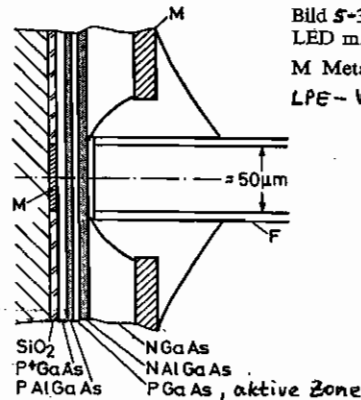


Bild 5-31. Doppelhetero-LED mit Glasfaserausgang (F)
 M Metallkontakte
 LPE-Verfahren

$$T_{\text{en}}(\vartheta_1) = 1 - \frac{R_e(\vartheta_1) + R_u(\vartheta_1)}{2} \quad (5-64)$$

Trägt man diese Funktion für $n_{\text{GaAs}} = 3,5$ über ϑ_1 auf, so sieht man, daß sie nahezu konstant ist mit $T_{\text{en}}(\vartheta_1 < \vartheta_{1c}) \approx T_{\text{en}0} = 69,1\%$ bis zum Grenzwinkel der Totalreflexion $\vartheta_{1c} = 73,4^\circ$. Danach fällt sie steil auf null

ab. Der Mittelwert $\langle T_{em}(\vartheta_1) \rangle = \frac{1}{\vartheta_{1c}} \int_0^{\vartheta_{1c}} T_{em}(\vartheta_1) d\vartheta_1$ ist ungefähr gleich $\langle T_{em} \rangle = 66,5\%$.

Bild 5-31 zeigt einen DM-Aufbau vom Burrus-Typ (so heißt der Erfinder). Das runde Metallblech in der SiO_2 - (= Quarz)-Zone begrenzt das strahlende Volumen, um das eine Lichtleitfaser sehr dicht herangeführt werden kann. Das ist wichtig, weil spontane Strahlung nicht gerichtet wie Laserstrahlung emittiert wird, und somit bei größerer Entfernung der Fasereingangsfläche ein weitaus größerer Teil der Leistung ungenutzt bliebe. Die Faser erlegt nur die Strahlung, die in ihre numerische Apertur hineinläuft, vgl. Gl. (3-80) für einen Schichtwellenleiter.

Die elektronische Modulationsfähigkeit wird in jedem Falle durch die große Diffusionskapazität auf $f < 100 \text{ MHz}$ beschränkt.

5.4. Ausblick

Die Photonstatistik von stimulierte Strahlung (Poisson-Verteilung, Schrottrausen) unterscheidet sich von der statistisch spontanen Strahlung (Bose-Einstein, stärkere Schwankungen) beträchtlich. Moduliert man daher Laserlicht, so kann die Modulationsbandbreite wesentlich größer sein als die Linienbreite $\Delta\lambda = 0,1 \text{ \AA}$ (Modulation kodiert im Frequenzbereich). Moduliert man dagegen

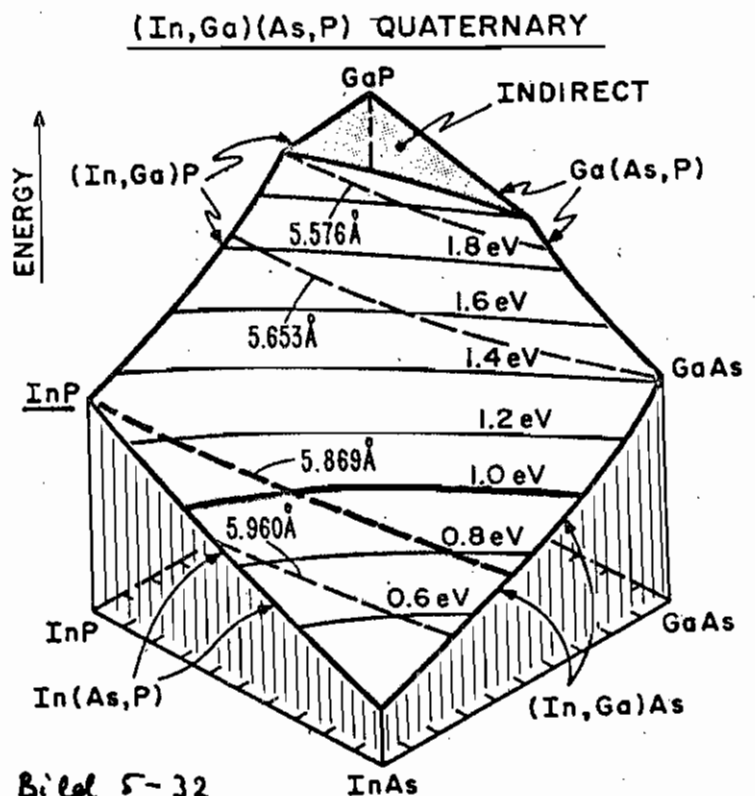


Bild 5-32

Lumineszenz- oder Superstrahlung, so man (ohne Ableitung) die Modulationsbandbreite wesentlich kleiner sein als die Linienbreite $\Delta\lambda = 300 \text{ \AA}$ sein. Bei 820 nm Wellenlänge wird dann $\Delta f = \Delta\lambda c / \lambda^2 = 13,8 \text{ THz}$, so daß, ausserdem von Einfluß der Diffusionskapazität, aus diesen fundamentalen Grundmodulationsraten über 10 GHz nicht erreicht werden können. Betrachtliche Schwierigkeiten herrschen auch die Einkopplung von Lumineszenz-Strahlung in eine Glasfaser, so daß die Vorteile des Halbleiterschemas, nämlich schnell modifizierbare rauscharme Strahlung, weit überwiegen. Mit dem Aufbau von Laser verbundene technologische Probleme sind für GaAs-Schichten bereits gelöst. Lebensdauern von 10^5 h können erwartet werden.

Die heute üblichen GaAs-Laser-Systeme emittieren mit Wellenlängen von $900 \dots 900 \text{ nm}$. Für häufige Anwendungen sind die Bereiche um $1,3 \mu\text{m}$ bis $1,5 \mu\text{m}$ von großem Interesse, da dort die Dämpfung der Glasfasern minimal ist ($0,2 \text{ dB/km}$ wurden 1979 erreicht bei $1,5 \mu\text{m}$!) In diesem Bereich werden auch Laser-Systeme wie in Bild 5-16,32 verwendet werden. Bei diesen Leistungen kann sowohl der Bandabstand, als auch die passende Filterkonstante gewählt werden.

6. Optoelektronische Empfänger

Optoelektronische Empfänger setzen Lichtenergie in elektrische Ausgangssignale um. Bild 6-1 zeigt eine Übersicht der wichtigsten Photoempfänger. Thermische und pneumatische Empfänger nehmen wegen ihrer Trägheit eine Sonderstellung ein. Sie unterscheiden sich

nicht im Prinzip; bei beiden Systemen wird die Erwärmung durch die absorbierte Lichtleistung registriert, beim Golay-Detektor

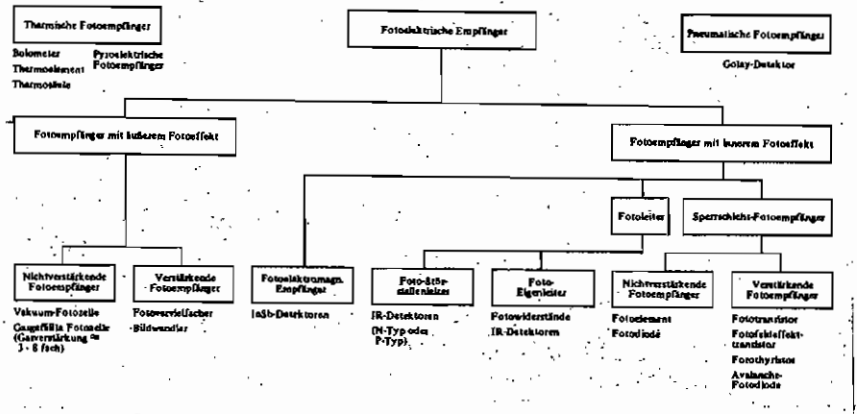


Bild 6-1

die Ausdehnung eines Festkörpers (Empfindlichkeit $0,1 \text{ nW}$, Zeitkonstante 10 ms), bei Bolometern eine Widerstandsänderung und beim Thermoelement die Thermospannung. Der pyroelektrische Empfänger besteht aus einem Elektroreten (in Analogie zum Pyroelektron ein permanent polarisiertes Dielektrikum), z. B. Turmalin oder Quarz. Das resultierende Dipolmoment fällt mit der polaren Kristallachse zusammen. Erwärmt man einen solchen Kristall, so deformiert er sich mechanisch. Sein Dipolmoment und damit die außen meßbare Spannung ändert sich. In Wirklichkeit liegt also ein piezoelektrischer Effekt zu Grunde. Obwohl mit besonderen Konstruktionen zur Verringerung der Wärmekapazität bei Thermoelementen geringe Empfindlichkeit ($5 \cdot 10^{-4} \text{ V/W}$ statt $5 \dots 25 \text{ V/W}$) Anstiegszeiten von 15 ns und bei pyroelektrischen Detektoren Anstiegszeiten ebenfalls im Nanosekundenbereich realisiert werden können (Empfindlichkeit $10^{-5} \dots 10^{-4} \text{ A/W}$), liegt die eigentliche Stärke dieser Empfänger in ihrer Brauchbarkeit über einen sehr weiten Wellenlängenbereich der optischen Strahlung, nämlich vom IR-A bis in den Kurzwellenbereich hinein.

Photoelektrische Empfänger nutzen den äußeren oder inneren Photoeffekt. Beim äußeren Photoeffekt überwinden Elek-

trouen einer Photokathode unter Absorption von Photonen ausreichender Energie das Austrittspotential und verlassen die Photokathode, um entweder im Vakuum, oder in einer Argon - Gasfüllung (für Sekundärelektronenvervielfachung, Verstärkung $M=3 \dots 8$, nichtlineare Kennlinie) zur Anode zu wandern. Die Sekundärelektronenvervielfachung wird häufiger und besser im Vakuum mit kaskadierten Hilfselektroden (Dynoden) gemacht, aus denen ein aufprallendes Elektron Sekundärträger losreißt. Mit 9...14 Dynoden werden Stromverstärkungen von $M=10^4 \dots 10^7$ erreicht bei Detektionsbandbreiten bis 100 MHz (in speziellen aufwendigen Anordnungen mit gekrümmten elektrischen und magnetischen Feldern reicht die Bandbreite bei einer Verstärkung bis 10^5 über 6 GHz, Anstiegszeit 60 ps). Einfache Vakuumphotodioden sind bis zu Anstiegszeiten von 100 ps herab kommerziell erhältlich.

Beim inneren Photoeffekt entstehen in einem Halbleiter durch Bestrahlung mit Licht freie Ladungsträger (minimale Absorption). Der Photoeffekt, auch Photowiderstand genannt, ist eine homogene Probe, deren Leitfähigkeit durch die Lichtleistung geändert wird. Man unterscheidet, je nachdem ob Photonen durch Anheben von Elektronen aus dem Valenz- ins Leitungsband Elektron - Loch - Paare erzeugen, oder ob Donatoren bzw. Akzeptoren ionisiert werden, zwischen Eigen- und Störstellenphotoleitung. Hohe Stromverstärkung ist möglich.

Photo - Elektro - Magnetische Detektoren (PEM) haben eine Sonderstellung. Nicht bei ihnen die Wellenlänge der einfallenden Strahlung gibt innerhalb der Intrinsic - Absorptionskante des Halbleiters, wie z.B. bei InSb mit 0,18 eV Bandabstand bei Wellenlängen von 1...7,2 μm , dann wird die Absorption nur in einer dünnen Randschicht stattfinden. Die dort entstandenen Träger diffundieren in der Richtung des einfallenden Lichtes. Ein transversales Magnetfeld trennt Elektronen und Löcher und lenkt die Träger sowohl senkrecht zum einfallenden Licht als auch senkrecht zum Magnetfeld ab, so daß an den Schmalreifen der röhrenförmigen Probe ein Kurzschlussstrom abgenommen werden kann, bzw. bei Leerlauf der Probe eine Spannung meßbar wird. Obwohl der Strom im Amperbereich dann Null ist, fließt natürlich in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld ein

den Oberflächen des absorbierenden Plättchens ein Kristallstrom von Elektronen und Löchern.

Sperrschichtphotoempfindungen mit einem pn- oder Schottky-Übergang haben die weitaus größte Bedeutung gewonnen. Werden interne Verstärkungsmechanismen wie beim Phototransistor oder der Lawinaphotodiode ausgenutzt, so lassen sich wesentliche Empfindlichkeitssteigerungen erzielen.

Bild 6-2 gibt einen Überblick über geeignete Detektormaterialien für verschiedene Halbleitersender.

Wegen des für GaAs-Sender günstigen Absorptionsbereichs und der fortgeschrittenen

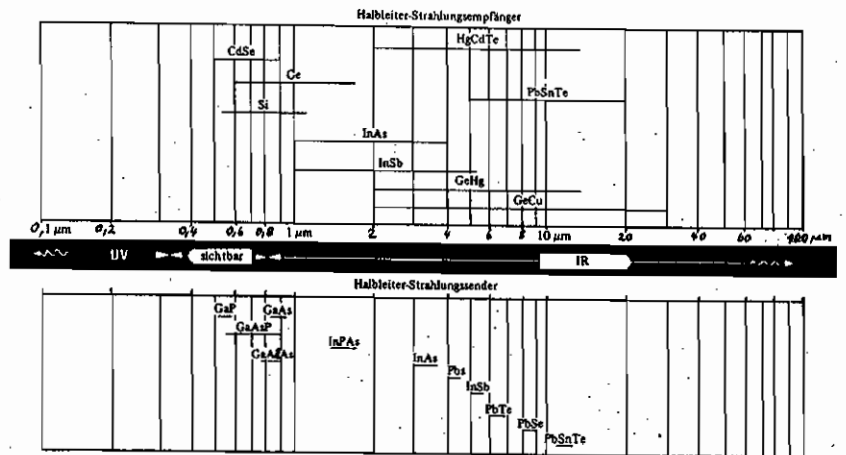


Bild 6-2

Technologie haben

derzeit die Empfänger die weitaus größte Bedeutung. Sollen die optische Nachrichtentechnik auch die längerwelligeren Bereiche zwischen 1...1,5 μm erschlossen werden, so kann dies mit nur Ge eingesetzt werden, das allerdings Nachteile wie hoher Dunkelstrom und starkes Leuzin rauschen aufweist.

Absorption bei indirekten Halbleitern wie z.B. Si, Bild 2-11, erfolgt unter Beteiligung von absorbierten oder emittierten Zwischenschallphononen, die zwar niedrige Energiebeiträge liefern bzw. entziehen, aber hohe Kristallimpulse beitragen.

Die Energieskala werde wie in Bild 5-4 von unten nach oben des Leitungsbandes aus positiv gezählt. Da Phononen beteiligt sind, lautet die Bedingung der Energieerhaltung $E_e = E_f \mp E_{\text{phon}} + E_0$, wobei das obere Vorzeichen für Emission, das untere für Absorption eines Phonons gilt. Der Impuls des beteiligten Ladepaars läßt offenbar nicht erhalten. Schreibt man dem entsprechend in Gl. (5-39) $E \rightarrow E \mp E_{\text{phon}}$, so gilt bei $T = 0$ die Proportionalität

$$B_{vL}(E) \sim [E - (E_G \pm E_{phon})]^2 \quad (6-1)$$

Da Phononen der Dichte $N_{phon} = [\exp \frac{E_{phon}}{kT} - 1]^{-1}$ beteiligt sind, gilt für den Leitungsabsorptionskoeffizienten α , vgl. Gl. (3-16),

$$\alpha(E) \sim N_{phon} [E - (E_G - E_{phon})]^2 + (N_{phon} + 1) [E - (E_G + E_{phon})]^2 \quad (6-2)$$

Der erste Term ist null für $E < E_G - E_{phon}$ und gibt den Anteil bei Absorption eines Phonons an, der zweite Term ist null für $E < E_G + E_{phon}$ und gibt den Anteil der Übergangswahrscheinlichkeit bei Emission eines Phonons an, da N_{phon} die Absorptions-, $(N_{phon} + 1)$ die Emissionswahrscheinlichkeit für Phononen der Energie E_{phon} bei der Temperatur T ist. $\alpha(E)$ ist wegen $B_{vL}(E) = B_{vL}(E, T)$ der Gl. (5-38) und vor allem wegen des Temperaturgangs von N_{phon} exponentiell temperaturabhängig. Wegen der Beteiligung von Phononen verläuft die Absorption für Si nicht so abrupt ein wie für den direkten Halbleiter GaAs, Bild 6-3.

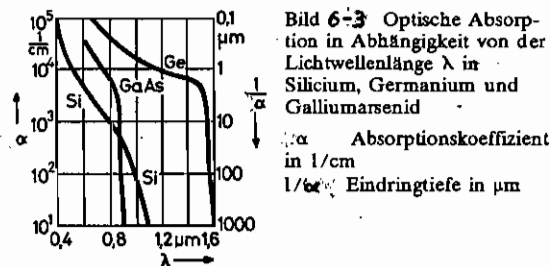


Bild 6-3 Optische Absorption in Abhängigkeit von der Lichtwellenlänge λ in Silicium, Germanium und Galliumarsenid
 α : Absorptionskoeffizient in $1/cm$
 $1/\alpha$: Eindringtiefe in μm

6.1. Photodiode

Beim nichtangetasteten dotierten Halbleiter ($n < N_{BL}, p < N_{BV}$) liegen die Fermi-Energien in der Bandlücke zwischen Valenz- und Leitungsband. Beim Kontaktieren des p- und des n-Bereiches, die sich zunächst auf gleichem Potential befinden, ziehen Elektronen des n-

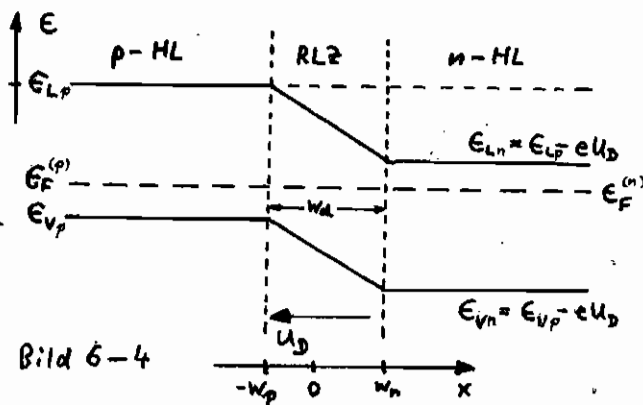


Bild 6-4

Halbleiters unbesetzte Plätze im p-Halbleiter, Lücken des p-Halbleiters dagegen unbesetzte Plätze im n-Halbleiter und Diffundieren unter Hinterlassung ortsfester Raumladungen in das jeweils andere Material. Die ortsfeste Raumladung macht das Potential des n-Halbleiters positiver und senkt infolgedessen die Elektronenenergie um $-eU_0$ ab, solange, bis die Fermi-Energie beider Materialien sich auf ein gleiches Niveau eingestellt hat und damit thermodynamisches Gleichgewicht erreicht ist. Der Diffusionsstrom wird kompensiert durch den Feldstrom, verursacht durch die Diffusionspannung U_0 , Bild 6-4. Wird eine Flusspannung $U > 0$ angelegt, so verkleinert sich die Spannung der Raumladungzone (RLZ) auf $U_0 - U$. Die Quarifermienergie $E_F^{(n)}$ für Elektronen wird um gerade eU positiver, die Potentialbarriere wird kleiner und der Diffusionsstrom wächst. Bei Anlegen einer Sperrspannung, $U < 0$ vergrößert sich die Spannung der RLZ auf $U_0 + |U|$. Die RLZ wird breiter, $E_F^{(n)}$ wird um $e|U|$ negativer, die Potentialbarriere wächst und der Diffusionsstrom verschwindet.

Für die RLZ der Breite $w_a = w_n + w_p$ sei vorausgesetzt, daß in ihr keine Rekombination stattfindet, wohl aber eine thermische und optische Generation. Die so erzeugten Ladungsträger driften im starren Feld der RLZ nach $x = -w_p$ (Elektronen) bzw. $x = w_n$ (Löcher) und tragen dort als Majoritätsträger Feldströme zu dem in der Diffusionszone thermisch und photoelektrisch erzeugten Totstrom bei. Den stationären Gesamtstrom kann man unter Vernachlässigung des Feldstroms von Minoritätsträgern an der RLZ (sehr klein gegen den Diffusionsanteil, keine Hochstrominjektion) ausdrücken durch die Summe von Diffusionsstrom an den Rändern der RLZ und aus der RLZ austretendem Photostrom.

Die Kontinuitätsgleichungen für Löcher des n-Halbleiters und Elektronen des p-Halbleiters lauten

$$\frac{\partial(-en)}{\partial t} = -\text{div} \vec{J}_n - e(g-r) - e g_{ph} = \frac{1}{v_n} \frac{\partial \eta_n}{\partial t}, \quad (6-3)$$

$$\frac{\partial(ep)}{\partial t} = -\text{div} \vec{J}_p + e(g-r) + e g_{ph} = -\frac{1}{v_p} \frac{\partial \eta_p}{\partial t}.$$

Dabei ist e die Elementarladung, n und p sind die Konzentrationen von Elektronen und Löchern, J_n und J_p die zugehörigen

rigen Stromdichten mit den Beträgen J_n, J_p, v_n, v_p sind die Beträge der Sättigungsdriftgeschwindigkeiten, die, wie die Ströme, in x-Richtung positiv gerichtet werden, g und r sind thermische Generation- und Rekombinationsraten und g_{ph}, g_{phD} ist die optische Generationsrate [$\text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}$] in RL- und Diffusionszone,

$$g_{ph} = \eta \cdot \frac{P}{V h f} = g_{phD}, \quad (6-4)$$

$V = w \cdot A$ ist das betrachtete Volumen des Querschnitts A , η der Quantenwirkungsgrad, P die auf die Diode treffende Lichtleistung und $h f$ die Photonenenergie. Der Rekombinationskoeffizient ist nach Gl. (5-9, 41) den Trägerkonzentrationen proportional, der Generationskoeffizient dagegen den Gleichgewichtsdichten n_0, p_0 und n_p, p_p im n- und p-Halbleiter,

$$r = r' n p \quad g = r' n_p p_p = r' n n_p = r' n_i^2, \quad (6-5)$$

so daß im thermischen Gleichgewicht $r = g$ erfüllt ist. Da die Majoritätsträgerdichte durch Injektion über die RLZ und durch Photo-generation nur wenig vergrößert werden soll, kann man die Klammerausdrücke in Gl. (6-3) vereinfacht mit Gl. (6-5) schreiben

$$\begin{aligned} g - r &= r' p_p (n_p - n \frac{p}{p_p}) \approx r' p_p (n_p - n) = - \frac{n - n_p}{\tau_n}, \\ g - r &= r' n_n (p_n - p \frac{n}{n_n}) \approx r' n_n (p_n - p) = - \frac{p - p_n}{\tau_p}, \end{aligned} \quad (6-6)$$

wobei die mittleren Minoritätsträgerlebensdauern

$$\tau_n = \frac{1}{r' p_p}, \quad \tau_p = \frac{1}{r' n_n} \quad (6-7)$$

zur Abkürzung eingeführt wurden. An den Grenzen der RLZ liegen voraussetzungsgemäß reine Diffusionsströme der Minoritätsträger vor, also gilt im Eindimensionalen

$$J_n = J_{nD} = e D_n \left. \frac{\partial n}{\partial x} \right|_{x=-w_p}, \quad J_p = J_{pD} = -e D_p \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=w_n}, \quad (6-8)$$

wobei die Diffusionskoeffizienten bzw. Diffusionslänge $\sqrt{D_n \tau_n} = L_n$, $\sqrt{D_p \tau_p} = L_p$ eingeführt wurden. Im stationären Fall $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ wird dann aus Gl. (6-3)

$$\begin{aligned} 0 &= -D_n \frac{\partial n}{\partial x^2} + \frac{n-n_p}{\tau_n} - g_{ph}, \\ 0 &= D_p \frac{\partial p}{\partial x^2} - \frac{p-p_n}{\tau_p} + g_{ph}. \end{aligned} \quad (6-9)$$

Hierfür gelten die Randbedingungen

$$\left. \frac{\partial n}{\partial x} \right|_{x=-\infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=\infty} = 0 \quad (6-10)$$

und die Beziehung der Gl. (5-50). Als Lösung erhält man beispiel

$$\begin{aligned} n-n_p &= [n_p (e^{\frac{u}{U_T}} - 1) - \tau_n g_{ph}] e^{\frac{x+u_p}{L_n}} + \tau_n g_{ph}, \\ p-p_n &= [p_n (e^{\frac{u}{U_T}} - 1) - \tau_p g_{ph}] e^{-\frac{x-u_n}{L_p}} + \tau_p g_{ph}. \end{aligned} \quad (6-11)$$

Der Gesamtstrom i ist die Summe von Löcher- und Elektronenstrom nach Gl. (6-8) mit Gl. (6-11) an den Grenzen des RLZ und dem in der RLZ optisch generierten Strom $-eA W_d g_{ph}$, nämlich

$$i = I_s (e^{\frac{u}{U_T}} - 1) - eA(L_n + L_p) g_{ph} - eA W_d g_{ph}. \quad (6-12)$$

I_s ist der Sättigungsstrom,

$$I_s = eA(L_n + L_p) r' n_i^2, \quad (6-13)$$

und i_{ph} des Photostrom, der proportional der Lichtleistung P ,

$$i_{ph} = \eta \frac{eP}{hf} \left(\frac{L_p + L_n}{w} + \frac{W_d}{w} \right), \quad (6-14)$$

so daß die Kennlinien-Gleichung

$$i = I_s (e^{\frac{u}{U_T}} - 1) - i_{ph}$$

gilt. Als Dunkelstrom wird der Anteil $i_D = i(i_{ph}=0)$ bezeichnet. Berücksichtigt man die bisher vernachlässigte Rekombination in der RLZ, Gl. (5-47), so erhält man mit $I_{sRLZ} \approx 10 \cdot I_s$

$$i = I_s (e^{\frac{u}{U_T}} - 1) + I_{sRLZ} (e^{\frac{u}{2U_T}} - 1) - i_{ph}. \quad (6-15)$$

Der Dunkelstrom I_D

$$I_D = -I_s \left(e^{\frac{u}{U_T}} - 1 \right) - I_{SRZ} \left(e^{\frac{u}{2U_T}} - 1 \right) \quad (6-16)$$

gültig für hohe Sperrspannungen nicht, da für einen asymptotischen Übergang die Breite des RLZ

$$w_d = w_0 \sqrt{1 - \frac{u}{U_0}} \quad , \quad w_0 = \sqrt{\frac{2 \epsilon U_0}{e} \left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \right)} \quad (6-17)$$

von der Spannung u abhängt und folglich für große Sperrspannungen gilt $I_D \approx -I_{SRZ} \sim \sqrt{\frac{|u|}{U_0}}$, weil also das Volumen des RLZ, in dem nunmehr thermische Generation berücksichtigt wird, mit der Sperrspannung wächst.

Bild 6-5 zeigt die Strom-Spannungskennlinie bei gleichem Inkrement ΔP der Lichtleistung. Zwei Betriebsweisen einer Photodiode sind gezeichnet, während der Betrieb mit einer Sperrspannung im dritten Quadranten (Diodebetrieb, photoconductive device, PC) oder ohne Sperrspannung im vierten Quadranten als Solarzelle (Photoelement, photovoltaic device, PV). Beim PC-Betrieb ist der Kurzschlussstrom exakt proportional der Lichtleistung gemäß Gl. (6-14). Spielt wegen des hohen Innenwiderstandes der Photodiode im PC-Betrieb die Näherung der Sperrkennlinie noch keine Rolle, and bei einem Lastwiderstand ungleich null entsprechend eines nicht vertikalen Arbeitsgraden A_1 , so gilt diese Proportionalität nach wie vor. Im PV-Betrieb haben Strom und Spannung an der Diode entgegengesetztes Vorzeichen. Sie gibt daher Leistung ab. Damit der Zusammenhang zwischen Laststrom $i_L = -i$, $|i_L| < |i_{ph}|$ bzw. Lastspannung $u_L = R_L i_L$ und Photostrom nur bis auf den relativen Fehler $\epsilon = \frac{i_{phmax} - i_{Lmax}}{i_{phmax}} \ll 1$

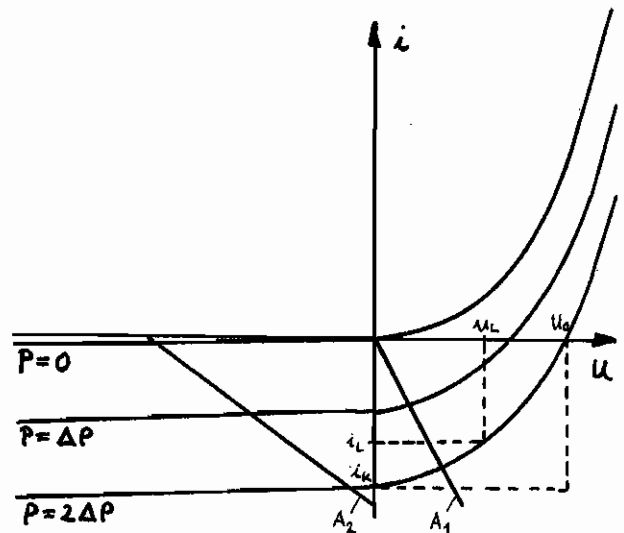


Bild 6-5

von einer linearen Beziehung abweicht, darf der Photostrom den Maximalwert

$$i_{phmax} \approx \frac{U_T}{R_b + R_L} \ln \frac{\varepsilon i_{phmax}}{I_0} \approx \frac{U_T}{R_b + R_L} \ln \frac{\varepsilon R_{io}}{R_b + R_L} \quad (6-18)$$

nicht überschreiten. $R_{io} = U_T / I_0$ ist die Steigung der $U-i$ -Kennlinie für $U=0, i=0, -U_L/R_L = -i_L = i \approx I_0 \exp(\frac{U-R_b}{U_T}) - i_{ph}$.

R_b steht für einen bisher nicht berücksichtigten Bahnwiderstand der Diode, R_p für einen parasitären Parallelwiderstand und R_L für den Lastwiderstand.

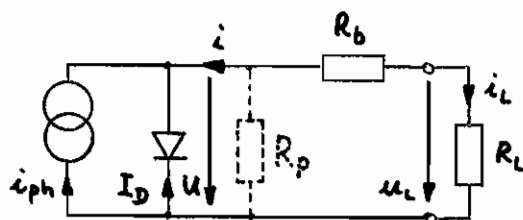


Bild 6-6

In Gl. (6-18) wurde $R_p = \infty$, $U + R_b i_L \approx i_{ph} (R_L + R_b)$ gesetzt und in dem Logarithmus der transzendenten Gleichung die ungenaue Näherung $\ln \frac{\varepsilon i_{phmax}}{I_0} = 1$ zur Lösung der Gleichung in erster Näherung eingesetzt. Bild 6-6 zeigt die Ersatzschaltung einer Photodiode im PV-Betrieb. Zur Beschreibung des PC-Betriebs müsste noch eine Spannungsquelle in Serie zum Lastwiderstand geschaltet werden.

Betrachtet man ein Photoelement im Leerlauf, $R_L = \infty, i=0$, so gilt nach Gl. (6-15), daß der Photostrom gleich dem Dunkelstrom sein muß. Für ausreichend hohe Photostrome (keine Rekombination und keine Ladungsgeneration in der RLZ berücksichtigt, $I_{sRLZ} = 0$ bzw. $U \gg U_T$) erhält man dann die Leerlaufspannung

$$U_0 = U_T \ln \left(\frac{i_{ph}}{I_0} + 1 \right) \approx \begin{cases} \text{gl. (6-13,5), (5-9)} \\ I_0 = I_0 e^{-\frac{U_0}{U_T}}, i_{ph} \gg I_0 \\ i_{ph} < I_0 \end{cases} \approx \frac{E_g}{e} - U_T \ln \frac{I_0}{i_{ph}}, \quad (6-19)$$

also einen spezifischen Zusammenhang mit dem Photostrom. Physikalisch ist das folgendermaßen zu interpretieren: Im Leerlauf werden die optisch empfangenen Träger durch das Feld in der RLZ so lange getrieben, bis sich eine erhöhte Flussspannung $U_0 + U_0$ aufgebaut hat; der verstärkte Diffusionsstrom kompensiert dann gerade den gesamten Feldstrom.

Diese außen meßbare Spannung U_0 kann nur so lange wachsen, bis in der RLZ kein Feld mehr existiert, die Bänder also vollständig geglättet sind. Dies ist dann erreicht, wenn die Quantenniveaus um ungefähr den Bandabstand E_g auseinanderklaffen, so daß E_g/e die maximal mögliche Leerlaufspannung ist.

Der Rekombinations- Sättigungsstrom I_{sRLZ} und der parasitäre Parallelwiderstand R_p müssen durch geeignete Technologie klein genug gehalten werden. Als untere Grenze des Photostroms I_{ph} PC- und PV-Betrieb gilt

$$i_{phmin} \gg I_s + I_{sRLZ} + \frac{U}{R_i + R_p}, \quad (6-20)$$

daß also die Sättigungsströme und die Stromanteile, die bei $R_e=0$ durch den Spannungsabfall am Backwiderstand ($R_0 \approx 10 \Omega$) über den Innenwiderstand $R_i = (dI/dU)^{-1}$ der Diode und über R_p fließen, danklich klein als der Nutzphotostrom bleiben. Ge-Detektoren werden also wegen des geringeren Bandabstandes vornehmlich geringere Empfindlichkeit haben als Si-Dioden. Für einfache Mesa-Aufbauten, die bevorzugt für Photoklemmen verwendet werden, liegt R_p im Bereich einiger Kiloohm. Bei hochwertigen Planardioden für den PC-Betrieb liegt R_p in der Größenordnung von Gigaohm. R_0 und R_p hängen von der Größe der strahlungsempfindlichen Fläche und von der Temperatur ab.

Photoklemmen, die nur Energieerzeugung benutzt werden, sollen eine möglichst hohe Klemmenleistung u_{kl} abgeben. Bild 6-5. Je höher diese Leistung dem hypothetischen Produkt von Kurzschlussstrom (= Photostrom) i_{ph} und Leerlaufspannung U_0 kommt, je mehr also das Rechteck u_{kl} das Rechteck $U_0 i_{ph}$ ausfüllt, desto größer ist die maximale entnehmbare Leistung. Als Gütemaß wird der Füllfaktor $F = \frac{u_{kl}}{U_0 i_{ph}}$ definiert. Er soll möglichst nahe bei eins liegen. Betrachtet man eine Solarzelle mit Sonnenlicht der Leistung P , so erhält man für den Bandabstand E_g einen optimalen Wert, da $U_0 \sim E_g$ wächst und i_{ph} , nach Gl. (6-14) der Photonen dichte pro Zeit $\frac{P}{h\nu}$ proportional, für Photonenenergien $h\nu > E_g$ abnimmt; der Fund hier für liegt in der Intensitätsverteilung des Sonnenlichts, daß nämlich bei konstanter eingestrahlter Leistung P die Anzahl der

Photonen mit größerer Energie als der Bandabstand mit $\frac{1}{A+E_g^a} \sim \text{iph}$ absorbiert und folglich im gleichen Sinne auch der Photostrom. A und $a > 1$ sind Konstanten. Das Produkt $U_0 \text{iph} \sim \frac{E_g}{A+E_g^a}$ wird also für $E_{gopt} = A(a-1)$ maximal. Der absolute Maximalwert liegt bei $E_{gopt} = 1,5 \text{ eV}$, was dem Bandabstand von CdTe entspricht. Die theoretische Lichtumwandlungsbeträgt 24%. Für Si gilt $E_g \approx 1 \text{ eV}$ bei 18% Konversion (14% praktisch erreicht) und für GaAs $E_g \approx 1,4 \text{ eV}$ bei 23% Konversion. Wegen der gut beherrschten und preiswerten Technologie ist Si das häufigste verwendete Damsmaterial. Nach neuesten Entwicklungen läßt sich der Wirkungsgrad deutlich steigern, wenn der Lichtanteil mit $h\nu < E_g$, der sonst dem Umwandlungsprozess verlorengeht, durch Fluoreszenzbestrahlungen in kürzerwellige Photonen umgewandelt wird. Wie aus Bild 6-5 ab zu lesen ist, wird der PV-Kurzschlußbetrieb eine höhere Empfindlichkeit aufweisen als der PC-Kurzschlußbetrieb, da für $R_p \gg R_b + R_L$ mit ein Sperrstrom U_0/R_p (U_0 ist die externe angelegte Sperrspannung in Serie zum Lastwiderstand R_L) dem Dunkelstrom überlagert. Wegen $I_0 \approx 10 \text{ nA}$ für Si-Dioden gilt mit $10 \text{ V} \leq U_0 \leq 50 \text{ V}$ und $R_p = 1 \text{ G}\Omega$ $10 \text{ nA} \leq \frac{U_0}{R_p} \leq 50 \text{ nA}$, daß dieser Stromanteil mindestens zehnmal höher als der Dunkelstrom wird, der zudem in PV-Kurzschlußbetrieb verschwindet. Die Absolutempfindlichkeit liegt für Si-Photodioden und -Elemente bei $0,5 \text{ mA/mW}$.

Da die Diffusionskapazität im PV-Betrieb viel höher ist als die Sperrschichtkapazität des PC-Betriebs, sind nur in Sperrrichtung vorgespannte Dioden zur Detektion modulierter Strahlung über 10 kHz Modulationsfrequenz geeignet.

Die Temperaturabhängigkeit im PV-Kurzschlußbetrieb ist durch den Differentialquotienten

$$\left. \frac{dU_0}{dT} \right|_{U_0, \text{iph}, T} = \frac{k}{e} \ln \left(\frac{\text{iph}}{I_0} + 1 \right) = \frac{-\frac{E_g}{e} + U_0}{T} \quad (6-21)$$

$$\approx \left\{ \begin{array}{l} \text{Si} \\ \text{Ge} \end{array} \right\} \approx -2 \text{ mV K}^{-1}$$

im Arbeitspunkt U_0, iph, T gegeben. Bei Zimmertemperatur $T = 293 \text{ K}$ erhält man für Si ($E_g \approx 1,1 \text{ eV}$, $U_0 \approx 600 \text{ mV}$) bzw. für Ge ($E_g \approx 0,7 \text{ eV}$, $U_0 \approx 200 \text{ mV}$) einen TK von -2 mV K^{-1} . Die Tem-

temperaturabhängigkeit des Bandabstandes kann hierbei vernachlässigt werden, da bei Temperaturen über 250 K (Si) bzw. 200 K (Ge) E_G nur entsprechend

$$E_G(T) = E_G(0) - cT \tag{6-22}$$

abnimmt, wobei für Si $E_G(0) = 1,21 \text{ eV}$, $c = 2,84 \cdot 10^{-4} \text{ eVK}^{-1}$ und für Ge $E_G(0) = 0,782 \text{ eV}$, $c = 3,90 \cdot 10^{-4} \text{ eVK}^{-1}$ gilt, vgl. Gl. (5-58).

Beim PV- und PC-Kurzschlussbetrieb dominiert die Temperaturabhängigkeit des Quantenwirkungsgrades η in Gl. (6-4, 14). Wird Licht der Leistung P_0 senkrecht zur Sperrschichtfläche auf den absorbierenden Halbleiterbeleg der Länge w einfallen (Reflexionsverluste nicht berücksichtigt), so wird der Anteil $P = P_0(1 - e^{-\alpha w})$ absorbiert; da in Gl. (6-4) nichtstrenge homogene Absorption $\alpha w \ll 1$ vorausgesetzt war, wird $P \approx P_0 \alpha w$, und folglich wird

$$\eta = \alpha w. \tag{6-23}$$

Dabei wurde weiter vorausgesetzt, daß jedes Photon ein Ladungsträgerpaar erzeugt, d.h. $\eta_{int} = 1$. Nach Gl. (6-2) ist der Absorptionskoeffizient α aber temperaturabhängig. Übliche Temperaturkoeffizienten für Si-Dioden liegen bei $\pm 0,05 \dots 0,1\% \text{ K}^{-1}$, sind also deutlich niedriger als im PV-Leerlaufbetrieb mit $0,33\% \text{ K}^{-1}$ nach Gl. (6-21).

6.2. pin - Photodiode

Photodiodenempfinger für die optische Nachrichtenübertragung sollen Impulse hoher Wiederholfrequenz empfangen können; folglich werden Dioden im PC-Betrieb verwendet. Da Diffusion im Vergleich zur Drift von Trägern im Feld ein langsames Vorgehen ist, bemüht man sich, durch sehr dünne Kontakt-

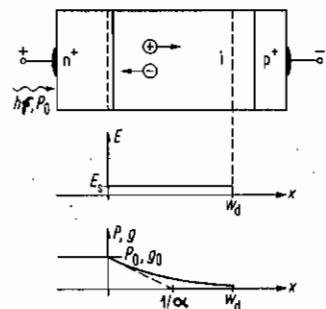


Bild 6-3 Layer model of pin photodiode, schematic of electric field strength E , light power P , and generation rate $g(x) = \frac{P_0}{h\nu A w_d} e^{-\alpha x}$. optical generation and drift region: $0 \leq x \leq w_d$.

zuichten, aber um so ungedultere Sperrschichtweiten $w_d \gg L_{np}$,
 Gl. (6-14), die Absorption in der Diffusionszone klein zu
 halten. Dies gelingt auch bei $p_i n$ -Strukturen, Gl. (6-17)
 und Bild 6-7, und folglich hängt die Impulsantwort solcher
 Empfänger nur noch von der Laufzeit der Träger in der Absorptions-
 zone ab. Bild 6-7 zeigt das Modell einer $p_i n$ -Diode. Photo-
 elektrische Erzeugung von Trägern und Absorptionsdämpfung des
 einfallenden Lichtes tritt nur in der Driftzone ($= RLZ$)
 $0 \leq x \leq w_d$ statt. Das Feld in diesem Bereich ist konstant und so
 hoch, daß sich alle Träger mit der selben gesättigten Driftgeschwin-
 digkeit $v = 9 \cdot 10^6$ m/s für sich bewegen, vgl. Abschnitt 2.3.5. Sollten
 steilflankige Lichtimpulse bei niedriger optischer Eingangsleistung
 empfangen werden, so kann die Feldverstärkung durch Ladungsträger
 in der RLZ vernachlässigt werden. Ferner wird die Generation
 und Rekombination in der RLZ und der Dunkelstrom außer Betracht
 gelassen. Unter diesen Annahmen ergeben sich die Trägerkonzentrationen
 $n(x,t)$ und $p(x,t)$ für Elektronen und Löcher nach der Kontinuitäts-
 gleichung Gl. (6-3) im eindimensionalen Fall (die x -Achse des Bildes
 6-7 ist entgegengesetzt gerichtet zu der des Bildes 6-4!),

$$\frac{\partial n}{\partial t} - v \frac{\partial n}{\partial x} = g(x) f(t) \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} = g(x) f(t) \quad (6-23)$$

wobei die Generationsrate

$$g(x) = \eta_{int} \frac{\alpha w_d}{h f A w_d} P_0 e^{-\alpha x} = g_0 e^{-\alpha x} \quad , \quad (6-24)$$

$$g_0 = \eta_{int} \frac{\delta P_0}{h f A w_d} \quad , \quad \delta = \alpha w_d$$

einführt wurde. α ist der Absorptionskoeffizient Gl. (6-2), A
 der Diodenquerschnitt, η_{int} der interne Quantenertragfaktor als
 das Verhältnis der erzeugten Ladungsträgerpaare zur Anzahl der
 Photonen und $f(t)$ die Zeitfunktion des bei $x=0$ einfallenden
 Lichtes P_0 . Die Lösung lautet

$$n(x,t) = \frac{1}{v} \int_x^{w_d} g(x_0) f\left(t + \frac{x-x_0}{v}\right) dx_0 \quad , \quad p(x,t) = \frac{1}{v} \int_0^x g(x_0) f\left(t - \frac{x-x_0}{v}\right) dx_0 \quad (6-25)$$

Für die Impulsantwort des externen Influenzstromes i_{ph}
 $f(t) = c \delta(t)$, erhält man nach räumlicher Mittelung der
 Ladung

$$i_{ph} = \frac{1}{w_d} \int_0^{w_d} [n(x,t) + p(x,t)] dx \cdot eV A, \quad (6-26)$$

woraus unter Beachtung von Gl. (5-25) das Ergebnis

$$i_{ph}(0 \leq t \leq \tau_d) = c \frac{e g_0 v A}{\delta} \left\{ 1 - e^{-\delta} + \left[1 - e^{-\delta(1-2\frac{t}{\tau_d})} \right] e^{-\delta\frac{t}{\tau_d}} \right\}, \quad (6-27)$$

$$i_{ph}(\tau_d \leq t) = 0$$

resultiert. $\tau_d = \frac{w_d}{v}$ ist die Driftzeit der Träger durch die RLZ. Wird nur in einer sehr dünnen Randschicht bei $x=0$ absorbiert, also $\delta \gg 1$, so gilt näherungsweise

$$i_{ph}(0 \leq t \leq \tau_d) = c \frac{e g_0 v A}{\delta}, \quad (6-28)$$

$$i_{ph}(\tau_d \leq t) = 0.$$

Im stationären Zustand, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $f(t) = 1$, erhält man aus der Integration der Gl. (6-23)

$$i_{ph} = \frac{e g_0 A w_d}{\delta} (1 - e^{-\delta}) = \eta_{int} \frac{e P_0}{h\nu} (1 - e^{-\delta}). \quad (6-29)$$

Für hohe Empfindlichkeit ist, bei gegebener Fläche A , der Ausdruck $1 - e^{-\delta}$ maximal zu machen, was für $\delta \gg 1$, d.h. für Absorptionskonstanten wesentlich größer als die Eindringtiefe $w_d \gg 1/\alpha$ nicht erfüllt ist. Aus diesem Grunde muß die verfügbare Absorptionslänge möglichst ausgenutzt werden, d.h. durch ausreichend hohe Sperrspannungen muß die RLZ bis in das p^+ -Gebiet hin ausgedehnt werden.

Als externer Wirkungsgrad wird definiert

$$\eta_{ext} = \frac{\text{Zahl der externen Trägerpaare pro Zeit}}{\text{Zahl der auftreffenden Photonen pro Zeit}} = \frac{\frac{i_{ph}}{e}}{\frac{P_{ext}}{h\nu}}, \quad (6-30)$$

$$\eta_{ext} = \eta_{int} (1 - e^{-\delta})(1 - R).$$

In der letzten Gleichung wurde berücksichtigt, daß von der gesamten auftreffenden Lichtleistung wegen Reflexion (Wirkungsreflexionskoeffizient R , Gl. (3-65, 66)) nur der Anteil $P_0 = P_{ext}(1 - R)$ absorbiert werden kann. Die Reflexionsverluste in Höhe von ca. 30%, $T_{em} \approx 70\%$ nach Gl. (5-64), sind bis zum Brewsterwinkel $\vartheta_{20} = \arctan \frac{1}{3,5} \approx 15,9^\circ$, Gl. (3-69) und Bild 3-6,

für unpolarisierte Strahlung nahe π konstant und lassen sich durch einen Antireflex-Belag deutlich verringern. Bei Si oxidiert man ein Teil der Oberflächen, so daß eine $1/4$ dicke Haut mit niedrigeren Brechungsindizes entsteht.

Die Impuls- bzw. die Sprungantwort des Photostroms ist der eines RC-Fieppaß ähnlich, wenn $f \ll 1/\tau_d$ gilt, nämlich $i_{ph} \approx 2e(1 - \frac{f}{f_c}) \approx 2e \cdot e^{-t/\tau_d}$. Die 3-dB-Frequenz der pin-Diode ist daher näherungsweise gleich der reziproken Laufzeit,

$$\omega_{3dB} \approx \frac{1}{\tau_d} \quad (6-31)$$

Die Licht-Strom-Übertragungsfunktion fällt oberhalb von ω_{3dB} näherungsweise mit 20 dB/Dekade Frequenzänderung ab.

Parallel zur Sperrschicht liegt die bisler nicht berücksichtigte Sperrschichtkapazität $C_p = \frac{\epsilon A}{w_d}$. Deswegen sollte für schnelle Empfänger w_d nicht zu klein gewählt werden bei kleiner aktiver Fläche. Für hohe Frequenzen ist kleineres w_d zu fordern und für höherer γ wiederum großes w_d , so daß ein Kompromiß zwischen Empfindlichkeit und Schnelligkeit gefunden werden muß.

Das mittlere Schwankungsquadrat des Stroms wird, bei Trägergeneration durch ideales amplitudenstabilisiertes Laserlicht (Photonen werden durch Poisson-Statistik beschrieben), sich ebenfalls aus einem Poisson-Prozess ergeben. Diese Art Rauschen nennt man Schrotrauschen $\overline{i_{ph}^2} = 2e \overline{i_{ph}} \Delta f$. Dabei ist $\overline{i_{ph}}$ der Erwartungswert des Stroms, also der fließende Gleichstrom, und Δf die betrachtete Frequenzbandbreite. Für die pin-Diode gilt folglich, ohne Berücksichtigung von Laufzeiteffekten, bei Belichtung mit konstanter Intensität P_{ext} bei $\alpha = 0$

$$\overline{i_{ph}^2} = 2e \cdot \gamma_{ext} \frac{e P_{ext}}{h f} \cdot \Delta f = 2e \cdot \overline{i_{ph}} \cdot \Delta f \quad (6-32)$$

Die Temperaturempfindlichkeit der pin-Photodiode entspricht dem Verhalten konventioneller Photodioden im PC-Kontrollbetrieb.

Die Linearität von pin-Detektoren ist so lange entsprechend β (6-29) hervorragend, solange die Trägererzeugungsgeschwindigkeit nicht durch die Raumladung-Verzerrung des Feldes bei hohen Photostromen merklich reduziert wird.

6.3. Lawinen - Photodiode (APD)

Um die Empfindlichkeit von Photoempfänger zu steigern, kann man sich der intensiven Lawinenvervielfachung des von Licht generierten Primärträger bedienen. Bereits bei einer ein- oder pn- oder pin-Struktur tritt bei ausreichendes beschleunigendes Feldstärke in der RLZ eine Trägermultiplikation auf,

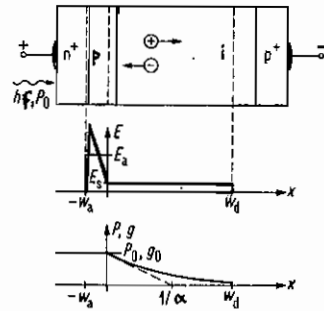


Bild 6-8. Layer model of avalanche photodiode, schematic of electric field strength E , light power P , and generation rate $g(x) = \alpha w_d P_0 / (h\nu A w_d) e^{-\alpha x}$. Avalanche region: $-w_a \leq x \leq 0$, optical generation and drift region: $0 \leq x \leq w_d$. α ist hier der Absorptionskoeffizient!

doch erfolgt diese bei nicht optimierten Dioden meist örtlich inhomogen mit starken Rauschen. Eine häufig verwendete Struktur zeigt Bild 6-8. Man nennt sie Lawinaphotodiode (Avalanche Photo Diode, APD). Die n+, p+-Kontaktschichten sind so dünn, $L_{nt}, L_{pt} \ll w_a$ aus Gl. (6-14), daß keine nennenswerte Trägeranzahl dort optisch generiert wird, so daß wiederum Diffusionsinflüsse nicht berücksichtigt werden müssen.

Zunächst werde der Lawinenprozess betrachtet. Durch Stoßionisation erzeugen Elektronen und Löcher auf einer Wegstrecke dx im Mittel gerade αdx und βdx neue Ladungsträgerpaare. α (Nicht aufwechseln mit dem Absorptionskoeffizienten α !) und β sind die Ionisierungsraten für Elektronen und Löcher. Wegen Feldstärkeabhängigkeit, Bild 6-9, läßt sich für verschiedene Materialien in folgender empirischen Beziehung formulieren

$$\text{Ionisierungsrate} = a \cdot \exp\left(-\frac{E_0}{E}\right) \quad (6-33)$$

Für Si gilt (Sze 1966)

$$\alpha = 3,8 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-1} \exp\left(-\frac{1,75 \text{ MV cm}^{-1}}{E}\right),$$

$$\beta = 2,25 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-1} \exp\left(-\frac{3,26 \text{ MV cm}^{-1}}{E}\right).$$

Wegen der exponentiellen Feldstärkeabhängigkeit wird die Lawinenbildung nur dort stattfinden, wo die Feldstärke

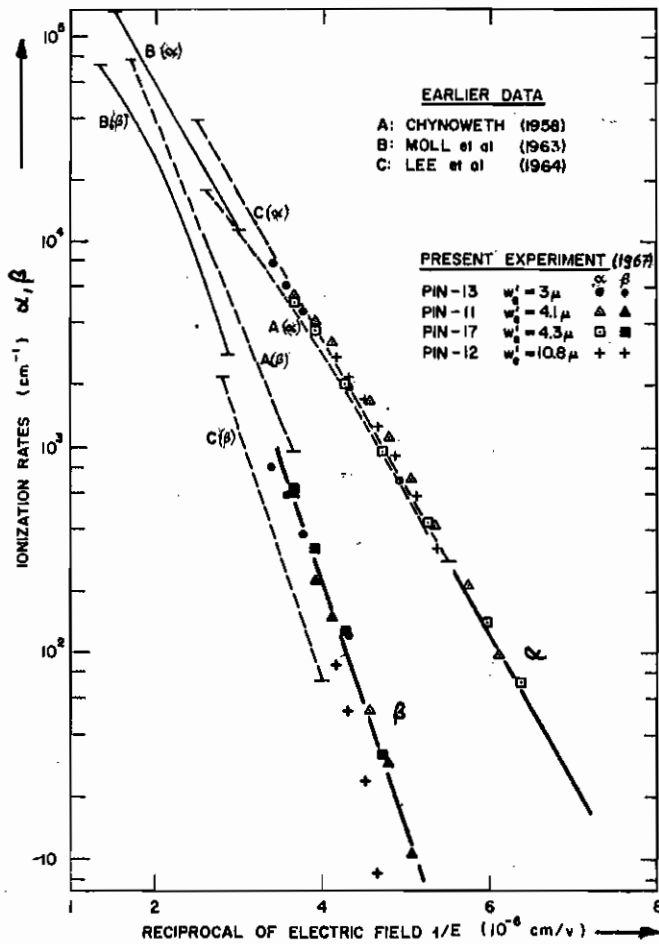


Bild 6-9 Ionization rates for holes (β) and electrons (α) in silicon at room temperature.

an größten x , nämlich in Bereich $-w_0 \leq x \leq 0$ des Bildes 6-8. Rekombination sowohl als auch thermische und optische Generation finden in diesem Bereich nicht statt. Für die Lawinengenerationsrate der Erzeugung von Elektron-Loch-Paaren gilt

$$g_a = n v_n \alpha + p v_p \beta. \quad (6-34)$$

v_n, v_p sind die Beträge der Sättigungsdriftgeschwindigkeiten für Elektronen und Löcher. Ströme und Geschwindigkeiten werden in x -Richtung positiv gezählt,

$$j_n = e n v_n, \quad j_p = e p v_p. \quad (6-35)$$

Mit der Kontinuitätsgleichung (6-3) (doch andere x -Richtung!) erhält man im Eindimensionalen

$$\begin{aligned} -\frac{1}{v_n} \frac{\partial j_n}{\partial t} &= -\frac{\partial j_n}{\partial x} - \alpha j_n - \beta j_p, \\ \frac{1}{v_p} \frac{\partial j_p}{\partial t} &= -\frac{\partial j_p}{\partial x} + \alpha j_n + \beta j_p. \end{aligned} \quad (6-36)$$

Nach Multiplikation mit $-v_n, v_p$ und Addition und Subtraktion der Terme $\alpha v_p j_p$ in der oberen, $\beta v_n j_n$ in der unteren Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial j_n}{\partial t} &= v_n \frac{\partial j_n}{\partial x} + \alpha v_n j_n + \beta v_n j_p + \beta v_n j_n - \beta v_n j_n, \\ \frac{\partial j_p}{\partial t} &= -v_p \frac{\partial j_p}{\partial x} + \alpha v_p j_n + \beta v_p j_p + \alpha v_p j_p - \alpha v_p j_p. \end{aligned} \quad (6-37)$$

Addition des Gl. (6-37) und Ordnen nach den Termen y und dem Gesamtkosten z ,

$$y = v_n z_n - v_p z_p, \quad z = z_n + z_p, \quad (6-38)$$

liefert

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} + (\alpha - \beta)y + (\alpha v_p + \beta v_n)z. \quad (6-39)$$

In anderer Form schreibt man Gl. (6-39)

$$\begin{aligned} A(\kappa, y) dx + B(\kappa, y) dy &= 0, \\ A(\kappa, y) &= \frac{\partial z}{\partial t} - (\alpha - \beta)y - (\alpha v_p + \beta v_n)z, \\ B(\kappa, y) &= -1. \end{aligned} \quad (6-40)$$

Die Lösung der exakten Differentialgleichung

$$d\Phi(\kappa, y) = X(\kappa, y) dx + Y(\kappa, y) dy = 0 \quad (6-41)$$

lautet bei beliebigen Werten x_0, y_0

$$\Phi(\kappa, y) = \int_{x_0}^x X(\xi, y) d\xi + \int_{y_0}^y Y(x_0, \eta) d\eta = \text{const.} = C'. \quad (6-42)$$

Um Gl. (6-40) zu lösen, multipliziert man sie mit dem integrierenden Faktor μ , der als beliebige partiikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$B(\kappa, y) \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - A(\kappa, y) \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial A(\kappa, y)}{\partial y} - \frac{\partial B(\kappa, y)}{\partial x} \quad (6-43)$$

folgt. Mit

$$\frac{\partial A}{\partial y} = -(\alpha - \beta), \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 0$$

und des (zweckmäßigen) Sells

$$\mu(\kappa, y) = \mu(\kappa)$$

erhält man aus Gl. (6-43)

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \alpha - \beta \quad (6-45)$$

mit der partikulären Lösung

$$\mu(x) = e^{\int_0^x (\alpha - \beta) dx'} \quad (6-46)$$

Folglich wird in Gl. (6-41)

$$X(x, y) = A(x, y)\mu(x) \quad , \quad Y(x, y) = B(x, y)\mu(x). \quad (6-47)$$

Die Integrale der Gl. (6-42) lassen sich leicht lösen, wenn man in geeigneter Näherung annimmt, daß die Geschwindigkeit ortsunabhängig ist, $y = y_n(x, t) + y_p(x, t) = y(t)$. Dann gilt mit $x_0 = 0, y_0 = 0$

$$\int_0^x X(\xi, y) d\xi = \frac{dy}{dt} \int_0^x e^{\int_0^{\xi} (\alpha - \beta) dx'} d\xi - v_p y \int_0^x \alpha e^{\int_0^{\xi} (\alpha - \beta) dx'} d\xi - v_n y \int_0^x \beta e^{\int_0^{\xi} (\alpha - \beta) dx'} d\xi - y \int_0^x (\alpha - \beta) e^{\int_0^{\xi} (\alpha - \beta) dx'} d\xi, \quad (6-48)$$

$$\int_0^y Y(0, \eta) d\eta = -y.$$

Die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} y_n(x=0) &= y_{n0} & y_p(x=0) &= y_{p0} \\ y_n(x=-u_n) &= y_{nua} & y_p(x=-u_n) &= y_{ps} \end{aligned} \quad (6-49)$$

Der Index s bezeichnet Störgrößen. Für die Konstante C erhält man folglich bei $x=0$ aus den Gl. (6-49, 46, 42)

$$C = -y = v_p y_{p0} - v_n y_{n0}, \quad (6-50)$$

so daß aus Gl. (6-39) nach Integration von 0 bis x wird

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} \int_0^x e^{\int_0^{\xi} (\alpha - \beta) dx'} d\xi - (v_n + v_p) y \left[1 + \int_0^x \alpha e^{\int_0^{\xi} (\alpha - \beta) dx'} d\xi \right] + \\ + \frac{v_n (y_n + y_p)}{1,2} \int_0^x \alpha e^{\int_0^{\xi} (\alpha - \beta) dx'} d\xi + \frac{(v_n + v_p) (y_n + y_p)}{3} - \\ - v_n (y_n + y_p) \int_0^x \beta e^{\int_0^{\xi} (\alpha - \beta) dx'} d\xi - v_n y_n \int_0^x (\alpha - \beta) e^{\int_0^{\xi} (\alpha - \beta) dx'} d\xi + \\ + v_p y_p \int_0^x (\alpha - \beta) e^{\int_0^{\xi} (\alpha - \beta) dx'} d\xi - v_n y_n + v_p y_p - v_p y_{p0} + v_n y_{n0} + \\ + \frac{v_p y_{n0}}{4} - \frac{v_p y_{n0}}{3} + \frac{v_n y_{p0}}{5} - \frac{v_n y_{p0}}{3} = 0. \end{aligned} \quad (6-51)$$

Die unterstrichenen Terme werden jeweils addiert und subtrahiert. Fasst man die Summanden mit gleichen Zahlenmarkierungen zusammen, dividiert durch $\int \exp \int (\alpha - \beta) dx' d\xi$, verschiebt alle Integrationsfronten und multipliziert mit (-1) , dann erhält man die Differentialgleichung Gl. (6-39) an der Stelle x

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{M_n(x) \tau_{in}(x)} = \frac{y_{ns}}{\tau_{in}(x)} + \frac{y_p(x)}{\tau_{ip}(x)} \quad (6-52a)$$

bzw. an der Stelle $x = -w_a$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{M_n \tau_{in}} = \frac{y_{ns}}{\tau_{in}} + \frac{y_{ps}}{\tau_{ip}} \quad (6-52b)$$

Unter Beachtung von

$$1 - \int_x^0 (\alpha - \beta) e^{-\int_x^{\xi} (\alpha - \beta) dx'} d\xi = 1 - \int_x^0 \frac{d}{d\xi} e^{-\int_x^{\xi} (\alpha - \beta) dx'} d\xi = e^{-\int_x^0 (\alpha - \beta) dx'} \quad (6-53)$$

wenden die Abkürzungen

$$\tau_{in}(x) = \frac{1}{v_n + v_p} \int_x^0 e^{-\int_x^{\xi} (\alpha - \beta) dx'} d\xi, \quad \tau_{ip}(x) = \tau_{in}(x) e^{-\int_x^0 (\alpha - \beta) dx'} \quad (6-54)$$

$$M_n(x) = \frac{1}{1 - \int_x^0 \alpha e^{-\int_x^{\xi} (\alpha - \beta) dx'} d\xi}, \quad M_p(x) = M_n(x) \cdot \frac{\tau_{in}(x)}{\tau_{ip}(x)}$$

für die Elektroden - bzw. Lötlöt multiplifikationsfaktoren M_n, M_p und die entsprechenden Leuchtlichtkonstanten τ_{in}, τ_{ip} einfügt. An der Stelle $x = -w_a$ gilt

$$\tau_{in} = \frac{1}{v_n + v_p} \int_{-w_a}^0 e^{-\int_{-w_a}^{\xi} (\alpha - \beta) dx'} d\xi, \quad \tau_{ip} = \tau_{in} e^{-\int_{-w_a}^0 (\alpha - \beta) dx'} \quad (6-55)$$

$$M_n = \frac{1}{1 - \int_{-w_a}^0 \alpha e^{-\int_{-w_a}^{\xi} (\alpha - \beta) dx'} d\xi}, \quad M_p = M_n \cdot \frac{\tau_{in}}{\tau_{ip}}$$

Die rechte Seite von Gl. (6-52b) lässt sich umformen mit Hilfe von Gl. (6-38),

$$\left(\frac{y_{ns}}{\tau_{in}} \right) + \frac{y_{ps}}{\tau_{ip}} = \left(\frac{y_{ns}}{\tau_{in}} - \frac{y_{ps}}{\tau_{in}} \right) + \frac{y_{ps}}{\tau_{ip}} = \frac{y_{ns}}{\tau_{in}} \left(1 - \frac{y_{ps}}{y_{ns}} + \frac{y_{ps}}{y_{ns}} \cdot \frac{\tau_{in}}{\tau_{ip}} \right) \quad (6-56)$$

Nach Einführung der Abkürzung

$$k = \frac{\eta_{ps}}{\eta_0}, \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (6-57)$$

für das Verhältnis von Löcher- und Gesamt sättigungsstrom an der Fronten der Lawinenzone, ergibt sich die Lawinenzzeitkonstante $\tau_1 = \tau_{in} (1 - k + k \tau_{in} / \tau_{sp})^{-1}$ und der Multiplikationsfaktor $M = M_{in} \tau_{in} / \tau_1$ definieren, also

$$\tau_1 = \frac{1}{v_n + v_p} \cdot \frac{\int_{-w_0}^0 e^{-\int_0^x (\alpha - \beta) dx'} dx'}{1 - k + k e^{-\int_{-w_0}^0 (\alpha - \beta) dx'}} \quad (6-58)$$

$$M = \frac{1 - k + k e^{-\int_{-w_0}^0 (\alpha - \beta) dx'}}{1 - \int_{-w_0}^0 \alpha e^{-\int_0^x (\alpha - \beta) dx'} dx'}$$

Damit vereinfacht sich die Differentialgleichung für den Lawinestrom, Gl. (6-52b), zu

$$\frac{d\eta}{dt} + \frac{\eta}{M \tau_1} = \frac{\eta_1}{\tau_1} \quad (6-59)$$

Im stationären Fall $\frac{d\eta}{dt} = 0$ gilt

$$\eta = M \eta_0, \quad (6-60)$$

daß der gesamte in die Lawinenzone injizierte Sättigungsstrom zu einem mit M vervielfachten Lawinestrom η führt. M ist nach Gl. (6-58) von der Aufteilung des Sättigungsstroms auf Elektronen und Löcher abhängig und von den jeweiligen Ionisationsraten α, β , die wiederum nach Gl. (6-33) Funktionen der Feldstärke $E = E(x)$ sind. Betrachtet man Messwerte von α, β für Silizium, Bild 6-9, so sieht man, daß sich das Verhältnis der Ionisationsraten für Löcher und Elektronen nur wenig mit der Feldstärke ändert: Der Abstand beider logarithmisch aufgetragen Kurven bleibt nahezu konstant. Das legt die Einführung folgender Abkürzungen nahe,

$$k_0 = \frac{\int_{-w_a}^0 \beta dx}{\int_{-w_a}^0 \alpha dx}, \quad \delta(E) = \int_{-w_a}^0 \alpha(E(x)) dx, \quad (6-61)$$

$$k_1 = \frac{\int_{-w_a}^0 \beta e^{-\int_f^0 (\alpha-\beta) dx'} df}{\int_{-w_a}^0 \alpha e^{-\int_f^0 (\alpha-\beta) dx'} df}.$$

k_0 ist also das Verhältnis der Mittelwerte und k_1 das Verhältnis der gewichteten Mittelwerte der Löcher- und Elektronenionisationsraten. δ ist dann die Anzahl der von einem Elektron nach Durchlaufen der Strecke w_a bei dem Feldstärkeverlauf $E=E(x)$ im Mittel erzeugten Elektron-Loch-Paare. Erweiterung des Multiplikationsfaktors M in Gl. (6-58) mit $1-k_1$ im Zähler und Nenner ergibt unter Beachtung von Gl. (6-61)

$$M = \frac{(1-k+k e^{-(1-k_0)\delta(E)}) (1-k_1)}{1-k_1 - \int_{-w_a}^0 \alpha e^{-\int_f^0 (\alpha-\beta) dx'} df + \int_{-w_a}^0 \beta e^{-\int_f^0 (\alpha-\beta) dx'} df}. \quad (6-62)$$

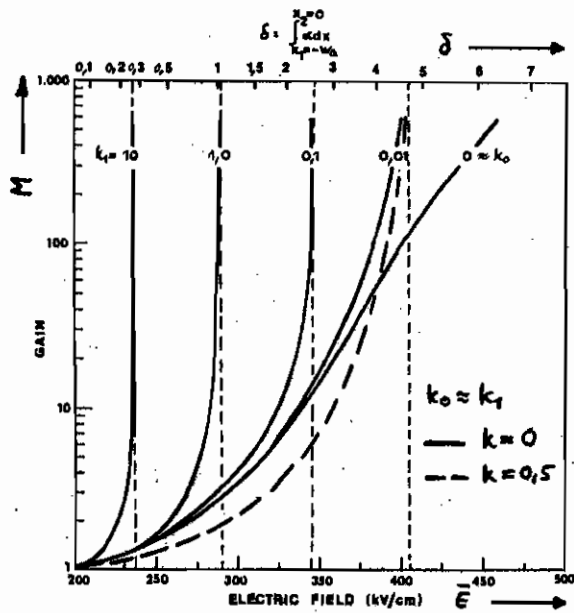
Einsetzen von Gl. (6-53) ergibt

$$M = \frac{k e^{-(1-k_0)\delta(E)} - k + 1}{e^{-(1-k_0)\delta(E)} - k_1} \cdot (1-k_1), \quad (6-63)$$

$$\lim_{\substack{k_0 \approx k_1 \rightarrow 1 \\ k \text{ beliebig}}} M = \frac{1}{1-\delta(E)}, \quad \lim_{\substack{k_0 \approx k_1 \rightarrow 0 \\ k=0}} M = e^{\delta(E)}.$$

Der Multiplikationsfaktor bei reiner Elektroneninjektion, $k=0$, ist $M(k=0) = M_n$, der bei reiner Lochinjektion, $k=1$, ist $M(k=1) = M_p$, Gl. (6-55). Da sich für Silizium k_0 und k_1 nur wenig mit der Feldstärke ändern, können diese Größen als Materialkonstanten aufgefaßt werden (Allerdings: Selbst wenn $\alpha = \beta/k_0$ exakt gilt, hängt k_1 dennoch von der Struktur, nämlich vom genauen Verlauf $\alpha(E(x))$ ab!). In erster Näherung gilt sogar $k_0 \approx k_1$. Bild 6-10 zeigt den Multipli-

kationsfaktor, aufgetragen über δ (obere Abszisse) bzw. über die mittlere Feldstärke \bar{E} bei einer Si-pi-n-Diode mit $w_a = 1 \mu\text{m}$ (im Bild 6-8 geht $w_d \rightarrow 0$, das p-Feld wird zur i-Zone). Durchsetzen wird die Kurve für $k=0$, $M=M_n$, reine Elektroneninjektion, die gebildet die Kurve für gemischte Injektion, $k=0,5$. Parameter ist



Electron multiplication as a function of electric field and δ , with ionization ratio k_1 as a parameter, in a $1 \mu\text{m}$ wide p-i-n diode (Si).

k_1 , prob gegeben: das Bild 6-10 Verhältnis der Ionisationskoeffizienten von Löchern und Elektronen. Aus Gl. (6-63) und Bild 6-10 ist zu sehen, daß für $k_1=0$, also $\beta=0$, M für jede endliche Feldstärke \bar{E} endlich bleibt. Der injizierte Primärelektronenstrom wird zwar beträchtlich verstärkt, aber es tritt kein Lawinendurchbruch auf! Hat dagegen k_1 einen beliebig kleinen Wert $k_1 \neq 0$, was in der Natur immer gegeben ist, so existiert immer eine endliche Feldstärke E_a , bei welcher der Nenner in Gl. (6-63) null wird und selbst bei Umdrehen des injizierten Primärstromes ein Lawinendurchbruch fließen würde. Diesen Zustand nennt man Lawinendurchbruch, die zugehörige Feldstärke E_a Durchbruchfeldstärke. Aus Bild 6-10 ist weiter zu erkennen, daß die Durchbruchfeldstärke E_a um so niedriger sein wird, je höher die Ionisationsrate für Löcher bei gegebener Elektronenionisationsrate ist. Für den Durchbruchwert $\delta_a(E) = \int_{-w_a}^0 \alpha(E_a(x)) dx$ gilt nach Gl. (6-63) bei der mittleren Feldstärke $E_a = \bar{E}_a = \frac{1}{w_a} \int_{-w_a}^0 E_a(x) dx$, vgl. Bild 6-8,

$$\delta_a = \frac{\ln k_1}{k_0 - 1} \quad , \quad \lim_{k_0 \rightarrow k_1} \delta_a = 1. \quad (6-64)$$

Bild 6-11a demonstriert für reine Elektroneninjektion, $k=0$,

und alleinige Ionisation durch Elektronen, $k_1 = 0$, das Auftreten der Lawine. Ein bei $x = 0$ zur Zeit $t = 0$ einbreitender Primärträger erzeugt im Mittel gerade ein Elektron-Loch-Paar auf einer Strecke $wa/3,1$. Bei homogenem Feld ist also $\delta = 2$. In jedem Abschnitt $wa/3,1$ verdoppelt sich die Elektronenanzahl, so daß links nach der Zeit $\tau_a = \frac{wa}{v}$ gerade $M = 4$ Elektronen austreten. Diese Zahl gilt für das betrachtete Einzelereignis. Im Mittel wäre nach Bild 6-10

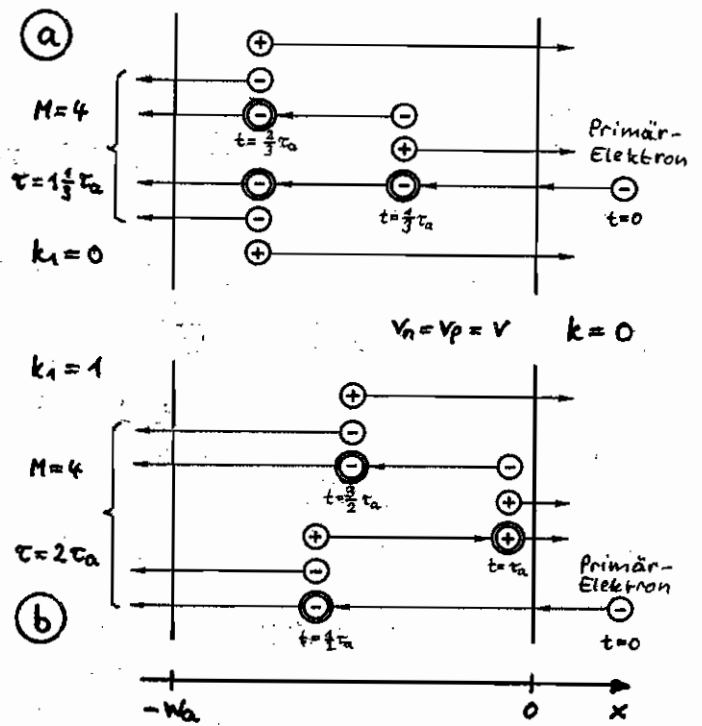


Bild 6-11

$M = M_n = 7,1k$. Da bei $x = 0$ herausfließende Strom hat natürlich die gleiche Größe wie bei $x = -wa$. Werden keine neuen Primärträger injiziert, kommt der Ionisationsprozess zum Stillstand. Ein Durchbruch findet also nicht statt.

Anderes nicht der Fall aus, wenn auch Löcher ionisationsfähig sind, z. B. in gleicher Weise wie Elektronen, $k_1 = 1$ Bild 6-11 b. Hier erzeugt jeder Träger auf der Strecke $wa/2,1$ gerade ein Elektron-Loch-Paar, $\delta = 1$. Zur Zeit $t = 0$ werde wieder bei $x = 0$ ein Elektron injiziert. Da nun auch Löcher weitere Ionensträger loszulassen können, wird nach dem dritten Ionisationsprozess an der Stelle $x = 0$ ein Elektron erzeugt, welches in gleicher Weise wie der Primärträger die Lawine speist. Selbst wenn also nur einmal ein Primärelektron in die Lawinenzone injiziert worden wäre, würde sich die Lawine aufrecht erhalten; die Sperrschicht bricht durch und der Multiplikationsfaktor wird unendlich, wie auch aus Gl. (6-63) und Bild 6-10 zu sehen ist. Es können "beliebig" hohe Ströme fließen, wenn keine Begrenzung durch die äußere Beschaltung wirksam wird. Die Erniedrigung der Durchbruchspannung bei $k_1 \neq 0$ ist also durch diesen Mitkopplungseffekt einer realen Lawinenzuleitung mit

$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ zu erklären.

Die Lawinenstromzeitkonstante τ ohne Berücksichtigung der Rithoppung, Bild 6-11a, ist ungefähr gleich der Trägerlaufzeit durch die Lawinenzone, genau gleich $\frac{1}{3} \cdot \tau_a$. Für den Fall gleicher Ionisierungsraten, Bild 6-11b, ist sie doppelt so groß, da für den betrachteten Multiplikationsfaktor $M=4$ gerade nach der doppelten Laufzeit alle Ladungsträger die Grenze der Lawinenzone erreicht haben.

Wird die Lawine mit einer Sprungfunktion des Sättigungswerts der Höhe η_0 zur Zeit $t=0$ angeregt, so wächst der Lawinenstrom entsprechend Gl. (6-59) exponentiell,

$$\eta(t) = \eta_0 \cdot M \left(1 - e^{-\frac{t}{M\tau_1}}\right). \quad (6-65)$$

Für die Zeitkonstante $\tau = M\tau_1$ des Lawinenstroms gilt mit dem Gl. (6-58, 63)

$$\tau = M\tau_1 = \frac{1}{v_n + v_p} \cdot \frac{(1-k_1) \int_{-w_a}^0 e^{-(1-k_0) \int_{\xi}^0 \alpha dx'} d\xi}{e^{-(1-k_0)\delta(\epsilon)} - k_1},$$

$$\lim_{\substack{k_0=k_1 \rightarrow 1 \\ k \text{ beliebig}}} M\tau_1 = \frac{w_a}{v_n + v_p} \cdot \frac{1}{1 - \delta(\epsilon)} = \frac{w_a}{v_n + v_p} \cdot M, \quad (6-66)$$

$$\lim_{\substack{k_0=k_1 \rightarrow 0 \\ k \text{ beliebig}}} M\tau_1 = \frac{2w_a}{v_n + v_p} \int_{-w_a}^0 \frac{1}{2w_a} e^{-\int_{\xi}^0 \alpha dx'} d\xi.$$

Ändert sich für $k=k_0=k_1=0$ $e^{-\int_{\xi}^0 \alpha dx'}$ z.B. wie in Bild 6-11a von 1 bis $e^{\delta=1.5} \approx 4,5$ bei $M=4$, Bild 6-10, so ist dieses Integral τ näher durch ein Rechteck der Höhe $\frac{1+e^{\delta}}{2} = 2,7$, so daß $\lim_{k_0=k_1 \rightarrow 0} \tau \approx \frac{2w_a}{v_n + v_p} \approx \frac{2w_a}{v_n + v_p} \cdot 1,35 \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{2w_a}{v_n + v_p}$ wie in Bild 6-11a approximativ $k=0$ gilt. Entsprechendes gilt für Bild 6-11b, wenn man berücksichtigt, daß der angenommene Multiplikationsfaktor des betrachteten Einzelereignisses trotz $\delta=1$ nur $M=4$ war, so daß man mit Gl. (6-66) $\lim_{k_0=k_1 \rightarrow 0} \tau = 4 \cdot \frac{1}{2} \tau_a = 2\tau_a$ erhält. Unipolare Ionisation, also $k=0$ (kleines k_1 , bewirkt also einen größeren Anteil des Lawinenstroms.

Sind, wie in Si der Fall, die Ionisationsraten stark unterschiedlich, z.B. $k_2 = 0,02$, vgl. Bild 6-12b, so ist es zweckmäßig, mit Hilfe des Lawineneffektes diejenige Ladungsträgersorte in die Lawine zu injizieren, die den höheren Ionisationskoeffizienten hat, bei Si also Elektronen; anderenfalls würde durch stärkere Mitkopplung die Funktion $M = M(E)$ in Bild 6-10 deutlich steiler verlaufen, z.B. für $k_2 = 0,01$ gestrichelte Kurve, was zu einem gegen Betriebsspannungsschwankungen oder Temperaturveränderungen instabileren Multiplikationsfaktor führt. Wunschenswert ist aus dem genannten Grund ein möglichst flacher Verlauf ohne starke Steigungen. Das sieht weiter aus Bild 6-10, daß bei Injektion nur einer Trägersorte der Mitkopplungseffekt bis zu Verstärkungen $M = \frac{1}{k_1}$ nicht allzu groß ist.

Typische Werte für die Länge von Lawinen- und Driftzone des APD Bild 6-8 sind $w_a \approx 0,02 \mu\text{m}$ ($\tau_{a1} = 1\text{ps}$, $v_{a1} = 9 \cdot 10^4 \text{ms}^{-1}$), $w_d = 16 \mu\text{m}$. Folglich wird nahezu die gesamte Lichtleistung in der Driftzone absorbiert; diese ist rechts von der Lawinenzone angebracht, damit nur Elektronen in die Lawinenzone injiziert werden. Das ganze System kann man sich als Serienschaltung einer pn-Diode der Zeitkonstanten τ_d , einer Lawinendiode der Zeitkonstanten $M\tau_1$ und, für die ersten sekundären Löcher, einer Driftzone der Zeitkonstanten τ_d vorstellen. Folgende Dynamik läuft ab: Ein Elektron-Loch-Paar werde bei $x = w_d$ optisch generiert. Das Loch wandert ins p^+ -Gebiet und geht dem Lawinerverstärkungsprozeß verloren. Nach der Zeit $t = \tau_d$ gibt das Elektron einen sekundärtröpfchen Anlaß, von dem an die Löcher zur Zeit $t = \tau_d + M\tau_1$ bei $x = 0$ in die n -Zone injiziert werden. Nach der Zeit $t = \tau_d + M\tau_1 + \tau_d = M\tau_1 + 2\tau_d$ befinden sich bei $x = w_d$ gerade M sekundäre Löcher (das Primärelektron gelangt bereits ins n^+ -Gebiet), die, groß gesprochen, einen Strom im Außenkreis in Phase mit, der entspricht wie die Kettenzschaltung zweier RC-Peppäme, der erste hat die Zeitkonstante $M\tau_1$, der zweite die Zeitkonstante $2\tau_d$. Für hohe Verstärkungen dominiert der Anteil $M\tau_1$. Für das Verstärkungsbandbreite-Produkt gilt demnach

$$M \Delta f \approx \frac{1}{2\tau_{\text{eff}}} \approx \{ \text{Si, APD zB Bild 6-8, 13} \} \approx 180 \text{ GHz}. \quad (6-67)$$

Solche Werte werden experimentell auch erreicht. Bei einer Grenzfrequenz von 1,8 GHz ist also noch eine Verstärkung von $M=100$ möglich.

Durch die Breite der i-Zone sind die Sperrschichtkapazitäten ausreichend klein, typisch ist $C_p = 0,6 \text{ pF}$ bei $A = 0,05 \text{ mm}^2$. Bei einem Lastwiderstand von 50Ω beträgt die RC_p -Grenzfrequenz 5,3 GHz. Die $2\tau_d$ -Grenzfrequenz beträgt für $w_d = 16 \mu\text{m}$ nur 0,98 GHz. Tatsächlich ist es nicht nur die $2\tau_d$ -Grenzfrequenz, da erst nach Ausbildung der Laserne ein größerer Strom fließt, so daß die wirksame Grenzfrequenz 2 GHz wird. Die Zeit bis zur Ladungsträgerinjektion in die Laserzone ist praktisch eine Verzögerzeit, da der Strombeitrag nur $\frac{1}{M}$ des stationären Stromwertes ist. Für die Diode APD BPW28 lassen sich Anstiegszeiten von $t_r = 300 \text{ ps}$ bei Verstärkungen $M=100$ erreichen. Dies entspricht einer Grenzfrequenz von 1,2 GHz.

Der externe Quantenwirkungsgrad η_{ext} (6-30),

$$\eta_{ext} = \eta_{int} (1 - e^{-\delta}) (1 - R) M \quad (6-68)$$

ist gerade um den Faktor M höher als bei der p-i-n-Diode.

Die Temperaturabhängigkeit von η_{ext} wird durch die von $\delta = \alpha w_d$ (α hier Absorptionskoeffizient!) und M bestimmt. Für Silizium gelten die Angaben nach Gl. (6-23). Für $M \gg 1$ ist die Abhängigkeit von der Durchbruchfeldstärke E_a wesentlich, die sich aus der Beziehung $k_1 = e^{-(1-\epsilon_0)\delta(E)}$ errechnen läßt, Gl. (6-63). Dabei wurde vorausgesetzt, daß optische Generation die thermische Erzeugungsrate weit überwiegt, so daß die Abhängigkeit von n_i^2 unwesentlich wird. Da nach Abschnitt 2.3.5. die Beweglichkeit für Si bei Zimmertemperatur mit steigender Temperatur nicht, ist für gleiche Geschwindigkeit (kinetische Energie der Träger) eine höhere Feldstärke erforderlich, also gilt für die Durchbruchfeldstärke $E_a \frac{dE_a}{dT} > 0$; folglich sinkt der Multiplikationsfaktor M bei fester Spannung mit der Temperatur,

$\frac{dM}{dT} < 0$. Für Si ist $\frac{dI_{0a}}{dT} = \frac{dE_a}{dT} = 0,14\% K^{-1}$ typisch, vgl. Bild

6-13.

Das Rauschverhalten von Lawinendiioden ist wesentlich komplizierter als das von gewöhnlichen Photodiode. Der Statistik der primären, durch ideales amplitudenstabilisiertes Laserlicht erzeugten Träger, die dabei Schrotrauschen zeigen, überlagert sich die Statistik des Stoßionisationsprozesses, da ja nicht jedes Elektron gerade e^{δ} Sekundärträger produziert, sondern das eine wird mehr, das andere weniger erzeugen. Erfolgt die Ionisationsprozesse statistisch unabhängig voneinander, bleibt also der Poisson-Prozess erhalten, so trägt jedes Volumenelement ΔV einen Schrotrauschstromanteil bei, der durch den Lawinenprozess verstärkt bei $\kappa = -u_a, 0$ erhalten. Über die Rauschbeiträge aller Volumenelemente ist zu summieren. Für die Verstärkung ist die lokale Schrotrauschende Verstärkung $M(x)$ einzusetzen, wobei unter M bisshin der Erwartungswert (Mittelwert) \bar{M} verstanden wurde. Das Elektron bei x wird aber nicht mit $\bar{M} = \int M w(M) dM$ verstärkt, wobei $w(M)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariable $M(t)$ ist, sondern mit eben dieser Zufallsvariable $M(t)$, wäre der Lawinenprozess selbst rauschfrei, so wäre M keine Zufallsvariable, sondern eine nach Gl. (6-54, 66) berechenbare Größe; außerdem wäre $\overline{M^2} = \int M^2 w(M) dM = \bar{M}^2 = M^2$. Im Lawinenzustand würde nur das verstärkte Rauschen der Primärträger gemessen, also $\overline{i_a^2} = M^2 \cdot 2e i_s \Delta f$, wobei $i_s = A f_s$ von Gl. (6-59) ist. Ist aber auch M eine Zufallsvariable, so wird jedes lokale Primärtrauschen mit dem aktuellen $M(t)$ im Strom verstärkt, so daß der Lawinenzustand mit $\overline{i_a^2} = \overline{M^2} \cdot 2e i_s \Delta f$ schwacht, wobei $\overline{M^2} / \bar{M}^2 > 1$ ist, also mit $M = \bar{M}$

$$\overline{i_a^2} = 2e i_s \Delta f \cdot M^2 \cdot F(k, k_0, k_1, k_2, E)$$

$$F(k, k_0, k_1, k_2, E) = \frac{\overline{M^2}}{\bar{M}^2} \approx c_1 M^{c_2} > 1 \quad (6-69)$$

Der Signalstrom dagegen wird mit dem Erwartungswert des Multiplikationsfaktors verstärkt,

$$\overline{i_a} = M i_s \quad (6-70)$$

Für festes Rauschen eines dem APD nachgeschalteten Verstärkers gibt es daher einen optimalen Wert $\bar{M}_{opt} = M_{opt}$, bei dem das Gesamt rauschen minimal wird: Unterhalb von M_{opt} dominiert Rauschen des Verstärkers (Grenzfalle: Es kommt per kein Signal mehr an den Verstärker), oberhalb von M_{opt} dominiert das Rauschen der Leuchtdiode, welches wegen $F > 1$ in der Leistung rascher wächst als die Signalleistung $\sim M^2$ (Grenzfalle: $M \rightarrow \infty$, dann nur Leuchtdiode rauschen).

Bild 6-12a zeigt den Übersetzungsrauschfaktor $F = F_n$ für reine Elektroneninjektion $k=0$ in Abhängigkeit von Verstärkungsfaktor M_n , Gl. (6-55). Bild 6-12b gibt Messwerte für Si an. Parameter α des Verhältnisses der Ionisationskoeffizienten, genau

$$k_2 = \frac{\int_{-w_a}^0 \beta M^2 dx}{\int_{-w_a}^0 \alpha M^2 dx} \quad (6-71)$$

mit $M = M(x)$ aus Gl. (6-58) nach Ersetzen von $-w_a$ in der Integrationsgrenze durch x . Man sieht, daß in guter Näherung $F \approx c_1 M^{c_2}$ erfüllt ist, wobei $c_1 = c_2 = 1$ gilt, also $F = M$ für $\alpha = \beta$, $k_0 = k_1 = k_2 = 1$, und $c_1 = 2, c_2 = 0$ für $\beta = 0$, also $k_0 = k_1 = k_2 = 0$, also $F = 2$. Da der Übersetzungsrauschfaktor von k_2 abhängt, ist er nicht nur materialabhängig, sondern eben falls, über die Ortsabhängigkeit $M(x)$, strukturbabhängig, so daß bei gleichen Basismaterial für verschiedene Anbauten

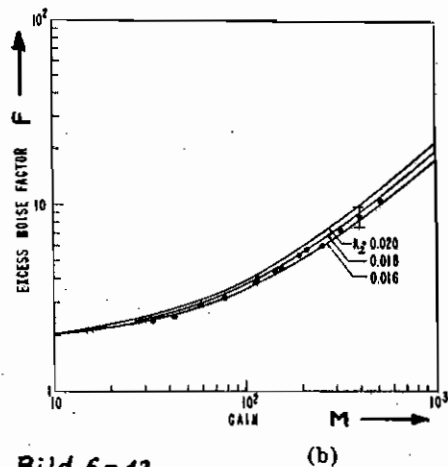
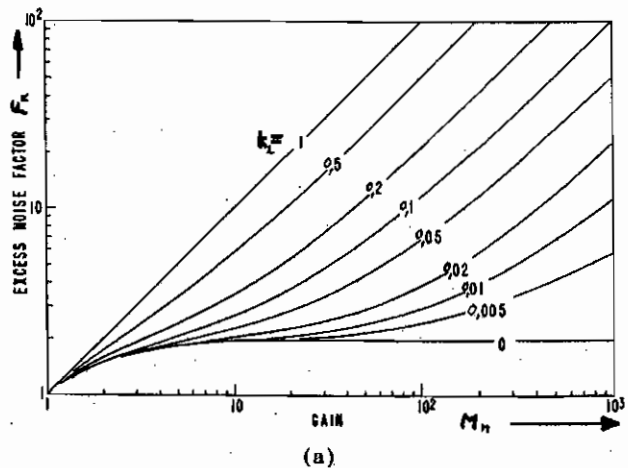


Bild 6-12 (a) Excess noise factor as a function of electron gain M , and k_2 ; (b) experimental results for a silicon "reach-through" diode, Bild 6-8 (Sperrschicht "reicht durch" bis zum p^+ -Gebiet):

F verschiedene Werte annehmen kann. Dabei ist k_2 und F für eine n^+p -Sperrschicht wie in Bild 6-8 kleiner als für eine p^+n -Sperrschicht bei gleicher Breite w_a und gleicher Spitzfeldstärke, da $M(x)$ im ersten, pünktigen Fall mit reiner Elektroneninjektion kleinere Werte annimmt als im zweiten Fall mit reiner Lochinjektion $k=1$, vgl. Gl. (6-63). Je näher die äußere Mittelsperrschicht wird, je größer also die Nichtlinearität des Lawinenprozesses ist, desto näher weichen M und M^2 voneinander ab, so daß folgender allgemeiner Zusammenhang gilt, vgl. auch Bild 6-13 für $M=M(U_R)$:

Hohe Durchbruchspannung	Niedrige Durchbruchspannung
$\frac{dM}{dT}$ klein, da $M(U_R)$ flach	$\frac{dM}{dT}$ groß, da $M(U_R)$ steil
Gute Arbeitspunktstabilität	Schlechte Arbeitspunktstabilität
Kleinere Anstiegszeit von i	Größere Anstiegszeit von i
Geringes Rauschen	Hohes Rauschen
k_0, k_1, k_2 groß oder klein gegen 1	$k_0, k_1, k_2 \rightarrow 1$
$\beta \ll \alpha$ oder $\beta \gg \alpha$, dann	$\beta \rightarrow \alpha$
$k \rightarrow 0$ oder $k \rightarrow 1$	$k \rightarrow 0,5$ ($k \rightarrow 0$ oder 1 möglich)

Tabelle 6-1

Nimmt man dabei für Empfänger von Wellenlängen bis 1,5 μm als Detektormaterial Germanium mit $\alpha \approx \beta$, so sind die Nachteile der rechten Spalte von Tabelle 6-1 damit verbunden. Zusätzlich reduziert der geringere Si-Löse-Störstrom die Empfindlichkeit, Gl. (6-20). Bei pünktigen Pioden-anlagen weist ein Si-Detektor alle Vorteile der linken Spalte von Tabelle 6-1 auf.

Die Linearität von APD's wird durch Raumladungseffekte bei relativ niedrigen Strömen bereits reduziert. Vor allem die Feldverzerrung in der Lawinenzone und die exponentielle Reaktion der Verstärkung prädestinieren einen APD für niedrige Ein-panglichtleistungen.

Bild 6-13 zeigt ein Datenblatt eines in Serie gefertigten Si-APD vom Typ BPW28. Der Wellenlänge Bereich für die Strahlung von GaAs-Lasern ist bei der Darstellung des externen Quantenwirkungsgrades eingetragen.

BPW 28

Absolute Grenzdaten Absolute maximum ratings

Verlustleistung Power dissipation	100	mW
$t_{amb} = 25^\circ\text{C}$	125	$^\circ\text{C}$
Sperrschichttemperatur Junction temperature	-65...+125	$^\circ\text{C}$

Umgebungstemperaturbereich
Ambient temperature range

Optische und elektrische Kenngrößen Optical and electrical characteristics

Min. Typ. Max.

Bereich der spektralen Empfindlichkeit (50%) Range of spectral bandwidth (50%)	450...950	nm
Dunkelsperrstrom Reverse dark current $M^1 = 100, H = 0$	1	nA
Durchbruchspannung Breakdown voltage $I_R = 10 \mu\text{A}, H = 0$	140	V
Temperaturkoeffizient von $U_{(BR)}$ Temperature coefficient of $U_{(BR)}$	0,14	%/ $^\circ\text{C}$

Wirkungsgrad
Efficiency

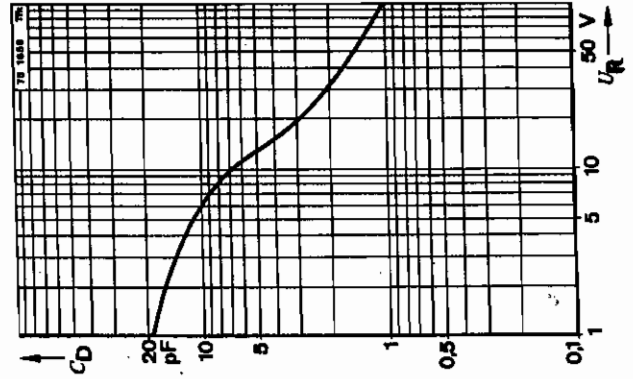
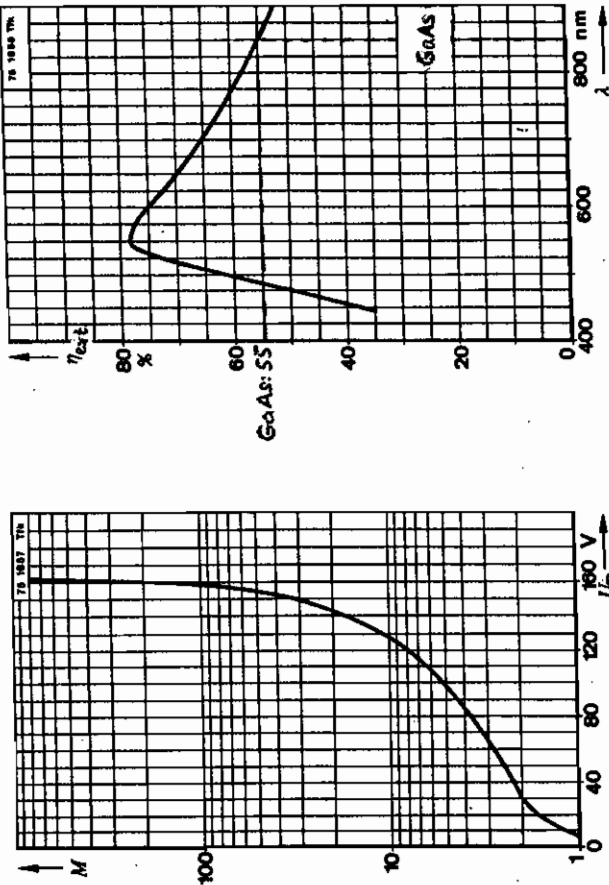
η_{ext}	20	%
Verstärkungsbandbreiteprodukt Gain bandwidth product	200	GHz

Kapazität
Capacitance
 $U = 100 \text{ V}, f = 1 \text{ MHz}$

C_D	1	pF
-------	---	----

Serienwiderstand
Series resistance
 $f = 1 \text{ MHz}$

r_s	50	Ω
-------	----	----------



U_R : Sperrspannung

1) Der spannungsabhängige Verstärkungsfaktor M ist definiert als Verhältnis des Photostromes I_{ph} bei Belichtungs-Sperrspannung zu dem Photostrom bei 10 V Sperrspannung.

The voltage dependent photocurrent gain M is defined as the ratio of photocurrent I_{ph} at a certain reverse voltage to the photocurrent at a bias of 10 V.

2) Das Verstärkungsbandbreiteprodukt ist die Verstärkung M multipliziert mit der Meßfrequenz, wenn die Diode mit Sperrspannung so betrieben wird, daß bei der gegebenen Meßfrequenz der maximale Verstärkungsfaktor vorhanden ist.

Gain bandwidth product is defined as the product of M times the frequency of measurement, when the diode is biased for maximum obtainable gain.

6.4. Phototransistor

Bei einem Phototransistor ist die Kollektor-Basis-Strecke als Photodiode ausgebildet. Bei Belichtung der Diode fließt also ein Photostrom i_{ph} , (gl. 6-14), in die Basis und bewirkt einen um die Stromverstärkung β vergrößerten Kollektorstrom. Typische Werte von β sind $\beta = 100 \dots 700$. Die

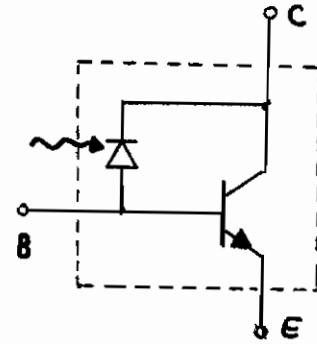


Bild 6-14

Erzatschaltung ist Bild 6-14. Für besonders hohe Stromverstärkungen kann man auf dem selben Chip eine Darlington-Schufe nachschalten.

Die Grenzfrequenzen von Phototransistoren liegen bei 300 kHz, die von Darlington-Phototransistoren bei 30 kHz. Die niedrige Grenzfrequenz kommt daher, daß die Kollektor-Basis-Kapazität von relativ kleinen Photostrom umgeladen werden muß. Die Temperaturabhängigkeit entspricht der normaler Transistoren.

Ein herausgefilterter Basisanschluß gestattet die Verringerung des Kollektor-Basis-Dunkelstroms I_{cbo} durch einen hochohmigen Ableitwiderstand zwischen Basis und Emittter, eine Verbesserung der Grenzfrequenz und die Einstellung des Arbeitspunktes. Diese Maßnahmen gehen allerdings auf Kosten der Empfindlichkeit, da immer auch ein Teil des Photostroms abgeleitet und dem Stromverstärkungsmechanismus entzogen wird.

Hohe Grenzfrequenzen bei hoher Empfindlichkeit kann man erreichen, wenn alle Spannungen am Transistor konstant gehalten werden, da dann keine Kapazitätsumladungen mehr notwendig sind. Schaltet man an C eine Konstantspannungsquelle und hält E (z.B. durch eine Rückkopplerschaltung mit einem Operationsverstärker) auf dem Potential null, dann ist das Ziel erreicht.

Phototransistoren ohne herausgefilterten Basisanschluß heißen Photodioden.

Durch Rückkopplung über einen pnp-Transistor entsteht der Photothyristor, der in der Leistungselektronik zunehmend an Bedeutung gewinnen wird. Die Ersatzschaltung zeigt Bild 6-15.

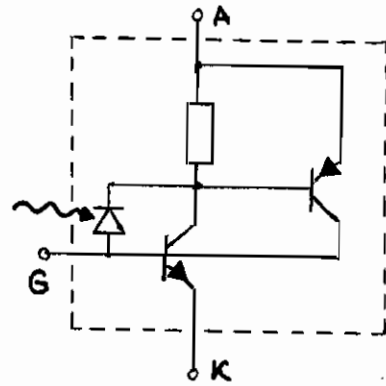


Bild 6-15

6.5. Photo feld effekt transistor

Beim Photo-FET wird die Gate-Source-Node belichtet. Je nach Bezählung des fets sind drei Betriebsarten möglich:

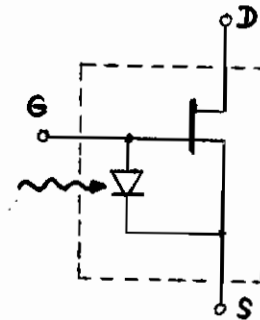


Bild 6-16

1. Photowiderstand, G und S verbunden, Empfindlichkeit $10^3 \frac{\mu A}{\mu W}$ (Si).
2. Normalbetrieb, G und S über Widerstand und Vorspannungsquelle verbunden. Die Drain-Spannung geht quadratisch mit der Lichtleistung. Empfindlichkeit $10^2 \frac{\mu A}{\mu W}$ (Si).
3. Photodiodebetrieb, G und D verbunden, Empfindlichkeit $0,5 \frac{\mu A}{\mu W}$ (Si).

Für UV-empfindliche Photo-FET's liegt die assoziierte Sperrlicht 0,1 μm unter einem Schottky-Kontakt, der das fets formiert. Akzeptable Empfindlichkeiten bis $\lambda = 200 nm$ wurden erreicht.

6.6. Optokoppler

Kombiniert man eine Leuchtstoff-Diode und einen Photoempfang in einem Gehäuse, so nennt man das bidirektionale Optokoppler. Es eignet sich zur Potentialtrennung analoge und digitale Signale. Mit hochlinearen FET-

Empfänger, die mit offenen Gate betrieben werden, lassen sich potentialfrei stabile Widerstände realisieren im Bereich $200 \Omega \dots 300 M\Omega$. Hohe Ströme ($100 \mu A$), hohe Sperrspannung ($\pm 30V$), hohe Dynamikbereich ($50dB$ bei $1MHz$), geringer Klirrfaktor, niedrige Streuleitung (Strom durch Leuchtdiode bei $30 \mu A$) und geringe Schaltzeiten ($< 15 \mu s$) ermöglichen den problemlosen Aufbau von Dämpfunggliedern, elektronisch abstimmbare aktive Filter, Sample & Hold-Schaltungen u.ä.

Mit der Empfänger eine Photodiode, erhält man Grenzfrequenzen von $10 MHz$ bei Ausgangs-Eingang-Stromverhältnissen von $0,1\%$. Die entsprechenden Werte für Phototransistor- bzw. Photodarlingtontransistor-Empfänger sind $300 kHz / 30\%$ bzw. $20 kHz / 300\%$.

Bild 6-17 zeigt den Prinzipaufbau eines Optokopplers aus GaAs-Emitter und Si-Photodiode. Das Zwischenmedium mit $n_2 > 1$ reduziert den Einfluß der Totalreflexion.

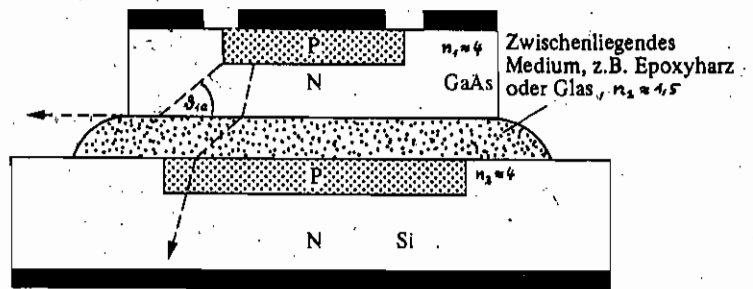


Bild 6-17
Prinzipieller Aufbau eines Optokopplers mit diffundierter GaAs-Diode und diffundierter Fotodiode. Die Quantenausbeute der GaAs-Diode wird durch das zwischenliegende Medium mit $n \approx 1,5$ weiter angehoben

6.7. Photowiderstand

Photowiderstände sind potentialfrei Halbleiter, deren Widerstand von der Bestrauchtungsstärke abhängt. Nach Gl. (3-40) ist die Leitfähigkeit der Dichte der beweglichen Ladungsträger proportional. Bei Eigenphotoleitung muß die Photonenenergie größer als der Bandabstand sein $hf > E_g$, um Elektron-Loch-Paare erzeugen zu können. Bei Mörndellphotoleitung

weder Donatoren oder Akzeptoren in der Nähe der Basalflächen ionisiert. Damit die thermische Anregung klein bleibt, müssen solche infrarot-länglichen Detektoren gekühlt werden.

Vorausgesetzt werde, daß entweder bei Eigenphotoleitung die Elektronen viel rascher driften als die Löcher, bzw. daß bei Störstellenphotoleitung nur eine Trägerart erzeugt wird. Eine Probe der Länge L , an der eine Spannung U liegt, werde von einer Lichtleistung P_0 durchstrahlt. Dabei werde mit dem externen Quantenwirkungsgrad η_{ext} Träger erzeugt und durch eine homogene Feldstärke $E = U/L$ beschleunigt. Die Driftzeit der Träger mit der Ladung q über die Länge L im Querschnitt A sei $t_d = L/v$ und ihre Lebensdauer τ . Der in planare Strom im Ankerkreis ist dem räumlichen Mittelwert der Trägerdichte proportional, (6-26). Jeder Träger beiträgt nicht im Verhältnis seiner Lebensdauer zur Driftzeit am Strom, folglich gilt für den Photostrom

$$i_{ph} = \eta_{ext} \frac{q P_0}{h f} \cdot \frac{\tau}{t_d} \quad (6-72)$$

Ist die Lebensdauer eines Trägers größer als die Driftzeit, bleibt also z.B. die Störstelle länger ionisiert, so liefert die externe Spannungsquelle Ladungsträger nach, so daß der Photostrom um den Faktor

$$M_0 = \frac{\tau}{t_d} = \frac{\tau}{L} \cdot v = \left\{ \text{gl. (2-32)} \right\} = \tau \frac{\mu E}{L} = \tau \frac{\mu U}{L^2} \quad (6-73)$$

verstärkt werden kann. Die Driftgeschwindigkeit ist allerdings auf ihren Sättigungswert v_s beschränkt. Kurze Photowiderstände und lange Trägerlebensdauern ermöglichen Stromverstärkungen $M_0 = 10^5$ im realistischen Fall. Änderungen in M_0 sind nur mit der Zeitkonstanten dieser Lebensdauer möglich, folglich gilt für den frequenzabhängigen Verstärkungsfaktor näherungsweise

$$M(\omega) = \frac{M_0}{1 + j\omega\tau} \quad (6-74)$$

und für das Verstärkung-Kreisfrequenzbandbreite-Produkt,
 $B = \frac{1}{\tau}$,

$$M_0 B = \frac{1}{\tau_d}, \quad (6-75)$$

eine nur von der Driftzeit abhängige Größe. Mit $v_d \approx 10^5 \text{ ms}^{-1}$
 und $L = 10 \mu\text{m}$ ergibt sich $M_0 B \approx 2\pi \cdot 1,6 \text{ GHz}$, vgl. Gl. (6-67).

Als äquivalente Rauschleistung (noise equivalent power, NEP) bzw. als Nachweisvermögen (detectivity, D) wird definiert

$$P_{NEP} = P \frac{a_n \sqrt{\Delta f}}{a_s}, \quad D = \frac{\sqrt{A}}{P_{NEP}} = \frac{\sqrt{A \Delta f}}{P} \cdot \frac{a_s}{a_n}, \quad (6-76)$$

wobei P der Effektivwert der 100% modulierte Lichtleistung ist, die, auf die Detektorfläche A auftreffend, einen so großen Effektivwert a_s der elektrischen Ausgangsgröße a erzeugt, wie er durch das Rauschen mit Effektivwert a_n in der Frequenzbandbreite Δf des Anzeigeverstärkers entsteht, $a_s = a_n$.

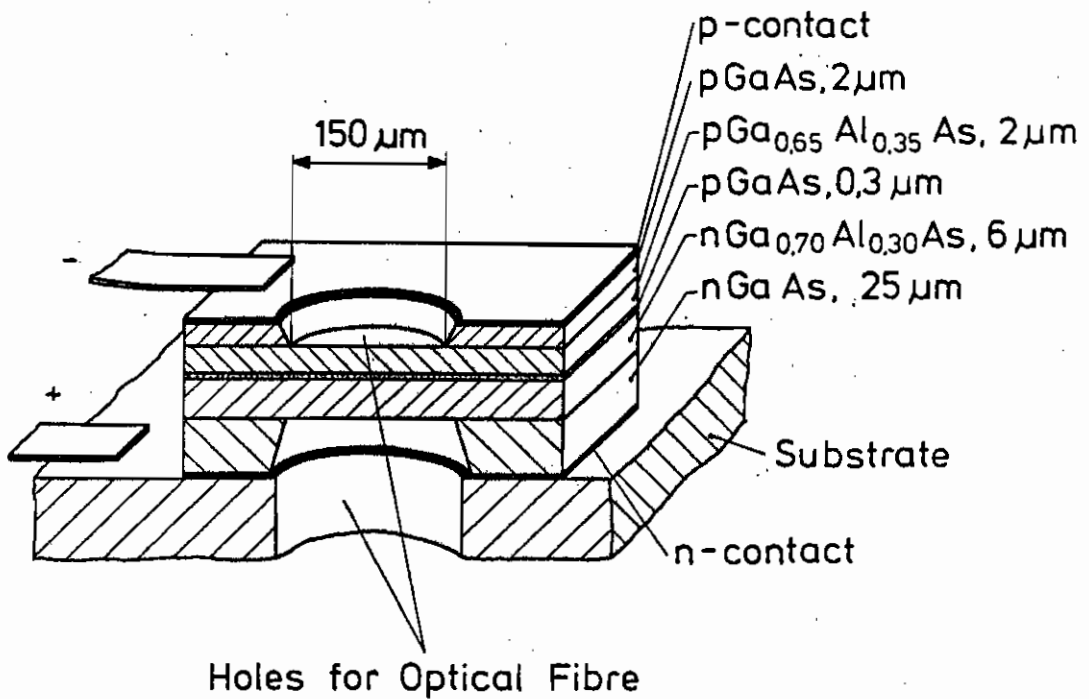
Häufig verwendete Materialien für photographische Belichtungs-
 messer sind Cadmium-Selenid und Cadmium-Sulfid (CdS)
 mit einem Empfindlichkeitsbereich von 400... 800 nm Wellen-
 länge.

Die Temperaturabhängigkeit α , vor allem bei geringer Be-
 leuchtungsstärke (n_i^2 !), beträchtlich.

Die Abhängigkeit des Widerstandsverkes R von der Beleuchtungs-
 stärke P geht bei realen Bauelementen, abweichend von Gl. (6-
 72), wie $R \sim P^{-\gamma}$, wobei $0,5 < \gamma < 1$ ist und γ für kleine
 P größer wird. Das Hell-Dunkel-Widerstandsverhältnis
 kann $1:10^6$ betragen. Im allgemeinen sind Photowiderstän-
 de von ihrer Vorspannung abhängig und können unerwünschte
 Ermüdungserscheinungen zeigen.

6.8. Ausblick

Für die Zwecke der optischen Nachrichtentechnik hat die pin-Photodiode und vor allem die Lawinendiode die größte Bedeutung. Da aus dem in Abschnitt 5.3. genannten Gründen der Wellenlängenbereich $1,1\mu\text{m}$ bis $1,5\mu\text{m}$ von großem Interesse ist, müssen zur Detektorherstellung andere Ausgangsmaterialien geringeren Bandabstands als Si, aber mit höheren Eigenladungen als Ge, verwendet werden. Gedacht wird etwa an GaInAs ($x_2=0,7$, S. (6-69)) oder GaAs/(GaAl)As, die auch in transparenter Ausführung, zum Zweischnittschalt in Passivstrukturen, hergestellt werden, Bild 6-18. Auch bei diesen neuen Strukturen strebt man eine interne Stromverstärkung durch den Lawineneffekt an.



Transparent GaAs/(GaAl)As photodiode, cross section

Bild 6-18

7. Literaturhinweise

7. 1. Bücher

- Feynman, R.P., Leighton, R.B., and Sands, M., Lectures on physics. Volume I and III. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1966.
- Good, C.H. (ed.), Gallium arsenide lasers. Wiley Interscience, London 1969.
- Good, C.H., Injection electroluminescent devices. Wiley Interscience, London 1973.
- Gran, G.K., Quanten elektronik. Vieweg-Verlag, Braunschweig 1978.
- Härtel, V. (ed.), Das Opto-Kochbuch. Learning center der Firma Texas Instruments Deutschland, München 1975.
- Heywang, W. und Pötkel, H.W., Bündelstruktur und Stromtransport. Springer-Verlag, Berlin 1978.
- Kingston, R.H., Detection of optical and infrared radiation. Springer-Verlag, Berlin 1978.
- Kittel, Ch., Introduction to solid state physics. John Wiley & Sons, New York 1966.
- Kleen, W. und Müller, R. (ed.), Laser. Springer-Verlag, Berlin 1969.
- Krenel, H. and Butler, J.K., Semiconductor lasers and heterojunction LEDs. Academic Press, New York 1977.
- Landau, L.D. und Lifschitz, E.M., Lehrbuch der Theoretischen Physik VIII. Elektrodynamik der Kontinua. Akademie-Verlag, Berlin 1971.
- Marcuse, D., Theory of dielectric optical waveguides. Academic Press, New York 1974.
- Moss, T.S., Durrell, G.J., and Ellis, D., Semiconductor optoelectronics. Dutton & Co., London 1973.
- Paul, R., Elektronische Festkörperbauelemente: Band 2, Halbleiterdioden. Dr. Alfred Hüthig Verlag, Heidelberg 1976.
- Phillips, J.C., Bonds and bands in semiconductors. Academic Press, New York 1973.
- Röss, D., Laser-Lichtverstärker und -Oszillatoren. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt a.M. 1966.
- Seeger, K., Semiconductor physics. Springer-Verlag, Wien 1973.

Seiler, K., Physik und Technik der Halbleiter. Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1964.

Spenke, E., Elektronische Halbleiter. Springer-Verlag, Berlin 1965.

Unge, H.-G., Optische Nachrichtentechnik. Eilawa-Verlag, Berlin 1976.

Unge, H.-G., Planar optical waveguides and fibres. Oxford University Press, Oxford 1977.

7.2. Einzelartikel - Optoelektronische Sender

Aiki, K., Nakamura, M., Kuroda, T., and Umeda, J., Channelled - substrate planar structure (AlGa)As injection lasers. Appl. Phys. Letters 30 (1977), 649-651.

Aiki, K., Nakamura, M., Kuroda, T., Umeda, J., Ito, R., Chinoue, N., and Maeda, M., Transverse mode stabilized Al_xGa_{1-x}As injection lasers with channelled - substrate - planar structure. IEEE J. Quantum Electron. QE-14 (1978), 89-94.

Aleksanian, A.G., Poluektor, I.A., and Popov, Yu.M., Theory of optical gain and threshold properties of semiconductor lasers. IEEE J. Quantum Electron. QE-10 (1974), 297-305.

Boers, P.M., Vlaardingerbroek, M.T., and Davidson, M., Dynamic behaviour of semiconductor lasers. Electron. Letters 11 (1975), 206-208.

Botez, D. and Ettenberg, M., Beamwidth approximations for the fundamental mode in symmetric double-heterojunction lasers. IEEE J. Quantum Electron. QE-14 (1978), 827-830.

Burrus, C.A. and Miller, B.I., Small-area double heterostructure aluminium-gallium-arsenide electroluminescent diode sources for optical fiber transmission lines. Opt. Commun. 5 (1971), 307-309.

Butler, J.K. and Delaney, J.D., A rigorous boundary value solution for the lateral modes of stripe geometry injection lasers. IEEE J. Quantum Electron. QE-14 (1978), 507-513.

Bucsis, G., Laff, R.A., Blum, S.E., Dill Jr., F.H., and Nakan, M.I., Directionality effects of GaAs light-emitting diodes: Part I. IBM J. Res. Develop. 7 (1963), 62-63.

Buns, J., The theory for the dielectric slab waveguide with complex refractive index applied to GaAs lasers. Europ. Microwave Conf., Copenhagen, Sept. 1977.

- Casey Jr., H.C. and Silversmith, D.J., Radiative tunneling in GaAs abrupt asymmetrical junctions. *J. Appl. Phys.* 40 (1969), 241-256.
- Cook, D.D. and Nash, F.R., Gain induced guiding and astigmatic output beam of GaAs lasers. *J. Appl. Phys.* 46 (1975), 1660-1672.
- Dolocan, V., Spatial distribution of radiative recombination rate, time delays, and Q switching in triple heterostructure lasers. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-14 (1978), 872-882.
- Freunde, W., Monomode operation of direct modulated GaAlAs injection lasers from 260 Mbit/s up to 1.4 Gbit/s. *AEÜ* 32 (1978), 105-110.
- Gottsmann, K., Halbleiters Laser bei Raumtemperatur. *Wiss. Ber. AEG-Telefunken* 44 (1971), 45-52.
- Grau, G., Temperatur- und Laserstrahlung als Informationsträger. *AEÜ* 18 (1964), 1-4.
- Hakki, B.W. and Paoli, T.L., CW degradation at 300°K of GaAs double-heterostructure junction lasers. II. Electronic gain. *J. Appl. Phys.* 44 (1973), 4113-4117.
- Itoh, K., Asahi, K., Inoue, H., and Teramoto, I., Embedded-tripe GaAs-GaAlAs double-heterostructure lasers with polycrystalline GaAsP-layers - I: Lasers with cleaved mirrors, II: Lasers with etched mirrors. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-13 (1977), 623-631.
- Kame, E.O., Band structure - indium antimonide. *J. Phys. Chem. Solids* 1 (1957), 249
- Kirkby, P.A., Goodwin, A.R., Thompson, G.H.B., and Selway, P.R., Observations of self-focussing in stripe-geometry semiconductor lasers and the development of a comprehensive model of their operation. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-13 (1977), 705-719.
- Kroemer, H., The Einstein relation for degenerate carrier concentrations. *IEEE Trans. Electron. Devices* ED-25 (1978), 850.
- Laff, R.A., Dumke, W.P., Bill Jr., F.H., and Nathan, M.I., Directionality effects of GaAs light-emitting diodes: Part II. *IBM J. Res. Develop.* 7 (1963), 63-65.
- Landsberg, P.T., The Einstein relation. *Proc. IEEE* 61 (1973), 476.
- Lee, T.P., Burrus, C.A., and Hiller, D.I., A stripe-geometry double-heterostructure amplified-spontaneous-emission (superluminescent) diode. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-9 (1973), 820-828.
- Loferski, J.J., Recent research of photovoltaic solar energy converters. *Proc. IEEE* 51 (1963), 667-674.
- Marple, D.T.F., Refractive index of GaAs. *J. Appl. Phys.* 35 (1964), 1241-1242.
- Meffler, K., Wolf, H.-D., and Zschauer, K.-H., Calculation of the homogeneous degradation of injection laser parameters from initial degradation rates. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-14 (1978), 819-826.

- Nagano, M. and Kasahara, K., Dynamic properties of transverse junction stripe lasers. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-13 (1977), 632-637.
- Nash, F.R., Mode guidance parallel to the junction plane of double heterostructure GaAs lasers. *J. Appl. Phys.* 44 (1973), 4696-4707.
- Namizaki, H., Kan, H., Ishii, M., and Ito, A., Transverse-junction - stripe - geometry double - heterostructure lasers with very low threshold current. *J. Appl. Phys.* 45 (1974), 2785-2786.
- Paoli, T.L. and Hakki, B.W., CW degradation at 300°K of GaAs double - heterostructure junction lasers. I. Emission spectra. *J. Appl. Phys.* 44 (1973), 4108-4112.
- Paoli, T.L., Waveguiding in a stripe - geometry junction laser. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-13 (1977), 662-668.
- Pekermann, K., Modes in active waveguides with inhomogeneous gain profiles as applied to injection lasers. *A&EÜ* 32 (1978), 313-320.
- Panish, M.B., Heterostructure injection lasers. *Proc. IEEE* 64 (1976), 1512-1540.
- Schlösser, W.O., Gain - induced modes in planar structures. *Dell Syst. Techn. J.* 52 (1973), 887-905.
- Shore, K.A. and Adams, M.J., Theory of the double heterostructure laser: III. Self-consistent calculations of the electrical and optical characteristics. *Optical and Quantum Electronics* 2 (1976), 383-391.
- Stern, F., Gain - current relation for GaAs lasers with n-type and undoped active layers. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-9 (1973), 290-294.
- Straus, J., The nonlinearity of high-radiance light-emitting diodes. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-14 (1978), 813-819.
- Suzaki, W., Tanaka, T., Kan, H., and Ishii, M., New structures of GaAs laser-injection laser for low-threshold and single-mode operation. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-13 (1977), 587-591.
- Zee, D., Broadening mechanism in semiconductor (GaAs) lasers: Limitations to single mode power emission. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-14 (1978), 727-736.

7.3. Einzelartikel - Optoelektronische Empfänger

- Ando, H., Kanbe, H., Kimura, T., Yamaoka, T., and Kameda, T., Characteristics of germanium avalanche photodiodes in the wavelength region of 1-1.6 μm . IEEE J. Quantum Electron. QE-14 (1978), 804-809.
- Batdorf, R.L., Chynoweth, A.G., Dacey, G.C., and Fry, P.W., Uniform silicon p-n junctions. I. Broad area breakdown. J. Appl. Phys. 34 (1960), 1152-1160.
- Berchtold, K., Krumpholtz, O., and Suri, J., Avalanche photodiodes with a gain-bandwidth product of more than 200 GHz. Appl. Phys. Lett. 26 (1975), 585-587.
- Chynoweth, A.G., Ionization rates for electrons and holes in silicon. Phys. Rev. 109 (1958), 1537.
- Chynoweth, A.G., Uniform silicon p-n-junctions. II. Ionization rates for electrons. J. Appl. Phys. 34 (1960), 1161-1165.
- Conradi, J., The distribution of gains in uniformly multiplying avalanche photodiode: Experimental. IEEE Trans. Electron Devices ED-19 (1972), 717-718.
- Conradi, J., Kapron, F.P., and Dymant, J.C., Fiber-optical transmission between 0.8 and 1.4 μm . IEEE J. Solid-State Circuits SC-13 (1978), 106-119.
- Freude, W., Performance of packaged fast silicon photodetectors in a broad-band coaxial mount. AEÜ 31 (1977), 167-170. Erratum: AEÜ 32 (1978), 43.
- Grau, G.K., Noise in photoemission current. Appl. Optics 4 (1965), 755.
- Hines, M.E., Noise theory for the Read-type avalanche diode. IEEE Trans. Electron Devices ED-13 (1966), 158-163.
- Kanabe, H., Kimura, T., Mizushima, Y., and Kajiyama, K., Silicon avalanche photodiodes with low multiplication noise and high-speed response. IEEE Trans. Electron Device ED-23 (1976), 1337-1343.
- Krumpholtz, O. und Maslowski, S., Avalanche Herzphotodioden mit Über-einstrahlung. Wiss. Ber. AEG-Telefunken 44 (1971), 73-79.
- Krumpholtz, O., Signal/Rausch-Verhältnis bei Avalanche-Photodioden. Wiss. Ber. AEG-Telefunken 44 (1971), 80-84.
- Lee, C.A., Logan, R.A., Batdorf, R.L., Kleinack, J.J., and Wiegmann, W., Ionization rates of holes and electrons in silicon. Phys. Rev. 134 (1964), A761-A773.
- Lee, C.A., Batdorf, R.L., Wiegmann, W., and Kaminsky, G., Time dependence of avalanche processes in silicon. J. Appl. Phys. 38 (1967), 2787-2796.

- McIntyre, R.J., Multiplication noise in uniform avalanche diodes. *IEEE Trans. Electron Devices* ED-13 (1966), 164-168.
- McIntyre, R.J., The distribution of gains in uniformly multiplying avalanche photodiode: Theory. *IEEE Trans. Electron Devices* ED-19 (1972), 703-713.
- Melchior, H. and Lynch, W.T., Signal and noise response of high speed germanium avalanche photodiodes. *IEEE Trans. Electron Devices* ED-13 (1966), 829-838.
- Melchior, H., Sensitive high speed photodetectors for the demodulation of visible and near infrared light. *J. Luminescence* 7 (1973), 390-414.
- Moll, J.L. and Van Overstraeten, R., Charge multiplication in silicon p-n junctions. *Solid-State Electronics* 6 (1963), 147-157.
- Perssonick, S.D., New results on avalanche multiplication statistics with application to optical detection. *Bell Syst. Techn. J.* 50 (1971), 167-189.
- Perssonick, S.D., Statistics of a general class of avalanche detectors with applications to optical communication. *Bell Syst. Techn. J.* 50 (1971), 3075-3095.
- Ruegg, H.W., An optimized avalanche photodiode. *IEEE Trans. Electron Devices* ED-14 (1967), 239-251.
- Sze, S.M. and Gibbon, G., Avalanche breakdown voltages of abrupt and linearly graded p-n junctions in Ge, Si, GaAs and GaP. *Appl. Phys. Lett.* 8 (1966), 111-113.
- Tomarekka, L.R., Law, H.D., Eden, R.C., Deyhimy, I., and Nakano, K., High sensitivity optical receivers for 1.0-1.4 μ m fibre-optic systems. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-14 (1978), 800-804.
- Webb, P.P., McIntyre, R.J., and Couradi, J., Properties of avalanche photodiodes. *RCA Rev.* 35 (1974), 234-279.